Primo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

18 Gennaio 2016

Soluzioni

Esercizio 1 Siano z_1 e z_2 due numeri complessi con modulo e argomento rispettivamente (ρ_1, θ_1) e (ρ_2, θ_2) tali che $\rho_2 = \rho_1$ e $\theta_2 = -\theta_1$. Dimostrare che $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ sono numeri reali.

Soluzione. Scriviamo la forma trigonometrica dei numeri complessi z_1, z_2:

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Poiché per ipotesi $\rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 = -\theta_2$, i due numeri diventano:

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = \rho_1(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)).$$

Per le note proprietà di simmetria delle funzioni seno e coseno, abbiamo che $z_2 = \rho_1(\cos(\theta_1) - i\sin(\theta_1))$. Calcoliamo $z_1 + z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \rho_1(\cos(\theta_1) - i\sin(\theta_1)) \\ &= \rho_1\cos\theta_1 + i\rho_1\sin\theta_1 + \rho_1\cos\theta_1 - i\rho_1\sin\theta_1 \\ &= 2\rho_1\cos\theta_1, \end{aligned}$$

che è reale perché non compare l'unità immaginaria.

Calcoliamo $z_1 \cdot z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_1(\cos(\theta_1) - i\sin(\theta_1)) \\ &= \rho_1^2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) \\ &= \rho_1^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = \rho_1^2, \end{aligned}$$

che è reale per la stessa ragione. □

Esercizio 2 Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \geq 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0. \end{cases}$$

Determinarne:

(a) l'insieme di definizione;

(b) l'insieme di continuità;

(c) l'insieme di derivabilità;

(d) gli intervalli di crescenza e decrescenza;

(e) gli intervalli di convessità e concavità;

(f) eventuali asintoti.

Se ne disegni un grafico qualitativo indicando estremo superiore, estremo inferiore, massimi e minimi relativi e assoluti (se esistono).

Soluzione. (a) La funzione è definita per casi, quindi analizziamo il dominio delle due funzioni e^{-x^2} e $1 + e^{\frac{1}{x}}$ separatamente. Per quanto riguarda la prima, il suo dominio è $\mathbb{R}$, per cui dall'intervallo $[0, +\infty)$ in cui la funzione f assume questa espressione non dobbiamo escludere alcun valore. La seconda è definita su tutto $\mathbb{R}$ tranne $x = 0$. Poiché l'intervallo in cui f vale $1 + e^{\frac{1}{x}}$ è $(-\infty, 0)$, che non contiene 0, non dobbiamo escludere alcun valore neanche da questo intervallo[1]. Concludiamo che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

(b) La funzione f è continua separatamente sugli intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ perché ivi è somma e composizione di funzioni continue. Dobbiamo investigare la continuità in $x = 0$. Per far ciò, calcoliamo i limiti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} e^{-x^2} = 1;\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 1 + e^{\frac{1}{x}} = 1 + e^{-\infty} = 1.\end{aligned}$$

Poiché questi due valori sono uguali, e anche $f(0) = 1$, allora la funzione è continua anche in 0 e pertanto concludiamo che l'insieme di continuità di f è $\mathbb{R}$.

(c) Come prima, f è derivabile separatamente su $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ perché in questi due intervalli le funzioni e^{-x^2} e $1 + e^{\frac{1}{x}}$ sono rispettivamente derivabili. Dobbiamo investigare la derivabilità in $x = 0$, quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Prima di tutto calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2} & x > 0 \\ -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & x < 0. \end{cases}$$

I limiti sono:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} -2xe^{-x^2} = 0;\\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} -y^2e^y = \lim_{y\to -\infty} -\frac{y^2}{e^{-y}} = 0,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché e^{-y} è un infinito di ordine superiore a y^2 per $y \to -\infty$. Ne segue che f è derivabile in $x = 0$ e la derivata vale 0.

(d) Studiamo il segno di f'. Per $x \in (0, +\infty)$ la derivata è $-2xe^{-x^2}$. Poiché

$$-2xe^{-x^2} > \iff x < 0,$$

allora ne segue che per $x \in (0, +\infty)$ la funzione è decrescente. Per $x \in (-\infty, 0)$, la derivata è $-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, che è evidentemente negativa. Quindi anche in $(-\infty, 0)$ la funzione è decrescente.

[1] Diverso sarebbe stato il caso in cui f era definita come $1 + e^{\frac{1}{x}}$ su un intervallo contenente 0: in quel caso certamente avremmo dovuto escludere quel valore dal dominio.

