Secondo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

8 Febbraio 2016

Soluzioni

Esercizio 1 Siano $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 1 - 3i$. Verificare che il numero complesso

$$w = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

è radice dell'equazione $z^2 + 1 = 0$.

Soluzione. Calcoliamo w:

$$w = \frac{3 + i - (1 - 3i)}{3 + i + 1 - 3i} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

Poiché $w^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$, allora w è radice di $z^2 + 1 = 0$. $\square$

Esercizio 2 Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di legge $f(x) = e^{x^3-8}$ è invertibile e calcolare la legge della funzione inversa f^{-1}.

Soluzione. Consideriamo le funzioni $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x - 8$ e $f_3(x) = x^3$ e osserviamo che sono notoriamente tutte funzioni invertibili. Per un noto teorema, anche la loro composizione lo è. Poiché $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, allora f è invertibile. Calcoliamo l'espressione della funzione inversa:

$$y = e^{x^3-8} \iff x^3 - 8 = \ln y \iff x = \sqrt[3]{\ln y + 8}.$$

Pertanto f^{-1} ha legge $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x + 8}$. $\square$

Esercizio 3 Sia $f_\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la famiglia di funzioni definite da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \cos(x-1)}{\log x} & 0 < x < 1 \\ e^{(\alpha-1)x} + \arctan[\alpha(x^2 + 2x - 3)] & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α risulta continua in $(0, +\infty)$.

(b) Per i valori di α di cui al punto (a), dimostrare che è possibile estendere f_α a una funzione continua su $[0, +\infty)$ e esibire l'espressione di tale estensione.

Soluzione. (a) Osserviamo che f_α è continua separatamente su $(0,1)$ e su $(1,+\infty)$ perché in questi intervalli composizione di funzioni continue. Affinché f_α sia continua in tutto $(0,+\infty)$ deve essere continua in $x=1$, per cui deve valere

$$\lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = f_\alpha(1),$$

cioè

$$\lim_{x\to 1^+} e^{(\alpha-1)x} + \arctan[\alpha(x^2+2x-3)] = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-\cos(x-1)}{\log x} = e^{\alpha-1}.$$

Calcoliamo separatamente i limiti:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{(\alpha-1)x} + \arctan[\alpha(x^2+2x-3)] = e^{\alpha-1} + \arctan(0) = e^{\alpha-1}.$$

Per il secondo limite, operiamo la sostituzione $y = x-1$, così il limite diventa:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-\cos(x-1)}{\log x} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sqrt{y+1}-\cos(y)}{\log(y+1)} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sqrt{y+1}-\cos(y)}{y} \cdot \frac{y}{\log(y+1)} =$$
$$\lim_{y\to 0^-} \frac{\sqrt{y+1}-1+1-\cos(y)}{y} \cdot \frac{y}{\log(y+1)} = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{\sqrt{y+1}-1}{y} + \frac{1-\cos(y)}{y}\right) \cdot \frac{y}{\log(y+1)}.$$

Poiché

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{\sqrt{y+1}-1}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{(\sqrt{y+1}-1)(\sqrt{y+1}+1)}{y(\sqrt{y+1}+1)} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{y\to 0^-} \frac{1-\cos(y)}{y} = 0,$$
$$\lim_{y\to 0^-} \frac{y}{\log(y+1)} = 1,$$

allora

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-\cos(x-1)}{\log x} = \left(\frac{1}{2}+0\right) \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Affinché f_α sia continua in $x=1$ deve valere dunque

$$e^{\alpha-1} = \frac{1}{2} \iff \alpha - 1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

da cui $\alpha = 1-\ln 2$.

(b) Sia $\bar\alpha = 1-\ln 2$. Affinché $f_{\bar\alpha}$ sia estendibile a una funzione continua su $[0,+\infty)$ deve essere

$$\lim_{x\to 0^+} f_{\bar\alpha}(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Poiché si verifica immediatamente che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\cos(x-1)}{\log x} = 0,$$

allora possiamo estendere $f_{\bar\alpha}$ a una funzione continua in $[0,+\infty)$ definendo un'altra funzione $\tilde f$ tale che

$$\tilde f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ f_{\bar\alpha}(x) & x > 0. \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 4 Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{3}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid \arctan(x) + x^3 + x + 1 = 0\}.$$

(a) Determinare estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (se esistono) di A.

