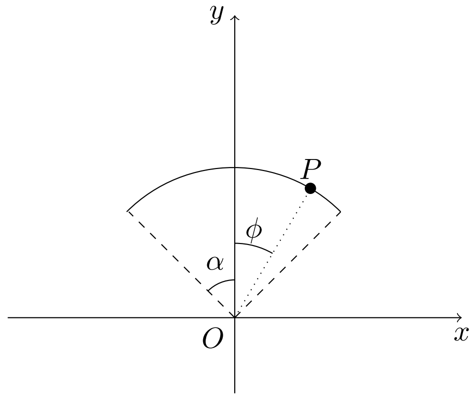

Figura 1: Esercizio 1

1 Centro di massa

Esercizio 1. Calcolare il centro di massa di un arco di circonferenza di raggio R, sotteso da un angolo di ampiezza 2α e densità lineare costante μ.

Soluzione. Scegliamo un sistema di riferimento $Oxyz$ in cui l'arco si trovi nel piano xy, la circonferenza a cui appartiene sia centrata in O e sia simmetrico rispetto all'asse y (fig. 1). Sia P un generico punto dell'arco. Sia ϕ l'angolo tra l'asse y e il vettore $P - O$, contato positivamente in senso antiorario a partire dall'asse y, in modo che

$$P - O = R \sin\phi \mathbf{i} + R \cos\phi \mathbf{j}.$$

In queste coordinate il centro di massa G ha le seguenti proprietà:

- $(G - O) \cdot \mathbf{k} = (G - O)_z \equiv z_G = 0$ perché l'arco è contenuto nel piano xy;
- $(G - O) \cdot \mathbf{i} = (G - O)_x \equiv x_G = 0$ perché l'asse y è asse di simmetria, dunque G si trova su y.

Per calcolare $y_G \equiv (G - O)_y$ ricorriamo alla definizione:

$$y_G = \frac{1}{m} \int_C \mu y dC = \frac{1}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu R \cos\phi R d\phi = R \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

dove abbiamo usato il fatto che dC nel caso di una circonferenza si riduce a $ds = R d\phi$ e che $m = 2\mu R\alpha$.

Osserviamo che nel caso particolare della semicirconferenza ($\alpha = \pi/2$) troviamo

$$y_G = \frac{2R}{\pi}.$$

$\square$

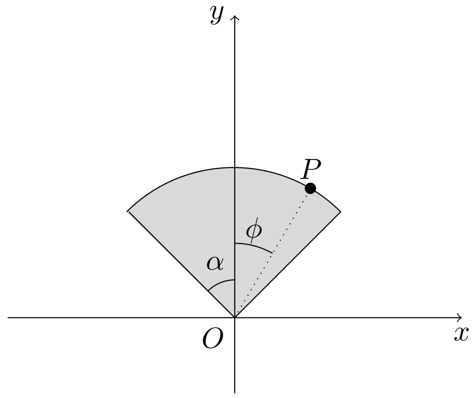

Figura 2: Esercizio 2

Esercizio 2. Calcolare il centro di massa di un settore circolare di raggio R, sotteso da un angolo di ampiezza 2α e densità superficiale costante μ.

Soluzione. Scegliendo un sistema di coordinate come nell'esercizio precedente (fig. 2), valgono le stesse considerazioni fatte prima, dunque occorre solo calcolare $(G-O)_y$. Passando in coordinate polari,

$$P - O = r\sin\phi\mathbf{i} + r\cos\phi\mathbf{j}, \quad r \in [0,R],\ \phi \in [-\alpha,\alpha],\ dC = rdrd\phi,$$

otteniamo:

$$y_G = \frac{1}{m}\int_C \mu y dC = \frac{1}{m}\int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu r\cos\phi r dr d\phi = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha},$$

dove abbiamo usato $m = \mu\alpha R^2$. Nel caso del semdisco, otteniamo

$$y_G = \frac{4R}{3\pi}.$$

□

Esercizio 3. Calcolare il centro di massa di un semiguscio sferico di raggio R e densità superficiale costante μ.

