Esercizio 1. Sia assegnata una terna di riferimento $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Per la curva di equazioni

$$\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\sin\phi \\ z = \frac{p}{2\pi}\phi, \end{cases}$$

dove $R, p \in \mathbb{R}$ sono assegnati, calcolare il triedro intrinseco $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$, il raggio di curvatura e la torsione. Successivamente, si calcolino velocità e accelerazione di un punto P che si muove sulla stessa curva.

Soluzione. La curva assegnata si chiama *elica cilindrica circolare retta a passo p costante.* Osserviamo che R è il raggio del cilindro infinito su cui la curva si avvolge, mentre il parametro p è detto *passo* e rappresenta la differenza in coordinata z di due punti dell'elica, dove il secondo è ottenuto a partire dal primo facendo un giro completo di angolo 2π. In formule, sia

$$P_1 \equiv (R\cos\phi, R\sin\phi, \frac{p}{2\pi}\phi).$$

Il punto P_2 ottenuto incrementando ϕ di un angolo 2π ha coordinate

$$P_2 \equiv (R\cos(\phi + 2\pi), R\sin(\phi + 2\pi), \frac{p}{2\pi}(\phi + 2\pi)) = (R\cos\phi, R\sin(\phi), \frac{p}{2\pi}\phi + p),$$

da cui si vede che i due punti hanno la stessa proiezione sul piano xy (perché le prime due coordinate sono uguali) e le coordinate z differiscono di p.

Passiamo ora a calcolare il triedro intrinseco. Il generico punto della curva è

$$(P - O)(\phi) = R\cos\phi\mathbf{i} + R\sin\phi\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}\phi\mathbf{k},$$

quindi possiamo calcolare il modulo dell'ascissa curvilinea:

$$\begin{aligned} |ds| = |dP| &= |d(R\cos\phi)\mathbf{i} + d(R\sin\phi)\mathbf{j} + d\left(\frac{p}{2\pi}\phi\right)\mathbf{k}| \\ &= | - R\sin\phi d\phi\mathbf{i} + R\cos\phi d\phi\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}d\phi\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}|d\phi|. \end{aligned}$$

Orientando ds secondo la direzione crescente di ϕ, abbiamo:

$$ds = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}d\phi.$$

Ricordando che l'ascissa curvilinea di una circonferenza è $ds = Rd\phi$, osserviamo che $\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}} > R$, quindi la lunghezza di un arco di circonferenza di ampiezza ϕ è sempre minore della lunghezza di un arco di elica cilindrica della stessa ampiezza ϕ.

Calcoliamo il versore tangente:

$$\mathbf{T} = \frac{d(P-O)}{ds} = \frac{d(P-O)}{d\phi}\,\frac{d\phi}{ds} = \frac{(-R\sin\phi\mathbf{i} + R\cos\phi\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}\mathbf{k})}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}.$$

Per esercizio, verificare che $|\mathbf{T}| = 1$. Osserviamo che se indichiamo con ψ l'angolo tra $\mathbf{T}$ e la direzione dell'asse z, si ha che

$$\cos\psi = \mathbf{T}\cdot\mathbf{k} = \frac{\frac{p}{2\pi}}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}},$$

che è costante e maggiore di zero, da cui segue che l'angolo ψ è costante e acuto.

Calcoliamo adesso il versore normale principale $\mathbf{N}$. Per la **prima formula di Frenet-Serret**,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{N},$$

dove ρ è il raggio di curvatura, per cui calcoliamo

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\,\frac{d\phi}{ds} = -\frac{R\cos\phi\mathbf{i} + R\sin\phi\mathbf{j}}{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}},$$

da cui segue che

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{R}{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}$$

e infine

$$\mathbf{N} = -\cos\phi\mathbf{i} - \sin\phi\mathbf{j}.$$

Notiamo che il raggio di curvatura ρ è costante come nel caso della circonferenza e che $\mathbf{N}$ è sempre parallelo al piano xy.

Il versore binormale è dato da

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\wedge\mathbf{N} = \frac{\frac{p}{2\pi}(\sin\phi\mathbf{i} - \cos\phi\mathbf{j}) + R\mathbf{k}}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}},$$

mentre la torsione $1/\tau$ è data dalla **terza formula di Frenet-Serret**:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{N}.$$

Si ha:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{d\phi}\,\frac{d\phi}{ds} = \frac{-\frac{p}{2\pi}}{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\mathbf{N},$$

dunque la torsione è costante e negativa:

$$\tau = -\left(\frac{2\pi R^2}{p} + \frac{p}{2\pi}\right).$$

Supponiamo adesso di avere un punto P che si muove sull'elica cilindrica con traiettoria

$$(P-O)(t) = (R\cos(\phi(t))\mathbf{i} + R\sin(\phi(t))\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}\phi(t)\mathbf{k}).$$

È noto che la velocità in termini del triedro intrinseco è

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{T},$$

dove

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\phi}\,\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\dot{\phi}.$$

L'accelerazione è invece

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{N},$$

dove semplicemente

$$\ddot{s} = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\ddot{\phi}$$

e $\frac{\dot{s}^2}{\rho} = R\dot{\phi}^2$ (dimostralo per esercizio!).

Sempre per esercizio, si calcolino la velocità e l'accelerazione in termini di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ derivando direttamente $P(t) - O$ e si verifichi che $\dot{s}, \ddot{s}$ e $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$ calcolati prima soddisfano le seguenti relazioni:

$$\dot{s} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{T}, \quad \ddot{s} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}, \quad \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N}.$$

Si verifichi infine che $\mathbf{a}\cdot\mathbf{B} = 0$, cioè che l'accelerazione è sempre contenuta nel piano osculatore individuato da $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$. □

Esercizio 2. Verificare che

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\left(\frac{dP}{ds}\wedge\frac{d^2P}{ds^2}\right)\cdot\frac{d^3P}{ds^3},$$

e quindi, ricordando l'interpretazione geometrica del determinante di una matrice, concludere che se $x(s), y(s), z(s)$ sono le componenti di $P - O$, allora

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \\ x'''(s) & y'''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}.$$

(Suggerimento: per dimostrare la prima relazione, nel calcolare la derivata terza, si usi la seconda formula di Frenet-Serret.)