Esercizio 1. Sia $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una terna nello spazio di assi x, y, z, sia $\boldsymbol{\omega} = c\mathbf{k}$ e si consideri il campo vettoriale dato da

$$\mathbf{v}(P) = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).$$

1. Si calcoli la circuitazione di $\mathbf{v}$ lungo la circonferenza di centro O e raggio R nel piano Ox e Oy.

2. Siano $A \equiv (\bar{x}, 0, 0)$, $B \equiv (\bar{x}, \bar{y}, 0)$ e $C \equiv (0, \bar{y}, 0)$ con $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$ e siano γ_1 la curva che descrive il segmento OA, γ_2 la curva che descrive il segmento AB, γ_3 la curva che descrive il segmento OC e γ_4 la curva che descrive il segmento CB. Si calcoli l'integrale di $\mathbf{v}$ lungo $\gamma \equiv \gamma_1 \cup \gamma_2$ e l'integrale di $\mathbf{v}$ lungo $\tilde{\gamma} \equiv \gamma_3 \cup \gamma_4$.

Soluzione. Prima di tutto calcoliamo $\mathbf{v}$ in coordinate della terna assegnata: se $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, allora

$$\mathbf{v} = c\mathbf{k} \wedge (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = c(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

1. La circuitazione di $\mathbf{v}$ lungo una generica curva γ è

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot dP.$$

Poiché $dP = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, allora

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot dP = \oint_\gamma c(-ydx + xdy).$$

Nel nostro caso per $P \in \gamma$, $P(\phi) - O = R\cos\phi\mathbf{i} + R\sin\phi\mathbf{j}$, $\phi \in [0, 2\pi]$, da cui

$$\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\sin\phi \end{cases}, \qquad \begin{cases} dx = -R\sin\phi d\phi \\ dy = R\cos\phi d\phi, \end{cases}$$

perciò

$$\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot dP = c\int_0^{2\pi} R^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)d\phi = 2\pi R^2 c.$$

2. Vogliamo calcolare gli integrali

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot dP \quad \text{e} \quad \int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{v} \cdot dP.$$

Il primo integrale è dato da

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot dP = \int_{\gamma_1} \mathbf{v} \cdot dP + \int_{\gamma_2} \mathbf{v} \cdot dP.$$

Parametrizziamo le curve γ_1 e γ_2: si ha per $P_1 \in \gamma_1$ e $P_2 \in \gamma_2$

$$\begin{aligned} &P_1(x, y, z) - O = x\mathbf{i}, && x \in [0, \bar{x}] \\ &P_2(x, y, z) - O = \bar{x}\mathbf{i} + y\mathbf{j}, && y \in [0, \bar{y}]. \end{aligned}$$

Osservando che per γ_1 abbiamo $y \equiv 0 \Longrightarrow dy \equiv 0$,

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{v} \cdot dP = c \int_{(0,0,0)}^{(\bar{x},0,0)} (-ydx + xdy) = 0.$$

Per γ_2 invece $dx \equiv 0$ (perché la componente x è costante), per cui

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot dP = \int_{\gamma_2} \mathbf{v} \cdot dP = c \int_{(\bar{x},0,0)}^{(0,\bar{y},0)} (-ydx + xdy) = c \int_{(\bar{x},0,0)}^{(\bar{x},\bar{y},0)} \bar{x}\, dy = c\bar{x}\bar{y}.$$

Si verifichi con calcoli simili che

$$\int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{v} \cdot dP = -c\bar{x}\bar{y},$$

e quindi la circuitazione lungo la curva che parte da O e ritorna in O percorrendo (nell'ordine) OA, AB, BC, CO vale $2c\bar{x}\bar{y}$.

$\square$