Quinto Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

2 Settembre 2015

Soluzioni

Esercizio 1 Siano $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 3 - i$, si determinino $z_1 \cdot z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

Soluzione. Ricordando la definizione di moltiplicazione di numeri complessi, si ha:

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(3-i) = 3 - i + 3i - i^2 = 3 - i + 3i + 1 = 4 + 2i.$$

Per quanto riguarda la divisione, invece:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+3i+i^2}{9-i^2} = \frac{2+4i}{10} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

□

Esercizio 2 Si calcoli il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{e^x - 2} dx.$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che ha senso calcolare l'integrale perché la funzione integranda è definita e continua su tutto l'intervallo di integrazione $[1, 2]$. Difatti l'unico punto in cui la funzione non è definita è x tale che $e^x - 2 = 0$, cioè $x = \ln 2$, che non appartiene a $[1, 2]$.

Per risolvere l'integrale, procediamo con una sostituzione: ponendo $e^x = t$, otteniamo che $x = \ln t$ e quindi $dx = \frac{1}{t} dt$. L'integrale diventa

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{t(t-2)} dt,$$

che, essendo un integrale di una funzione razionale fratta, si risolve facilmente con la decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{1}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} = \frac{(A+B)t - 2A}{t(t-2)}.$$

Otteniamo i valori di A e B risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A questo punto l'integrazione è immediata:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{t(t-2)} dt = \int_e^{e^2} -\frac{1}{2t} dt + \int_e^{e^2} \frac{1}{2(t-2)} dt =$$

$$-\frac{1}{2} \ln|t| \Big|_e^{e^2} + \frac{1}{2} \ln|t-2| \Big|_e^{e^2} = -\frac{1}{2} \ln e^2 + \frac{1}{2} \ln e + \frac{1}{2} \ln(e^2 - 2) - \frac{1}{2} \ln(e-2) =$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2 - 2}{e - 2} \right) + \frac{1}{2} e - 1.$$

□

Esercizio 3 Sia f la funzione definita da

$$f(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}.$$

a) Si determinino il dominio, gli zeri e il segno di f.

b) Si determinino massimo, minimo e punti di massimo e minimo locale della funzione.

c) Si tracci un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione. a) Il dominio della funzione è dato dall'insieme delle soluzioni della disequazione $1 - x^2 \geq 0$, cioè dall'intervallo $[-1, 1]$. Per trovare gli zeri di f risolviamo l'equazione irrazionale

$$3x + 4\sqrt{1-x^2} = 0 \iff \sqrt{1-x^2} = -\frac{3}{4}x.$$

Prima di elevare entrambi i membri al quadrato, osserviamo che se x è soluzione, allora x deve essere negativa, altrimenti avremmo una radice (che è positiva) uguagliata a un numero negativo, che è assurdo. Elevando al quadrato otteniamo

$$1 - x^2 = \frac{9}{16}x^2 \iff 25x^2 = 16 \iff x = \pm\frac{4}{5}.$$

Per quanto detto prima, la soluzione $x = \frac{4}{5}$ è da scartare, dunque concludiamo che l'unico zero di f è $x = -\frac{4}{5}$.

Per quanto riguarda il segno, dobbiamo risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt{1-x^2} \geq -\frac{3}{4}x.$$

Le soluzioni sono date dall'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ -\frac{3}{4}x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ -\frac{3}{4}x \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq \frac{9}{16}x^2. \end{cases}$$

Il primo ha come soluzione $(0, 1]$, mentre il secondo ha come soluzione $[-\frac{4}{5}, 0]$. L'unione dei due intervalli dà come soluzione $[-\frac{4}{5}, 1]$, che è quindi l'intervallo in cui f è positiva.

b) Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Calcoliamo i punti stazionari risolvendo $f'(x) = 0$:

$$3 - \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff 3\sqrt{1-x^2} = 4x \iff 9 - 9x^2 = 16x^2 \iff x = \pm\frac{3}{5}.$$

Come prima, la soluzione negativa non è accettabile. Concludiamo che l'unico punto stazionario di f è $x = \frac{3}{5}$. Studiando il segno di f', si scopre che la funzione è crescente in $(-1, \frac{3}{5})$ e decrescente in $(\frac{3}{5}, 1)$, quindi concludiamo che $x_M = \frac{3}{5}$ è punto di massimo locale. Il valore $f(x_M)$ oltre ad essere massimo locale è anche massimo assoluto. Per quanto riguarda il minimo assoluto, bisogna ricercarlo agli estremi del dominio. Poiché $f(-1) = -3$ e $f(1) = 3$, concludiamo che $x_m = -1$ è punto di minimo assoluto per f.

