Primo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

3 Novembre 2014

Fila A

Esercizio 1 Si considerino le funzioni di leggi $f(x) = \arccos(x)$ e $g(x) = \log_2 x$.

(a) Si determini la legge di $h = f \circ g$ e se ne calcoli dominio e immagine.

(b) Dimostrare che h è invertibile e determinare la legge di h^{-1} e il suo dominio.

(c) h^{-1} è monotona?

Soluzione. (a) La legge di h è
$$h(x) = \arccos(\log_2 x).$$
Il dominio è dato dalla soluzione del seguente sistema:
$$\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \log_2 x \leq 1, \end{cases}$$
che è equivalente a
$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq -1. \end{cases}$$
La soluzione di $\log_2 x \leq 1$ è $x \leq 2$, mentre la soluzione di $\log_2 x \geq -1$ è $x \geq \frac{1}{2}$; il sistema è, dunque,
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$
che ha soluzione $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, cioè
$$\operatorname{dom} h = \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$
Per calcolare l'immagine di h innanzitutto osserviamo che la funzione $\arccos y$ è compresa tra 0 e π, quindi $\operatorname{dom} h \subseteq [0, \pi]$. Sia, quindi, $y \in [0, \pi]$ e risolviamo l'equazione $h(x) = y$; se riusciamo a trovare una soluzione, possiamo concludere che $\operatorname{Im} h = [0, \pi]$. Abbiamo:
$$y = h(x) \iff y = \arccos(\log_2 x) \iff \cos y = \log_2 x \iff x = 2^{\cos y},$$
che esiste per ogni $y \in [0, \pi]$, dunque $\operatorname{Im} h = [0, \pi]$.

(b) Poiché f e g sono due funzioni strettamente monotone, allora anche la loro composizione è strettamente monotona. Per un teorema noto, ne segue che h è invertibile. Determiniamo la legge di h^{-1} con passaggi analoghi al calcolo dell'immagine:

$$y = \arccos(\log_2 x) \iff \log_2 x = \cos y \iff x = 2^{\cos y},$$

da cui

$$h^{-1}(y) = 2^{\cos y}. \tag{1}$$

Il dominio di h^{-1} è uguale all'immagine[1] di h, cioè $\operatorname{dom} h^{-1} = [0, \pi]$.

(c) Sì: lo stesso teorema che assicura l'invertibilità di h implica anche che h^{-1} è monotona. □

Esercizio 2 Siano f, g funzioni tali che $g \circ f$ è iniettiva. Dimostrare che f è iniettiva.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che f non sia iniettiva. Allora esisterebbero $x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Ma allora avremmo che anche $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, il che è impossibile perché $g \circ f$ è iniettiva. □

Esercizio 3 Si considerino gli insiemi

$$A = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = [3, 4];$$

(a) Si determinino inf e sup di A, specificando se ammette massimo e/o minimo;

(b) Si determinino inf e sup di $A \cup B$, specificando se ammette massimo e/o minimo;

(c) Determinare i punti di accumulazione di $A \cup B$.

Soluzione. (a) Sia $a_n = \dfrac{n^2+2}{n^2+1}$. Dimostriamo che gli elementi di A sono disposti in modo decrescente: imponiamo che $a_{n+1} \leq a_n$ e verifichiamo che tale disuguaglianza è verificata per ogni valore di n naturale.

$$a_{n+1} \leq a_n \iff (n^2 + 2n + 1 + 2)(n^2 + 1) \leq (n^2 + 2)(n^2 + 2n + 1 + 1) \iff 2n + 1 \geq 0,$$

per cui concludiamo che gli a_n sono decrescenti. Possiamo immediatamente dire che il massimo di A è il primo elemento dell'insieme, cioè $a_0 = \dfrac{0+2}{0+1} = 2$.