(b) Determinare estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (se esistono) di $A \cup B$.

Soluzione.

(a) Sia $a_n := \frac{3}{n+1}$. Verifichiamo facilmente che a_n è decrescente. Infatti la diseguaglianza $a_n \geq a_{n+1}$ ha soluzione $n \geq 0$:

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{3}{n+1} \geq \frac{3}{n+2} \iff n+2 \geq n+1 \iff 2 \geq 1.$$

Ne segue che $a_0 = 3$ è il massimo di A. L'estremo inferiore di A è invece 0: è ovviamente un minorante, visto che a_n è a termini positivi; inoltre è il massimo dei minoranti: per ogni $\epsilon > 0$ troviamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} < \epsilon$:

$$a_{\bar{n}} < \epsilon \iff \frac{3}{\bar{n}+1} < \epsilon \iff \bar{n} > \frac{3}{\epsilon} - 1.$$

(b) Studiamo l'insieme B: esso è formato da tutte le radici dell'equazione $\arctan(x)+x^3+x+1 = 0$, cioè B è l'insieme degli zeri di $f(x) = \arctan(x) + x^3 + x + 1$. Verifichiamo che è non vuoto: poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) + x^3 + x + 1 = \frac{\pi}{2} + \infty = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) + x^3 + x + 1 = -\frac{\pi}{2} - \infty = -\infty,$$

allora prendendo M abbastanza grande si ha che $f(M) \cdot f(-M) < 0$. Tale condizione, unita al fatto che f è continua, rende soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri per f, quindi B ha almeno un elemento. Dimostriamo che tale elemento è unico: calcolando la derivata di f,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 + 1 = \frac{1 + (3x^2+1)(x^2+1)}{x^2+1} > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

pertanto f è monotona crescente. Ne segue che f non può avere due zeri e pertanto B è formato da un unico elemento x^*. Troviamo un intervallo $[a, b]$ tale che $x^* \in [a, b]$: si verifica che $f(0) = \arctan(0) + 1 = 1$ e $f(-1) = \arctan(-1) - 1 - 1 + 1 = -\sqrt{2} - 1$. Abbiamo quindi che $f(-1) \cdot f(0) < 0$, perciò ancora per il teorema degli zeri $x^* \in (-1, 0)$.

Tornando alla domanda originaria, poiché $A \cup B = A \cup \{x^*\}$ e $x^* \in (-1, 0)$, abbiamo che $\max(A \cup B) = \max(A) = 3$ e $\min(A \cup B) = x^*$ perché $x^* < \inf(A) = 0$. $\square$

Esercizio 5 Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{|x+1| - 1}{x(x+3)} \mathrm{d}x.$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1, \end{cases}$$

pertanto la funzione integranda si riscrive come

$$\frac{|x+1|-1}{x(x+3)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & x \geq -1 \\ \dfrac{-x-2}{x(x+3)} & x < -1, \end{cases}$$

per cui l'integrale è:

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{|x+1|-1}{x(x+3)} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \frac{-x-2}{x(x+3)} \mathrm{d}x + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x+3} \mathrm{d}x.$$

Risolviamo separatamente i due integrali.

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x+3} \mathrm{d}x = \ln|x+3| \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{5}{2}\right) - \ln(2) = \ln 5 - 2\ln 2.$$

Per il secondo, invece, scomponiamo la frazione

$$\frac{x+2}{x(x+3)}$$

in fratti semplici (abbiamo portato fuori dal segno di integrale il segno $-$):

$$\frac{x+2}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \iff \frac{x+2}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)} \iff$$
$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A=2 \end{cases} \iff \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x+2}{x(x+3)} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+3} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x+3| \Big|_{-2}^{-1} =$$
$$\frac{2}{3}\ln 1 + \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 1 = -\frac{1}{3}\ln 2.$$

In definitiva,

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{|x+1|-1}{x(x+3)} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 2 = \ln 5 - \frac{5}{3}\ln 2.$$

□