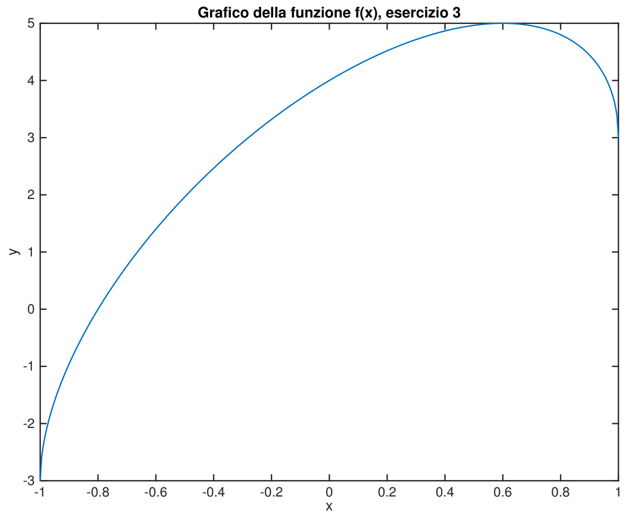

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}$.

c) Si guardi la figura 1.

$\square$

Esercizio 4 Sia $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}.$$

a) Si dica come si può estendere f in 0 in modo che risulti continua.

b) Si dica se tale estensione è derivabile.

c) Si determinino estremo superiore ed inferiore di f ed eventuali punti di massimo e minimo e di massimo e minimo locale.

d) Si tracci un grafico approssimativo di f.

Soluzione. a) Per estendere f in 0 in modo che sia continua, bisogna calcolare il limite destro e sinistro in 0. Se questi esistono, sono finiti e uguali a uno stesso valore che denotiamo con y_0, allora basta definire la funzione in 0 essere uguale proprio a y_0.

Poiché la funzione è pari, allora il limite destro e il limite sinistro, se esistono, sono necessariamente uguali. Basta calcolare dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}.$$

Sostituendo $y = \frac{1}{x}$, il limite diventa

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^{y^2}}$$

che vale 0 (si può verificare applicando due volte il teorema di de l'Hôpital). Estendiamo f in 0 definendo una nuova funzione $\tilde{f}$ che vale f ovunque tranne in 0 e vale 0 in 0:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

b) Per sapere se la funzione così estesa è derivabile in 0, dobbiamo verificare che il limite destro e sinistro della derivata in zero siano uguali. La derivata ha espressione

$$f'(x) = (2 - 2x^2)\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}. \tag{1}$$

Poiché il limite della derivata in 0 è uguale a 0 (dimostrazione simile a quella usata per il punto a)), allora concludiamo che la funzione così estesa è derivabile in 0.

c) Abbiamo già notato che f è pari, quindi basta studiarla nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Si vede facilmente che $f(x) > 0$ per ogni x; inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

dunque concludiamo che l'inf di f è proprio 0. Se si considera l'estensione continua data primaPer vedere se la funzione ha massimi o minimi relativi, studiamo il segno della derivata prima. Da (1) abbiamo che la derivata si annulla in $x = \pm 1$, è crescente in $(0, 1)$ e descrescente in $(1, +\infty)$. Concludiamo che f ammette un massimo locale in $x = 1$, che vale $f(1) = \frac{1}{e}$. Poiché f è derivabile in ogni punto del suo dominio, concludiamo che non ammette altri massimi e pertanto $\frac{1}{e}$ è anche massimo assoluto.

d) Si guardi la figura 2.

□

Esercizio 5 Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

a) Cosa vuol dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$? Dare la definizione precisa.

b) Fare un esempio di una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) Fare un esempio di una successione a_n tale che $a_n \neq 0$ per ogni n, $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ e non esiste $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n}$.

Soluzione. a) Vuol dire che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$.

b) Ad esempio $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

c) Ad esempio $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

□

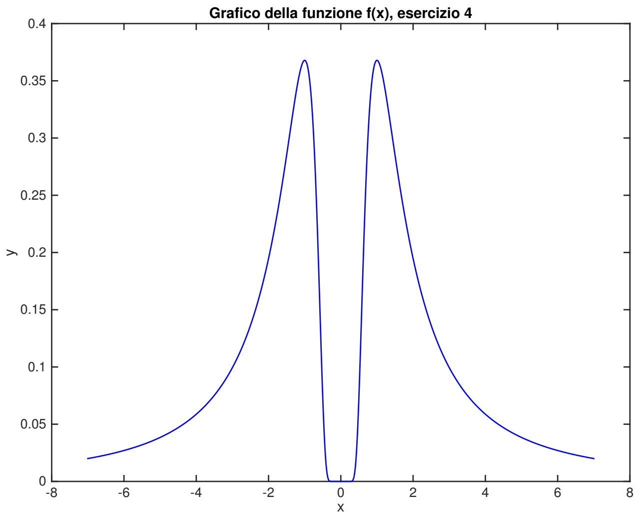

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$.