Per quanto riguarda l'estremo inferiore, osserviamo che

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} = \frac{n^2+1+1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{n^2+1},$$

quindi ipotizziamo che $\inf A = 1$. Dimostriamolo:

[1] Si faccia attenzione a non concludere da (2) che $\operatorname{dom} h^{-1} = \mathbb{R}$: nell'invertire la funzione arcocoseno, dobbiamo supporre che y sia compreso tra 0 e π, altrimenti l'uguaglianza $y = \arccos(\log_2 x)$ non avrebbe senso.

minorante per mostrare che è un minorante basta far vedere che $a_n \geq 1$ per ogni n naturale:

$$a_n \geq 1 \iff \frac{n^2+2}{n^2+1} \geq 1 \iff \frac{n^2+2-n^2-1}{n^2+1} \geq 0 \iff \frac{1}{n^2+1} \geq 0 \iff 1 \geq 0,$$

quindi $a_n \geq 1$ è vera sempre;

massimo dei minoranti per mostrare che è il massimo dei minoranti basta far vedere che $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \bar{n} \mid a_{\bar{n}} \leq 1 + \epsilon$. Risolviamo la disequazione $a_n \leq 1 + \epsilon$ e, se troviamo (almeno) una soluzione, abbiamo finito.

$$a_n \leq 1+\epsilon \iff \frac{n^2+2}{n^2+1} \leq 1+\epsilon \iff \frac{n^2+2-n^2-1-\epsilon n^2-\epsilon}{n^2+1} \leq 0$$

$$\frac{1-\epsilon-\epsilon n^2}{n^2+1} \leq 0 \iff \epsilon n^2 + \epsilon - 1 \geq 0.$$

L'ultima disequazione ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \epsilon \geq 1 \\ n \geq \sqrt{\dfrac{1-\epsilon}{\epsilon}} & \epsilon < 1, \end{cases}$$

ma in ogni caso almeno una soluzione naturale esiste, dunque concludiamo che 1 è il massimo dei minoranti e cioè $\inf A = 1$.

L'elemento 1 non è un minimo perché non appartiene a A: non esiste alcun n tale che $a_n = 1$:

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} = 1 \iff n^2+2 = n^2+1 \iff 2 = 1,$$

che ovviamente è impossibile.

(b) Osserviamo che A e B sono disgiunti, inoltre $x \geq y$ per ogni $x \in B, y \in A$. Concludiamo che $\inf(A \cup B) = \inf A = 1$, mentre $\sup(A \cup B) = \sup(B)$, che si vede facilmente essere uguale a 4, visto che è un intervallo. Inoltre 4 è anche un massimo, visto che $4 \in B$. $A \cup B$ non ammette invece minimo, visto che $1 \notin A$.

(b) Visto che A e B sono disgiunti, l'insieme dei punti di accumulazione di $A \cup B$ è l'unione dell'insieme dei punti di accumulazione di A e dei punti di accumulazione di B. Essendo B un intervallo chiuso, l'insieme dei suoi punti di accumulazione è B stesso. L'insieme A, invece ha come unico punto di accumulazione il suo estremo inferiore 1: infatti, tutti i suoi punti sono isolati[2]. Dimostriamo che 1 è di accumulazione per A: per definizione, basta far vedere che ogni intorno $U(1, \delta)$ contiene almeno un elemento di A. Fissiamo $\delta > 0$, cerchiamo un elemento $a_n \in U(1, \delta)$, cioè tale che $a_n \leq 1 + \delta$. Si vede dal punto (b) che tale disequazione ha sempre una soluzione, dunque 1 è di accumulazione.

Concludiamo che l'insieme dei punti di accumulazione di $A \cup B$ è $B \cup \{1\}$.

□

Esercizio 4 Si calcoli il limite seguente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x - \sin(2x)}{\ln(1 + \sin x)}$$

[2]Per ogni elemento a_n, l'intorno di centro a_n e la metà del minimo tra $\delta_1 = a_n - a_{n+1}$ e $\delta_2 = a_{n-1} - a_n$ è un intorno che non contiene alcun elemento di A se non a_n stesso.

Soluzione. Possiamo riscrivere la funzione di cui calcolare il limite in modo da evidenziare alcuni limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - \sin(2x)}{\ln(1+\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan^2 x - \sin(2x)}{\sin x}}{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan^2 x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}}{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}.$$

Si osservi che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \tan x = 1 \cdot 0 = 0.$$

Concludiamo che il limite è pari a $\dfrac{0 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{1} = -2$. □

Primo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

3 Novembre 2014

Fila B

Esercizio 1 Si considerino le funzioni di leggi $f(x) = \arcsin(x)$ e $g(x) = \log_3 x$.

