Appello Straordinario di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

4 Novembre 2015

Esercizio 1 Dati i numeri complessi $z_1 = 1+i$ e $z_2 = 2-3i$, calcolare $(z_1+z_2)^2$ e $\dfrac{1}{z_1+z_2}$.

Soluzione. Innanzitutto, $z_1 + z_2 = 1+i+2-3i = 3-2i$. Il quadrato $(z_1+z_2)^2 = (3-2i)^2 = 9-12i-4 = 5-12i$. Invece il reciproco è

$$\frac{1}{3-2i} = \frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i}{9+4} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

$\square$

Esercizio 2 Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{|5-n|}{n+3} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Determinarne estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (se esistono).

(b) Dire, motivando la risposta, se A è infinito e/o è limitato.

(c) A contiene punti di accumulazione?

Soluzione. (a) Osserviamo preliminarmente che

$$|5-n| = \begin{cases} 5-n & \text{se } n \leq 5 \\ n-5 & \text{se } n > 5. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme A si può scrivere come $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \left\{ \frac{5-n}{n+3} \;\middle|\; n = 0, \ldots, 5 \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{n-5}{n+3} \;\middle|\; n > 5 \right\}.$$

A_1 è un insieme finito composto da 6 elementi: $A_1 = \left\{ \frac{5}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, 0 \right\}$. Si osserva che tali elementi sono disposti in ordine decrescente, per cui $\max(A_1) = \frac{5}{3}$ e $\min(A_1) = 0$. Studiamo A_2.

Dimostriamo che gli elementi di A_2 sono disposti in ordine crescente: risolvendo $a_{n+1} \geq a_n$, otteniamo:

$$\frac{n+1-5}{n+1+3} \geq \frac{n-5}{n+3} \iff (n-4)(n+3) \geq (n-5)(n+4) \iff$$
$$n^2 - n - 12 \geq n^2 - n - 20 \iff -12 \geq -20,$$

che è risolta per ogni n e in particolare per ogni $n > 5$. Ne segue che A_2 ha un minimo e questo minimo è il suo primo elemento $a_6 = \frac{1}{9}$. Inoltre, osserviamo che

$$\frac{n-5}{n+3} = \frac{n+3-3-5}{n+3} = 1 - \frac{8}{n+3},$$

quindi gli elementi di A_2 si ottengono da 1 togliendo un numero sempre più piccolo. In particolare, abbiamo che

$$a_n \leq 1 \text{ per ogni } n > 5.$$

Riassumendo, abbiamo che gli elementi di A_2 sono tutti compresi tra $\frac{1}{9}$ e 1. Si osservi che

$$0 = \min(A_1) < \min(A_2) \leq a_n \leq 1 < \max(A_1) = \frac{5}{3}. \tag{1}$$

Ne segue che $\min(A) = \min(A_1) = 0$ e $\max(A) = \max(A_1) = \frac{5}{3}$.

(b) Da (1) abbiamo che A è limitato, perché tutti i suoi elementi sono compresi tra 0 e $\frac{5}{3}$. Inoltre, A è infinito perché A_2 (che è un suo sottoinsieme) è infinito. Infatti, gli elementi di A_2 sono disposti in ordine strettamente crescente e quindi sono in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ $\{n > 5\}$.

(c) A contiene un unico punto di accumulazione, che è 1. Per dimostrarlo, dobbiamo far vedere che (dalla definizione di punto di accumulazione)

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \bar{n} \text{ tale che } 1 - \epsilon < a_{\bar{n}} < 1 + \epsilon.$$

Fissato $\epsilon > 0$, dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{n-5}{n+3} < 1 + \epsilon \\ \dfrac{n-5}{n+3} > 1 - \epsilon. \end{cases}$$

e trovare come soluzione almeno un valore naturale di n. La prima disequazione è sempre soddisfatta perché $a_n < 1$ per ogni $n > 5$, quindi a maggior ragione vale $a_n < 1 + \epsilon$. Resta la seconda:

$$\frac{n-5}{n+3} > 1 - \epsilon \iff n - 5 > (1-\epsilon)(n+3) \iff n > \frac{3(1-\epsilon)}{\epsilon}.$$

Prendendo come $\bar{n}$ il primo intero maggiore di $3(1-\epsilon)/\epsilon$, otteniamo quello che volevamo. Quindi 1 è punto di accumulazione. Siccome $1 = a_1$, allora 1 appartiene anche a A.

