Secondo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

17 Dicembre 2014

Fila A

Soluzioni

Esercizio 1 Considera la funzione di legge

$$f(x) = \frac{x + |x| + 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

(i) Calcolane il dominio, gli zeri e il segno.

(ii) Calcola le equazioni degli eventuali asintoti.

(iii) f è continua in $x = 0$? È derivabile in $x = 0$?

(iv) Calcola $\sup f$ e $\inf f$.

(v) Disegna un grafico qualitativo della funzione specificando gli intervalli di monotonia e di convessità.

(vi) Calcola

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

Soluzione. (i) Riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{(x-1)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 0. \end{cases}$$

Il dominio è dato da $(x-1)^2 \neq 0$, cioè $\operatorname{dom} f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Se $x \geq 0$ la funzione è data da $\frac{2x+1}{(x-1)^2}$, per cui gli zeri in $[0, +\infty)$ sono le soluzioni di

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = 0 \iff x = -\frac{1}{2},$$

ma poiché non appartiene a $[0, +\infty)$, non è da considerare. Nell'intervallo $(-\infty, 0)$, gli zeri sono dati da

$$\frac{1}{(x-1)^2} = 0,$$

che non ha soluzioni. Concludiamo che la funzione non ha zeri.

Veniamo al segno: in $[0, +\infty)$ il segno è dato da

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} > 0 \iff x > -\frac{1}{2},$$

quindi in $[0, +\infty)$ la funzione è sempre positiva. In $(-\infty, 0)$ la funzione è data da

$$\frac{1}{(x-1)^2} > 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R},$$

quindi in $(-\infty, 0)$ la funzione è sempre positiva. Concludiamo che la funzione è sempre positiva in ogni punto del suo dominio.

(ii) Per calcolare le equazioni degli asintoti, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 1-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1+} f(x) \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Abbiamo che

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{(x-1)^2} = +\infty,$$

quindi la funzione ammette un asintoto verticale di equazione $x = 1$; inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{(x-1)^2} = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale destro, e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0,$$

perciò $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro.

(iii) Per verificare se f è continua in $x = 0$, dobbiamo verificare che

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0).$$

Poiché

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2x+1}{(x-1)^2} = 1, \\ &\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{(x-1)^2} = 1, \\ &f(0) = 1, \end{aligned}$$

allora concludiamo che f è continua in 0. Per verificare che f sia derivabile in 0, deve essere che

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = f'(0).$$

Calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x+4}{(x-1)^3} & x \geq 0 \\ -\frac{2}{(x-1)^3} & x < 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} -\frac{2x+4}{(x-1)^3} = 4, \\ &\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -\frac{2}{(x-1)^2} = 2, \\ &f(0) = 4, \end{aligned}$$

allora la funzione non è derivabile in $x = 0$.

(iv) Abbiamo visto che $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Concludiamo che $\inf f = 0$. Inoltre, poiché $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, allora $\sup f = +\infty$.

(v) Studiamo il segno della derivata prima: se $x < 0$ la derivata è $-2/(x-1)^3$, per cui la funzione in tale intervallo è monotona crescente se

$$-\frac{2}{(x-1)^3} > 0 \iff x < 1,$$

quindi in $(-\infty, 0)$ la funzione è monotona crescente. Se $x \geq 0$ la monotonia è data da

$$-\frac{2x+4}{(x-1)^3} > 0 \iff -2 < x < 1,$$

e quindi la funzione è crescente se $x \in [0,1)$ e decrescente se $x \in (1, +\infty)$. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4x+14}{(x-1)^4} & x \geq 0 \\ \frac{6}{(x-1)^4} & x < 0. \end{cases}$$

nell'intervallo $(0, +\infty)$, la funzione è convessa se

$$\frac{4x+14}{(x-1)^4} > 0 \iff x > -\frac{7}{2},$$

quindi è convessa su tutto l'intervallo; nell'intervallo $(-\infty, 0)$ invece la derivata è

$$\frac{6}{(x-1)^4} > 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R},$$

dunque è convessa su tutto l'intervallo. Concludiamo che la funzione è convessa per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Poiché la funzione non è derivabile in $x = 0$, allora non può essere né concava né convessa.

(vi) Poiché in $(-1, 0)$ la funzione è data da $\frac{1}{(x-1)^2}$, allora

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x-1}\Big|_{-1}^{0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 2 Considera la funzione di legge

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - 10x.$$

(i) Dimostra che ammette almeno un punto stazionario x_0 e individua un intervallo $[a, b]$ tale $x_0 \in [a, b]$.

(ii) Dimostra che non ammette altri punti stazionari.

(iii) Dimostra che x_0 è un punto di minimo. $f(x_0)$ è minimo assoluto?

