Esercizio 1. Si consideri una lamina quadrata $OACB$ di lato ℓ in moto e sia $O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{k}$ una terna solidale al corpo in cui $\mathbf{u}_1$ è parallelo a $A - O$ e $\mathbf{u}_2$ è parallelo a $B - O$ (vedi figura 1). All'istante t_0 è assegnata la velocità $\mathbf{v}_A$ del punto A, $\mathbf{v}_A = v_0\mathbf{u}_1$. Inoltre, allo stesso istante si sa che la velocità del punto B è parallela a $B - A$ e che la velocità angolare è $\boldsymbol{\omega} = c\mathbf{k}$. Calcolare $\mathbf{v}_B$ e $\boldsymbol{\omega}$.

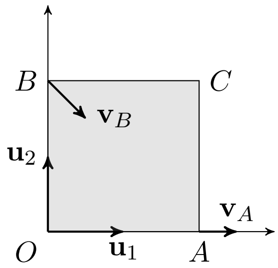

Figura 1: Esercizio 1.

Soluzione. Poiché $\mathbf{v}_B$ è parallelo a $B - A$, possiamo scrivere

$$\mathbf{v}_B = v_1\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \frac{B - A}{|B - A|}.$$

Calcoliamo $\mathbf{u}$: poiché $B - A = (B - O) + (O - A) = \ell\mathbf{u}_2 - \ell\mathbf{u}_1 = -\ell(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$, allora

$$\mathbf{u} = \frac{-\ell(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)}{\ell\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2).$$

Per conoscere $\mathbf{v}_B$ occorre calcolare v_1. A tal scopo, imponiamo la condizione di compatibilità delle velocità:

$$\mathbf{v}_A \cdot (B - A) = \mathbf{v}_B \cdot (B - A),$$

da cui

$$v_0\mathbf{u}_1 \cdot [-\ell(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)] = -\frac{v_1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot [-\ell(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)] \iff -v_0\ell = v_1\ell\sqrt{2} \iff v_1 = -\frac{v_0}{\sqrt{2}},$$

per cui

$$\mathbf{v}_B = \frac{v_0}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2).$$

Per calcolare $\boldsymbol{\omega}$ ricorriamo alla formula fondamentale della cinematica rigida applicata ai punti A e B: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$, da cui

$$\frac{v_0}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = v_0\mathbf{u}_1 + c\mathbf{k} \wedge [-\ell(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)] \iff -\frac{v_0}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = -\ell c(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \iff c = \frac{v_0}{2\ell}.$$

$\square$

Esercizio 2. Dell'esercizio precedente trovare il centro istantaneo del moto D all'istante t_0 e calcolare $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ precedente applicando la formula fondamentale della cinematica rigida ai punti A e D (fig. 2).

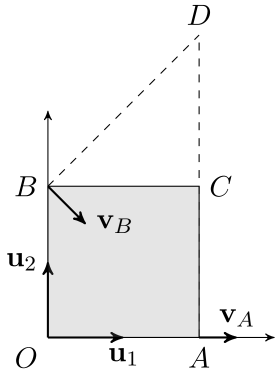

Figura 2: Esercizio 2.