$\square$

Esercizio 3 Siano f, g e h funzioni di leggi

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \ln(1+x).$$

(a) Determinare il dominio di $F := f \circ g \circ h$.

(b) Dimostrare che F è invertibile.

(c) Calcolare la legge di F^{-1}.

(d) Tracciare un grafico di F, specificando le zone di concavità e convessità.

Soluzione. (a) La legge di F è

$$F(x) = e^{\sqrt{\ln(1+x)}}.$$

Il dominio è dato dal sistema

$$\begin{cases} \ln(1+x) \geq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x \geq 0$. Concludiamo che il dominio di F è $\mathscr{D} = [0, +\infty)$.

(b) Le tre funzioni f, g, h sono monotone, dunque lo è anche la loro composizione F. Poiché una funzione strettamente monotona è invertibile, ne segue che F è invertibile.

(c) Per ottenere la legge di F^{-1} invertiamo

$$\begin{aligned} y = e^{\sqrt{\ln(1+x)}} &\iff \sqrt{\ln(1+x)} = \ln(y) \iff \\ \ln(1+x) = (\ln(y))^2 &\iff x = 3^{(\ln(y))^2} - 1. \end{aligned}$$

Ne segue che la legge di F^{-1} è

$$y = e^{(\ln(x))^2} - 1.$$

(d) Abbiamo già calcolato il dominio di F, che è $[0, +\infty)$. Se $x = 0$, abbiamo banalmente che $F(0) = 1$. Inoltre la funzione è ovviamente sempre positiva perché è un'esponenziale. Il limite all'infinito è

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

Abbiamo già notato che la funzione è monotona crescente, perciò non ammetterà alcun massimo o minimo locale. Il minimo assoluto è $F(0) = 1$ e l'estremo superiore è $\sup(f) = +\infty$.

Studiamo la convessità di F calcolando la derivata seconda. Abbiamo che

$$F'(x) = e^{\sqrt{\ln(1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}} \cdot \frac{1}{1+x}$$

e

$$\begin{aligned} F''(x) =& e^{\sqrt{\ln(1+x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}} \cdot \frac{1}{1+x} \right)^2 + \\ & e^{\sqrt{\ln(1+x}} \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\ln^3(1+x)}} \cdot \frac{1}{1+x} \right) \cdot \frac{1}{1+x} + \\ & e^{\sqrt{\ln(1+x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{(1+x)^2} \right) = \\ & \frac{e^{\sqrt{\ln(1+x}}}{2\sqrt{\ln(1+x)}(1+x)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{\ln(1+x)} - 1 - \ln(1+x)}{2\sqrt{\ln^3(1+x)}} \right) \end{aligned}$$