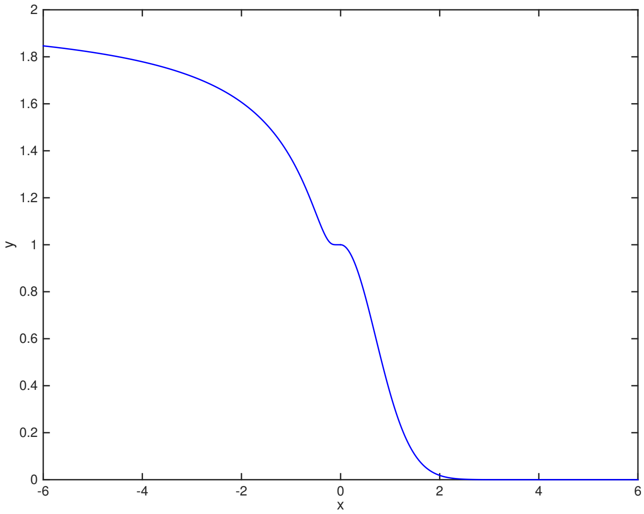

Figura 1: Grafico della funzione $f(x)$ (esercizio 2).

(e) La funzione f è derivabile due volte su $\mathbb{R} \setminus 0$, quindi possiamo calcolarne la derivata:

$$f''(x) = \begin{cases} 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) & x > 0 \\ \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x + 1) & x < 0. \end{cases}$$

Studiamone il segno. Su $(0, +\infty)$,

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) > 0 \iff 2x^2 - 1 > 0 \iff x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

perciò f è convessa in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ e concava su $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Su $(-\infty, 0)$,

$$\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x + 1) > 0 \iff x > -\frac{1}{2},$$

dunque f è convessa su $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e concava su $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

(f) Essendo continua su $\mathbb{R}$, la funzione non ha asintoti verticali. Controlliamo eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0;$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 + e^{\frac{1}{x}} = 1 + e^0 = 2.$$

Concludiamo che f ha come asintoto orizzontale destro $y = 0$ e come asintoto orizzontale sinistro $y = 2$.

In figura 1 c'è un grafico di f. Vale: $\sup f = 2$ e $\inf f = 0$; f non ha massimi e minimi, né relativi né assoluti. $\square$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Soluzione. Chiamiamo $I := \int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx$ e integriamo per parti due volte:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \int \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \left[\frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \int \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} I. \end{aligned}$$

Portando a sinistra il termine in I, si ottiene l'equazione

$$I + \frac{\beta^2}{\alpha^2} I = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Ricavando I,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{\alpha x} \left[\frac{1}{\alpha} \cos(\beta x) + \frac{\beta}{\alpha^2} \sin(\beta x) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{\alpha x} [\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x)]. \end{aligned}$$

□

Esercizio 4 Si consideri il sottoinsieme dei numeri reali

$$A = \left\{ \frac{n-3}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\; n \geq 1 \right\} \cup (-1, 1).$$

(a) Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n-3}{n^2}$ è monotona decrescente per $n \geq 6$;

(b) determinare estremo superiore ed inferiore di A e dire, motivando la risposta, se ammette massimo e/o minimo.

Soluzione. (a) Scrivendo la condizione di decrescenza per la successione a_n,

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq a_n &\iff \frac{n+1-3}{(n+1)^2} \leq \frac{n-3}{n^2} \\ &\iff n^2(n-2) \leq (n-3)(n+1)^2 \\ &\iff n^3 - 2n^2 \leq n^3 + 2n^2 + n - 3n^2 - 6n - 3 \\ &\iff n^2 - 5n - 3 \geq 0. \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 - 5x - 3 \geq 0$, questa ha soluzione

$$x \leq \frac{5 - \sqrt{37}}{2} \vee x \geq \frac{5 + \sqrt{37}}{2}.$$

Riportando la soluzione sui numeri naturali, questa è

$$n \leq -1 \vee n \geq 6.$$

Poiché consideriamo valori di n maggiori o uguali di 1, la soluzione è $n \geq 6$.

(b) Analizziamo prima la successione a_n: essa, per il punto (a) è decrescente per $n \geq 6$ e quindi crescente per $n = 1, \dots, 5$. Osserviamo che $a_1 = -2$ e $a_6 = \frac{1}{18}$. Inoltre $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 6$, per cui la successione a_n è confinata tra -2 e $1/18$:

$$-2 \leq a_n \leq \frac{1}{18}.$$

Unendo a $(-1, 1)$, abbiamo che $-2 \leq x < 1$ per ogni $x \in A$. Ne segue che:

- -2 è minimo perché $-2 \in A$;
- 1 è estremo superiore perché è estremo dell'intervallo $(-1, 1)$ e $a_n < 1$ per ogni n;
- 1 non è massimo perché $1 \notin A$.

$\square$