Dimostrazione. Consideriamo un sistema di riferimento $Oxyz$ in cui il centro della sfera coincide con O e il bordo della semisfera giace nel piano xy. In queste coordinate, per considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte precedentemente, si ha

$$x_G = y_G = 0.$$

Per il calcolo di z_G utilizziamo coordinate sferiche: sia P il generico punto della superficie sferica, allora

$$P - O = R\cos\lambda\sin\phi\mathbf{i} + R\sin\lambda\sin\phi\mathbf{j} + R\cos\phi\mathbf{k},$$

dove

$$\lambda \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi/2], \quad dC = R^2 \sin\phi d\phi d\lambda.$$

Ne segue che

$$z_G = \frac{1}{m} \int_C \mu z dC = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu R \cos\phi R^2 \sin\phi d\phi d\lambda = \frac{R}{2},$$

dove abbiamo usato $m = 2\pi R^2 \mu$. □

2 Momenti di inerzia

Esercizio 4. Si consideri una terna $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di assi Ox, Oy, Oz. Si calcolino i momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati di un cilindro retto pieno di densità costante μ, di raggio R, di altezza h parallela a Oz, con centro di massa in O.

Soluzione. I tre momenti di inerzia richiesti sono rispettivamente

$$A = \int_{\mathcal{C}} \mu(y^2 + z^2)\, d\mathcal{C}, \quad B = \int_{\mathcal{C}} \mu(x^2 + z^2)\, d\mathcal{C}, \quad C = \int_{\mathcal{C}} \mu(x^2 + y^2)\, d\mathcal{C}.$$

Per simmetria assiale rispetto a Oz si ha $A = B$. Facciamo il calcolo in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z, \end{cases}$$

dove $r \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Inoltre,

$$d\mathcal{C} = dx\, dy\, dz = r\, dr\, d\phi\, dz,$$

per cui

$$\begin{aligned} A &= \mu \int_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]} (r^3 \sin^2\phi + z^2 r) dr\, d\phi\, dz = \\ &= \mu \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \mu \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\, dz = \\ &= \mu \frac{R^4}{4} \pi h + \mu \frac{R^2}{2}\, 2\pi \frac{h^3}{12} = \frac{m}{\pi R^2 h} \frac{R^4}{4} \pi h + \frac{m}{\pi R^2 h} \frac{R^2}{2}\, 2\pi \frac{h^3}{12} = \\ &= m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right). \end{aligned}$$

Il calcolo di C è più semplice:

$$\begin{aligned}
C &= \mu \int_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]} r^3(\sin^2\phi + \cos^2\phi) dr\, d\phi\, dz = \\
&= \mu \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \\
&= \mu \frac{R^4}{4} 2\pi h = \frac{m}{\pi R^2 h} \frac{R^4}{4} 2\pi h = \\
&= m\frac{R^2}{2},
\end{aligned}$$

che è uguale formalmente al momento di inerzia di un disco di raggio R rispetto al proprio asse di simmetria. □

Esercizio 5. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, si calcolino i momenti di inerzia di un cilindro vuoto.

Esercizio 6. Si consideri una terna $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di assi Ox, Oy, Oz. Si calcoli il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per O di una sfera piena di raggio R, con centro di massa in O, di densità costante μ.

Soluzione. Naturalmente per simmetria sferica i momenti di inerzia di una sfera rispetto agli assi passanti dal centro di massa sono tutti uguali. Ricordiamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

dove $r \in [0, R],\ \theta \in [0, \pi],\ \phi \in [0, 2\pi]$ e $d\mathcal{C} = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$. Conviene calcolare C:

$$\begin{aligned}
C &= \int_{\mathcal{C}} \mu(x^2 + y^2)\, d\mathcal{C} = \mu \int_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} r^4 \sin^3\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \\
&= \int_0^R r^4\, dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \\
&= \mu \frac{R^5}{5}\frac{4}{3} 2\pi = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{R^5}{5}\frac{4}{3} 2\pi = \\
&= \frac{2}{5} m R^2.
\end{aligned}$$

Nel precedente calcolo abbiamo usato:

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta(1 - \cos^2\theta) d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

□

Esercizio 7. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, si verifichi che il momento di inerzia di una sfera vuota rispetto a un asse passante per il centro di massa vale $\frac{2}{3}mR^2$.

Soluzione. Si può procedere come nell'esercizio precedente con il calcolo esplicito di $I \equiv A = B = C$, oppure notare che

$$3I = A + B + C = 2\mu \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2) d\mathcal{C} = 2\mu \int_{\mathcal{C}} R^2 d\mathcal{C} = 2\mu R^2 \cdot 4\pi R^2 = 2R^2,$$

da cui

$$I = \frac{2}{3} mR^2.$$

□

Esercizio 8. Si consideri una terna $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di assi Ox, Oy, Oz. Si calcolino i momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati di un semiguscio sferico di raggio R, di densità costante μ, con centro della sfera corrispondente coincidente con O.

