Terzo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

16 Giugno 2015

Soluzioni

Esercizio 1 Determinare i numeri complessi z tali che $z^2 = -5 + 12i$.

Soluzione. Un z che soddisfi la richiesta sarà della forma $z = a + ib$. Poiché $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, imponendo la relazione $z^2 = -5 + 12i$, abbiamo che deve essere verificato il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} 2ab = 12 \\ a^2 - b^2 = -5. \end{cases}$$

Un modo di risolverlo è elevare al quadrato la prima equazione e sostituirvi il valore di a^2 ricavato dalla seconda:

$$\begin{cases} (b^2 - 5)b^2 = 36 \\ a^2 = b^2 - 5. \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione, una biquadratica in b^2:

$$b^4 - 5b^2 - 36 = 0.$$

Abbiamo che

$$b^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} -4 \\ +9. \end{cases}$$

Poiché $b \in \mathbb{R}$, possiamo escludere il valore -4, perché l'equazione $b^2 = -4$ non sarebbe risolubile in $\mathbb{R}$. Resta $b^2 = 9$, da cui ovviamente $b = \pm 3$. Sostituendo nella seconda equazione questi due valori di b, otteniamo per ciascuno due valori di a, dando origine a quattro coppie di candidate soluzioni:

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = \pm 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -3 \\ a = \pm 2 \end{cases} .$$

Poiché sappiamo dal teorema fondamentale dell'algebra che esistono esattamente due soluzioni, dobbiamo scartarne due: dall'equazione $ab = 6$, vediamo che il prodotto di a e b deve essere un numero positivo, dunque a e b devono essere concordi. Concludiamo che le soluzioni accettabili sono $(2, 3)$ e $(-2, -3)$, da cui $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -2 - 3i$. □

Esercizio 2 Si determini una primitiva della funzione $f(x) = x \sin(x)$.

Soluzione. Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int x \sin x dx$$

per parti. Integriamo $\sin x$ e deriviamo x:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Una primitiva della funzione data è $\sin x - x \cos x$. □

Esercizio 3 Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{|e^x - e|}{1 + |x|}$$

1. Si dica in quali punti la funzione è derivabile e in tali punti se ne calcoli la derivata;
2. Si determini il comportamento a $\pm\infty$;
3. Si determinino estremo superiore ed inferiore ed eventuali punti di massimo e minimo e di massimo e minimo locale;
4. Si tracci un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che la funzione data ha come dominio $\mathbb{R}$, in quanto il denominatore $1 + |x|$ non si annulla mai, essendo somma di funzioni non negative. Inoltre, sviluppando i valori assoluti, possiamo riscrivere la funzione come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e}{1 + x} & x \geq 1 \\ -\dfrac{e^x - e}{1 + x} & 0 \leq x < 1 \\ -\dfrac{e^x - e}{1 - x} & x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Per quanto premesso, possiamo subito dire che la funzione è derivabile negli intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$, perché in ciascuno di questi intervalli è rapporto di funzioni derivabili. Possiamo anche calcolare l'espressione della derivata in questi intervalli semplicemente derivando la (1):

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x + e}{(1 + x)^2} & x > 1 \\ -\dfrac{xe^x + e}{(1 + x)^2} & 0 < x < 1 \\ \dfrac{(x - 2)e^x + e}{(1 - x)^2} & x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Restano da discutere i casi $x = 0$ e $x = 1$. Calcoliamo i limiti destro e sinistro usando (2). Per quanto riguarda $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{xe^x + e}{(1 + x)^2} = \frac{e}{2}$$
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -\frac{xe^x + e}{(1 + x)^2} = -\frac{e}{2}.$$

Per quanto riguarda $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{xe^x + e}{(1 + x)^2} = -e$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x - 2)e^x + e}{(1 - x)^2} = e - 2.$$

Poiché in entrambi i casi i limiti destro e sinistro sono diversi, concludiamo che la funzione non è derivabile in $x = 0$ e $x = 1$.

2. Abbiamo che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e}{1+x} = +\infty$$
perché il numeratore è un infinito di ordine superiore rispetto al denominatore (si può usare anche il teorema di de l'Hopital). Il limite a $-\infty$ è dato da
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{e^x - e}{1-x} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

3. Stante quanto discusso al punto 2, possiamo subito affermare che $\sup f = +\infty$. Studiando il segno di f, si vede facilmente che è sempre positiva, ad eccezione del punto $x = 1$, in cui vale 0: concludiamo che $\inf f = 0$ e in più f ammette un minimo locale in $x = 1$.

   Studiando il segno di f', si vede che:

   - f è crescente in $(1, +\infty)$;
   - f è decrescente in $(0, 1)$;

   dunque non possono esserci altri punti di massimo o minimo in questi intervalli. Resta da vedere il comportamento di f in $(-\infty, 0)$. Per studiare il segno di f' in questo intervallo dobbiamo risolvere la disequazione
$$(x-2)e^x + e > 0.$$
   La precedente disequazione è equivalente a $(x-2)e^x > -e$. Studiando la funzione $g(x) = (x-2)e^x$, si vede facilmente che ammette un unico punto di minimo in $x = 1$, corrispondente al minimo $m = -e$. Quindi $g(x) > -e$ per ogni $x \neq 1$ e in particolare per ogni $x < 0$. Concludiamo che f è crescente in $(-\infty, 0)$ e pertanto in $x = 0$ ammette un massimo locale, che vale $f(0) = e - 1$. Per ragioni di monotonia non possono esserci altri estremi locali.