Soluzione. (i) I punti stazionari di f sono gli zeri della derivata. Poiché $f'(x) = 4x^3 + 8x - 10$, abbiamo che i punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione

$$4x^3 + 8x - 10 = 0.$$

Si vede facilmente che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$; inoltre f' è continua su tutto $\mathbb{R}$, dunque per il teorema degli zeri f' ammette almeno uno zero, perciò f ammette almeno un punto stazionario. Per individuare $[a, b]$, basta trovare a, b tali che $f'(a)f'(b) < 0$. Poiché $f'(0) = -10$ e $f'(1) = 2$, allora $x_0 \in [0, 1]$.

(ii) Calcolando la derivata seconda, si osserva che $f''(x) = 12x^2 + 8$, dunque è sempre positiva. Ne segue che la derivata è una funzione sempre crescente, perciò non può ammettere più di uno zero. Concludiamo che f' ammette un solo zero e perciò f un unico punto stazionario.

(iii) Poiché f è convessa, in particolare lo è nel punto stazionario, dunque x_0 è punto di minimo locale. È anche punto di minimo assoluto perché se non lo fosse allora i casi sarebbero due: non esiste punto di minimo assoluto, ma per continuità questo non è possibile; il minimo assoluto è un altro, ma siccome f è derivabile sempre allora il punto di minimo assoluto dovrebbe essere un punto stazionario, il che è assurdo, perché il punto stazionario è unico. $\square$

Esercizio 3 Risolvi i seguenti integrali:

$$\int \frac{\arctan^2 x + 3x}{1 + x^2} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x}} \mathrm{d}x$$

Soluzione. Il primo integrale è

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan^2 x + 3x}{1 + x^2} \mathrm{d}x &= \int \frac{\arctan^2 x}{1 + x^2} \mathrm{d}x + \int \frac{3x}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\arctan^3 x}{3} + 3 \int \frac{1}{2} \frac{2x}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\arctan^3 x}{3} + \frac{3}{2} \ln(1 + x^2) + c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale si può risolvere per sostituzione ponendo $\sqrt[3]{1 + x} = t$; calcoliamo il $\mathrm{d}t$:

$$1 + x = t^3 \iff x = t^3 - 1 \iff \mathrm{d}x = 3t^2 \mathrm{d}t.$$

Sostituendo,

$$\int \frac{t^3 - 1}{t} \cdot 3t^2 \mathrm{d}t = 3 \int t(t^3 - 1) \mathrm{d}t = \frac{3}{5} t^5 - \frac{3}{2} t^2 + c = \frac{3}{5} \sqrt[3]{(x + 1)^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x + 1)^2} + c.$$

Si poteva risolvere anche con integrazione per parti, che porta ad ottenere una primitiva diversa nella forma, ma equivalente. $\square$

Secondo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

17 Dicembre 2014

Fila B

Soluzioni

Esercizio 1 Considera la funzione di legge

$$f(x) = \frac{x + |x| + 3}{x^2 - 4x + 4}.$$

(i) Calcolane il dominio, gli zeri e il segno.

(ii) Calcola le equazioni degli eventuali asintoti.

(iii) f è continua in $x = 0$? È derivabile in $x = 0$?

(iv) Calcola $\sup f$ e $\inf f$.

(v) Disegna un grafico qualitativo della funzione specificando gli intervalli di monotonia e di convessità.

(vi) Calcola

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

Soluzione. (i) Riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{(x-2)^2} & x \geq 0 \\ \frac{3}{(x-2)^2} & x < 0. \end{cases}$$

Il dominio è dato da $(x-2)^2 \neq 0$, cioè $\operatorname{dom} f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Se $x \geq 0$ la funzione è data da $\frac{2x+3}{(x-2)^2}$, per cui gli zeri in $[0, +\infty)$ sono le soluzioni di

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2} = 0 \iff x = -\frac{3}{2},$$

ma poiché non appartiene a $[0, +\infty)$, non è da considerare. Nell'intervallo $(-\infty, 0)$, gli zeri sono dati da

$$\frac{3}{(x-2)^2} = 0,$$

che non ha soluzioni. Concludiamo che la funzione non ha zeri.

Veniamo al segno: in $[0, +\infty)$ il segno è dato da

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2} > 0 \iff x > -\frac{3}{2},$$

quindi in $[0, +\infty)$ la funzione è sempre positiva. In $(-\infty, 0)$ la funzione è data da

$$\frac{3}{(x-2)^2} > 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R},$$

quindi in $(-\infty, 0)$ la funzione è sempre positiva. Concludiamo che la funzione è sempre positiva in ogni punto del suo dominio.

(ii) Per calcolare le equazioni degli asintoti, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 2-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2+} f(x) \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Abbiamo che

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{(x-2)^2} = +\infty,$$

quindi la funzione ammette un asintoto verticale di equazione $x = 2$; inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{(x-2)^2} = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale destro, e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{(x-2)^2} = 0,$$

perciò $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro.