(a) Si determini la legge di $h = f \circ g$ e se ne calcoli dominio e immagine.

(b) Dimostrare che h è invertibile e determinare la legge di h^{-1} e il suo dominio.

(c) h^{-1} è monotona?

Soluzione. (a) La legge di h è

$$h(x) = \arcsin(\log_3 x).$$

Il dominio è dato dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ -1 \le \log_3 x \le 1, \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \le 1 \\ \log_3 x \ge -1. \end{cases}$$

La soluzione di $\log_3 x \le 1$ è $x \le 3$, mentre la soluzione di $\log_3 x \ge -1$ è $x \ge \frac{1}{3}$; il sistema è, dunque,

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \le 3 \\ x \ge \frac{1}{3}, \end{cases}$$

che ha soluzione $\frac{1}{3} \le x \le 3$, cioè

$$\operatorname{dom} h = \left[\frac{1}{3}, 3\right].$$

Per calcolare l'immagine di h innanzitutto osserviamo che la funzione $\arcsin y$ è compresa tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, quindi $\operatorname{dom} h \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$. Sia, quindi, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ e risolviamo l'equazione $h(x) = y$; se riusciamo a trovare una soluzione, possiamo concludere che $\operatorname{Im} h = [-\pi/2, \pi/2]$. Abbiamo:

$$y = h(x) \iff y = \arcsin(\log_3 x) \iff \sin y = \log_3 x \iff x = 3^{\sin y},$$

che esiste per ogni $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, dunque $\operatorname{Im} h = [-\pi/2, \pi/2]$.

(b) Poiché f e g sono due funzioni strettamente monotone, allora anche la loro composizione è strettamente monotona. Per un teorema noto, ne segue che h è invertibile. Determiniamo la legge di h^{-1} con passaggi analoghi al calcolo dell'immagine:

$$y = \arcsin(\log_3 x) \iff \log_3 x = \sin y \iff x = 3^{\sin y},$$

da cui

$$h^{-1}(y) = 3^{\sin y}. \tag{2}$$

Il dominio di h^{-1} è uguale all'immagine[3] di h, cioè $\operatorname{dom} h^{-1} = [-\pi/2, \pi/2]$.

(c) Sì: lo stesso teorema che assicura l'invertibilità di h implica anche che h^{-1} è monotona.

□

Esercizio 2 Siano f, g funzioni tali che $g \circ f$ è iniettiva. Dimostrare che f è iniettiva.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che f non sia iniettiva. Allora esisterebbero $x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Ma allora avremmo che anche $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, il che è impossibile perché $g \circ f$ è iniettiva. □

Esercizio 3 Si considerino gli insiemi

$$A = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = [-3, -2];$$

(a) Si determinino inf e sup di A, specificando se ammette massimo e/o minimo;

(b) Si determinino inf e sup di $A \cup B$, specificando se ammette massimo e/o minimo;

(c) Determinare i punti di accumulazione di $A \cup B$.

Soluzione. (a) Sia $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$. Dimostriamo che gli elementi di A sono disposti in modo crescente: imponiamo che $a_{n+1} \geq a_n$ e verifichiamo che tale disuguaglianza è verificata per ogni valore di n naturale.

$$a_{n+1} \geq a_n \iff (n^2 + 2n + 1 - 1)(n^2 + 1) \geq (n^2 - 1)(n^2 + 2n + 1 + 1) \iff 4n + 2 \geq 0,$$

per cui concludiamo che gli a_n sono crescenti. Possiamo immediatamente dire che il minimo di A è il primo elemento dell'insieme, cioè $a_0 = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$.