4. Il grafico della funzione si trova in figura 1

□

Esercizio 4 Si consideri il seguente sottoinsieme dei numeri reali:
$$A = \left\{ \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \;\middle|\; n \geq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Si dimostri che la successione $a_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ dei suoi elementi è monotona e si specifichi se è crescente o descrescente.

2. Si calcolino estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (se esistono), motivando adeguatamente la risposta.

Soluzione. 1. La successione a_n si può riscrivere come
$$a_n = \log(b_n), \quad b_n = \frac{n}{n+1}.$$
La successione b_n è monotona crescente:
$$b_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} = b_n \iff (n+1)^2 > n(n+2) \iff 1 > 0,$$
che è verificata per ogni valore di n. Poiché la funzione log è una funzione monotona crescente a sua volta, concludiamo che a_n è monotona crescente perché composizione di una successione crescente e una funzione crescente.

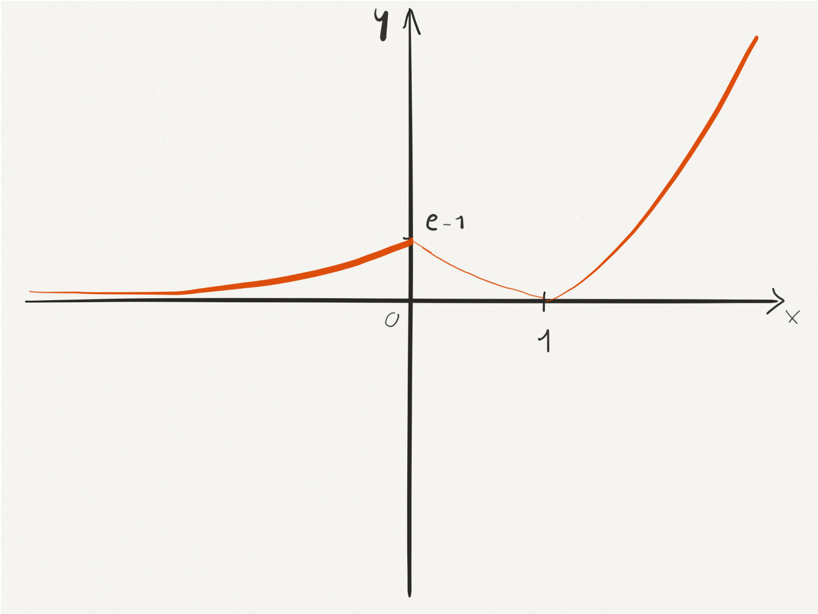

Figura 1: Un grafico qualitativo della funzione f.

2. Per quanto verificato al punto 1, concludiamo subito che la successione ammette minimo e il minimo è il suo primo valore $a_1 = \log(\frac{1}{2})$. L'estremo superiore è dato da $\lim_{n\to+\infty} a_n = \log(1) = 0$.

$\square$

Esercizio 5 Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^{x^4} (t + t^3 e^{t^3})\, dt$$

1. Si calcoli la derivata di F;
2. Si determini il numero degli zeri di F;
3. Si determinino estremo superiore ed inferiore di F.

Soluzione. 1. La funzione F è composizione delle due funzioni

$$f(y) = \int_0^{y} (t + t^3 e^{t^3})\, dt \qquad g(x) = x^4.$$

Poiché la funzione integranda $t + t^3 e^{t^3}$ è continua, allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione f è derivabile e la sua derivata è

$$f'(y) = y + y^3 e^{y^3}.$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = 4x^3(x^4 + x^{12}e^{x^{12}}).$$

2. Osserviamo che:

   - F è pari: $F(-x) = \int_0^{(-x)^4} (t + t^3 e^{t^3}) dt = \int_0^{x^4} (t + t^3 e^{t^3}) dt = F(x)$;
   - $F(x) \geq 0$ se $x > 0$: basta osservare che in questo intervallo la funzione integranda è positiva;
   - $F'(x) > 0$ se $x > 0$: si vede facilmente riscrivendo $F'(x) = 4x^7(1 + x^8 e^{x^{12}})$;
   - $F(0) = 0$ per le proprietà dell'integrale.

   Mettendo insieme le precedenti osservazioni, concludiamo che F ha un unico zero ed è $x = 0$. Infatti per ragioni di simmetria la funzione è non negativa per $x \neq 0$ e, poiché è monotona, non può assumere valore nullo.

3. Poiché la funzione è non negativa e in $x = 0$ ammette valore 0, concludiamo che $\inf F = 0$. Poiché è monotona e pari, il suo estremo superiore è dato da $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Per calcolare questo limite, si noti che $t + t^3 e^{t^3} \geq t$ per ogni $t \geq 0$, dunque:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim_{x\to+\infty} \int_0^{x^4} t\, dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^8}{2} = +\infty,$$

   per cui $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ e $\sup F = +\infty$.

$\square$