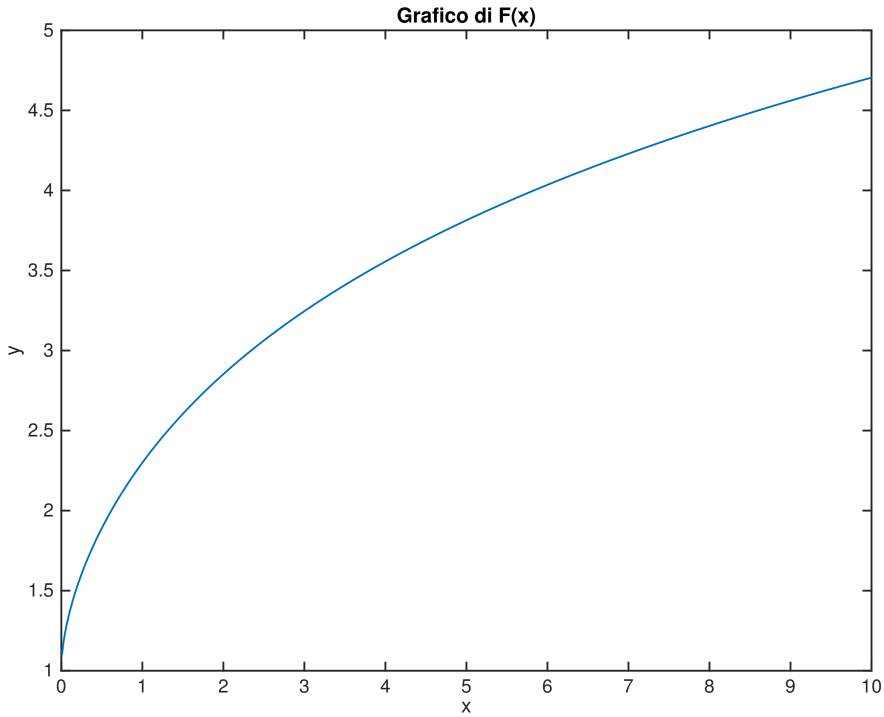

Figura 1: Grafico della funzione $F(x) = e^{\sqrt{\ln(1+x)}}$.

Il segno di F'' è dato dal segno di $\sqrt{\ln(1+x)} - 1 - \ln(1+x)$. Osserviamo che nel nostro dominio $\ln(1+x) \geq 0$. Poniamo $\ln(1+x) = y$ e otteniamo $\sqrt{\ln(1+x)} - 1 - \ln(1+x) = \sqrt{y} - 1 - y$. Risolvendo

$$\sqrt{y} - 1 - y > 0 \iff \sqrt{y} > 1 + y \iff y^2 > 1 + 2y + y^2 \iff y < -\frac{1}{2},$$

perciò, poiché abbiamo già osservato che $y \geq 0$, abbiamo che $\sqrt{\ln(1+x)} - 1 - \ln(1+x) < 0$ per ogni $x \in \mathscr{D}$ e quindi F è concava. In figura 1 si trova il grafico di F.

$\square$

Esercizio 4 Considera la funzione di legge

$$f(x) = \frac{|x| - x}{2}$$

e sia $\mathscr{D}$ il suo dominio. Dire, motivando opportunamente la risposta:

(a) se f è continua in $\mathscr{D}$;

(b) se f è strettamente monotona in $\mathscr{D}$;

(c) se f è invertibile;

(d) qual è $\operatorname{Im} f$.

Soluzione. (a) La funzione si scrive esplicitamente come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ -x & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Il dominio di f è $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ricordiamo che una funzione è continua nel suo dominio se è continua in tutti i punti del suo dominio. Innanzitutto, la funzione è continua separatamente sui due intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$. Resta da controllare la continuità in $x_0 = 0$. Ricordiamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Calcoliamo ciascuna delle tre precedenti quantità:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0 \\ &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0 \\ &f(0) = 0. \end{aligned}$$

Ne consegue che f è continua anche in $x_0 = 0$ e dunque è continua su tutto $\mathbb{R}$.

(b) f non è strettamente monotona in $\mathscr{D}$ perché in $[0, +\infty)$ è costantemente 0.

(c) f non è invertibile perché la funzione non è iniettiva: ad esempio, $f(0) = f(1) = 0$.

(d) L'immagine di f è $[0, +\infty)$: per ogni $y \geq 0$ riusciamo a trovare una controimmagine x: basta prendere $x = -y$. Al contrario, se scegliamo $y < 0$, questo non ha una controimmagine (dovrebbe essere $x = -y$, da cui $x > 0$, ma per $x > 0$ la funzione è identicamente nulla). □

Esercizio 5 Si calcoli il seguente integrale definito:

$$\int_3^4 \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

Soluzione. Si tratta di calcolare l'integrale di una funzione razionale fratta. Scomponiamola in fratti semplici cercando costanti A, B, C tali che

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Riducendo a fattor comune a destra si ottiene

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{x^2(A+B+C) + x(-3A-2B-C) + 2A}{x(x-1)(x-2)},$$

che ci porta a risolvere il sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -3A - 2B - C = 1 \\ 2A = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\dfrac{3}{2} \\ B = 2 \\ C = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Ne segue che l'integrale si riduce a

$$\int_3^4 \left(-\frac{3}{2x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-2)}\right) dx = -\frac{3}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x-2|\Bigg|_3^4 =$$
$$-\frac{3}{2}\ln 4 + 2\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \left(-\frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1\right) =$$
$$-\frac{3}{2}\ln 4 + \frac{7}{2}\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 2.$$

$\square$