(iii) Per verificare se f è continua in $x = 0$, dobbiamo verificare che

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0).$$

Poiché

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2x+3}{(x-2)^2} = \frac{3}{4},\\
&\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{3}{4},\\
&f(0) = \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

allora concludiamo che f è continua in 0. Per verificare che f sia derivabile in 0, deve essere che

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = f'(0).$$

Calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x+10}{(x-2)^3} & x \geq 0 \\ -\frac{6}{(x-2)^3} & x < 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} -\frac{2x+10}{(x-2)^3} = \frac{5}{4},\\
&\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -\frac{6}{(x-2)^2} = \frac{3}{4},\\
&f(0) = \frac{5}{4},
\end{aligned}$$

allora la funzione non è derivabile in $x = 0$.

(iv) Abbiamo visto che $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Concludiamo che $\inf f = 0$. Inoltre, poiché $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, allora $\sup f = +\infty$.

(v) Studiamo il segno della derivata prima: se $x < 0$ la derivata è $-6/(x-2)^3$, per cui la funzione in tale intervallo è monotona crescente se

$$-\frac{6}{(x-2)^3} > 0 \iff x < 2,$$

quindi in $(-\infty, 0)$ la funzione è monotona crescente. Se $x \geq 0$ la monotonia è data da

$$-\frac{2x+10}{(x-2)^3} > 0 \iff -5 < x < 2,$$

e quindi la funzione è crescente se $x \in [0, 2)$ e decrescente se $x \in (2, +\infty)$. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4x+16}{(x-2)^4} & x \geq 0 \\ \frac{18}{(x-2)^4} & x < 0. \end{cases}$$

nell'intervallo $(0, +\infty)$, la funzione è convessa se

$$\frac{4x+16}{(x-2)^4} > 0 \iff x > -4,$$

quindi è convessa su tutto l'intervallo; nell'intervallo $(-\infty, 0)$ invece la derivata è

$$\frac{18}{(x-2)^4} > 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R},$$

dunque è convessa su tutto l'intervallo. Concludiamo che la funzione è convessa per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Poiché la funzione non è derivabile in $x = 0$, allora non può essere né concava né convessa.

(vi) Poiché in $(-1, 0)$ la funzione è data da $\frac{3}{(x-2)^2}$, allora

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{3}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{3}{x-2}\bigg|_{-1}^{0} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 2 Considera la funzione di legge

$$f(x) = -x^4 - x^2 + 5x.$$

(i) Dimostra che ammette almeno un punto stazionario x_0 e individua un intervallo $[a, b]$ tale $x_0 \in [a, b]$.

(ii) Dimostra che non ammette altri punti stazionari.

(iii) Dimostra che x_0 è un punto di massimo. $f(x_0)$ è massimo assoluto?

Soluzione. (i) I punti stazionari di f sono gli zeri della derivata. Poiché $f'(x) = -4x^3 - 2x + 5$, abbiamo che i punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione

$$-4x^3 - 2x + 5 = 0.$$

Si vede facilmente che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$; inoltre f' è continua su tutto $\mathbb{R}$, dunque per il teorema degli zeri f' ammette almeno uno zero, perciò f ammette almeno un punto stazionario. Per individuare $[a, b]$, basta trovare a, b tali che $f'(a)f'(b) < 0$. Poiché $f'(0) = 5$ e $f'(1) = -1$, allora $x_0 \in [0, 1]$.

(ii) Calcolando la derivata seconda, si osserva che $f''(x) = -12x^2 - 2$, dunque è sempre negativa. Ne segue che la derivata è una funzione sempre decrescente, perciò non può ammettere più di uno zero. Concludiamo che f' ammette un solo zero e perciò f un unico punto stazionario.

(iii) Poiché f è concava, in particolare lo è nel punto stazionario, dunque x_0 è punto di massimo locale. È anche punto di massimo assoluto perché se non lo fosse allora i casi sarebbero due: non esiste punto di massimo assoluto, ma per continuità questo non è possibile; il massimo assoluto è un altro, ma siccome f è derivabile sempre allora il punto di masimoo assoluto dovrebbe essere un punto stazionario, il che è assurdo, perché il punto stazionario è unico.

□

Esercizio 3 Risolvi i seguenti integrali:

$$\int \frac{\tan^3 x + 3\sin x \cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{x+3}{\sqrt[3]{1-x}} \mathrm{d}x$$

Soluzione. Il primo integrale è

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^3 x + 3\sin x \cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x &= \int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + \int \frac{3\sin x \cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\tan^4 x}{4} + 3 \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\tan^4 x}{4} - 3\ln|\cos x| + c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale si può risolvere per sostituzione ponendo $\sqrt[3]{1-x} = t$; calcoliamo il $\mathrm{d}t$:

$$1 - x = t^3 \iff x = -t^3 + 1 \iff \mathrm{d}x = -3t^2 \mathrm{d}t.$$

Sostituendo,

$$\int \frac{-t^3 + 1 + 3}{t} \cdot (-3t^2)\mathrm{d}t = 3 \int t(t^3 - 4)\mathrm{d}t = \frac{3}{5}t^5 - 6t^2 + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5} - 6\sqrt[3]{(1-x)^2} + c.$$

Si poteva risolvere anche con integrazione per parti, che porta ad ottenere una primitiva diversa nella forma, ma equivalente. □