Per quanto riguarda l'estremo superiore, osserviamo che

$$\frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{n^2+1-1-1}{n^2+1} = 1 - \frac{2}{n^2+1},$$

quindi ipotizziamo che $\sup A = 1$. Dimostriamolo:

[3] Si faccia attenzione a non concludere da (2) che $\operatorname{dom} h^{-1} = \mathbb{R}$: nell'invertire la funzione arcoseno, dobbiamo supporre che y sia compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, altrimenti l'uguaglianza $y = \arcsin(\log_3 x)$ non avrebbe senso.

maggiorante per mostrare che è un minorante basta far vedere che $a_n \leq 1$ per ogni n naturale:

$$a_n \leq 1 \iff \frac{n^2-1}{n^2+1} \leq 1 \iff \frac{n^2-1-n^2-1}{n^2+1} \leq 0 \iff \frac{-2}{n^2+1} \leq 0 \iff -2 \leq 0,$$

quindi $a_n \leq 1$ è vera sempre;

minimo dei maggioranti per mostrare che è il minimo dei maggioranti basta far vedere che $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \bar{n} \mid a_{\bar{n}} \geq 1-\epsilon$. Risolviamo la disequazione $a_n \geq 1-\epsilon$ e, se troviamo (almeno) una soluzione, abbiamo finito.

$$a_n \geq 1-\epsilon \iff \frac{n^2-1}{n^2+1} \geq 1-\epsilon \iff \frac{n^2-1-n^2-1+\epsilon n^2+\epsilon}{n^2+1} \geq 0$$
$$\frac{\epsilon n^2+\epsilon-2}{n^2+1} \geq 0 \iff \epsilon n^2+\epsilon-2 \geq 0.$$

L'ultima disequazione ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \epsilon \geq 2 \\ n \geq \sqrt{\dfrac{2-\epsilon}{\epsilon}} & \epsilon < 2, \end{cases}$$

ma in ogni caso almeno una soluzione naturale esiste, dunque concludiamo che 1 è il minimo dei maggioranti e cioè $\sup A = 1$.

L'elemento 1 non è un massimo perché non appartiene a A: non esiste alcun n tale che $a_n = 1$:

$$\frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \iff n^2-1 = n^2+1 \iff -1 = 1,$$

che ovviamente è impossibile.

(b) Osserviamo che A e B sono disgiunti, inoltre $x \leq y$ per ogni $x \in B, y \in A$. Concludiamo che $\sup(A \cup B) = \sup A = 1$, mentre $\inf(A \cup B) = \inf B$, che si vede facilmente essere uguale a -2, visto che è un intervallo. Inoltre -2 è anche un massimo, visto che $-2 \in B$. $A \cup B$ non ammette invece massimo, visto che $1 \notin A$.

(b) Visto che A e B sono disgiunti, l'insieme dei punti di accumulazione di $A \cup B$ è l'unione dell'insieme dei punti di accumulazione di A e dei punti di accumulazione di B. Essendo B un intervallo chiuso, l'insieme dei suoi punti di accumulazione è B stesso. L'insieme A, invece, ha come unico punto di accumulazione il suo estremo superiore 1: infatti, tutti i suoi punti sono isolati[4]. Dimostriamo che 1 è di accumulazione per A: per definizione, basta far vedere che ogni intorno $U(1,\delta)$ contiene almeno un elemento di A. Fissiamo $\delta > 0$, cerchiamo un elemento $a_n \in U(1,\delta)$, cioè tale che $a_n \geq 1-\delta$. Si vede dal punto (b) che tale disequazione ha sempre una soluzione, dunque 1 è di accumulazione.

Concludiamo che l'insieme dei punti di accumulazione di $A \cup B$ è dato da $B \cup \{1\}$.

□

Esercizio 4 Si calcoli il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(2x)+\tan^2 x}$$

[4]Per ogni elemento a_n, l'intorno di centro a_n e la metà del minimo tra $\delta_1 = a_{n+1} - a_n$ e $\delta_2 = a_n - a_{n-1}$ è un intorno che non contiene alcun elemento di A se non a_n stesso.

Soluzione. Possiamo riscrivere la funzione di cui calcolare il limite in modo da evidenziare alcuni limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(2x)+\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}{\frac{\sin(2x)+\tan^2 x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}{\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}+\frac{\tan^2 x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}}.$$

Si osservi che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}\cdot \tan x = 1\cdot 0 = 0.$$

Concludiamo che il limite è pari a $\dfrac{1}{2\cdot 1+0\cdot 1} = \dfrac{1}{2}$. $\square$