Soluzione. Anche qui potremmo usare coordinate sferiche dove però stavolta $\theta \in [0, \pi/2]$. Tuttavia torna molto utile un ragionamento sintetico: supponiamo senza perdita di generalità che il bordo del semiguscio sferico sia nel piano Oxy, e sia I il suo momento d'inerzia rispetto all'asse Oz. Ora, consideriamo l'altra metà del semiguscio sferico che insieme a quello considerato formano una sfera di raggio R. Ovviamente anche il suo momento d'inerzia rispetto a Oz vale I, e la somma dei due momenti di inerzia corrisponde al momento di inerzia della sfera:

$$I + I = \frac{2}{3} MR^2,$$

dove abbiamo indicato con M la massa della sfera intera. Naturalmente se m è la massa della semisfera, vale $M = 2m$, da cui:

$$I = \frac{1}{2} \frac{2}{3} 2mR^2 = \frac{2}{3} mR^2,$$

pertanto il momento di inerzia rispetto all'asse Oz del semiguscio sferico è formalmente identico a quello della sfera. Lo stesso ragionamento vale per i momenti di inerzia rispetto a Ox e Oy. Si verifichino queste osservazioni con un calcolo analitico.

□

Esercizio 9. Sia $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una terna di riferimento. Si consideri un cubo di lato ℓ e densità volumetrica omogenea μ, con un vertice in O e tre lati giacenti sugli assi di riferimento (Fig.3).

1. Si calcoli il tensore di inerzia del cubo rispetto a questa terna.

2. Si calcolino direzioni principali di inerzia del cubo rispetto a questa terna.

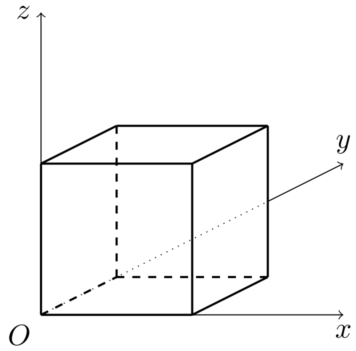

Figura 3: Esercizio 9.

Soluzione. 1. Il tensore di inerzia σ rispetto a una qualsiasi terna ha espressione

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}.$$

Per ragioni di simmetria, abbiamo

$$A = B = C \quad \text{e} \quad D = E = F,$$

per cui possiamo calcolare ad esempio A e F. Si ha

$$\begin{aligned} A &= \mu \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell (y^2 + z^2) dxdydz = \mu\ell \left[\int_0^\ell \int_0^\ell y^2 dydz + \int_0^\ell \int_0^\ell z^2 dydz \right] = \\ &= \mu\ell 2\ell \frac{1}{3}\ell^3 = \frac{2}{3} m\ell^2 \\ F &= \mu \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell xydxdydz = \mu\ell \frac{1}{2}\ell^2 \frac{1}{2}\ell^2 = \frac{1}{4} m\ell^2, \end{aligned}$$

per cui

$$\sigma = m\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Gli assi principali d'inerzia rispetto a una certa terna sono autovettori del tensore di inerzia calcolato rispetto a quella terna. Basta quindi diagonalizzare il tensore d'inerzia σ trovato al punto precedente.

   Sappiamo già dalla teoria che l'asse passante per O e per il centro di massa G (la cui direzione è data dal vettore $(1, 1, 1)$) è un asse principale di inerzia. Vediamo se riusciamo a ritrovarlo tramite diagonalizzazione.

Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_\sigma(\lambda)$, le cui radici sono gli autovalori di σ:

$$
\begin{aligned}
p_\sigma(\lambda) = \det(\sigma - \lambda m\ell^2 I) = m\ell^2 \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix} \\
= \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^3 - \frac{3}{16}\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{32}.
\end{aligned}
$$

Risolvendo l'equazione $p_\sigma(\lambda) = 0$ si trovano

$$\lambda_1 = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{11}{12},$$

con λ_2 avente molteplicità algebrica 2. Troviamo autovettori associati a questi autovalori:

- per λ_1 cerchiamo un vettore nel nucleo (ker) di $\sigma - \lambda_1 m\ell^2 I$:

$$\ker(\sigma - \lambda_1 m\ell^2 I) = \ker \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

  per cui $(1\ 1\ 1)^T$ è direzione principale di inerzia, come previsto dalla teoria[1];

- per λ_2 cerchiamo un vettore nel nucleo di $\sigma - \lambda_2 m\ell^2 I$:

$$\ker(\sigma - \lambda_2 m\ell^2 I) = \ker \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

  per cui $(1\ -1\ 0)^T$ $(0\ 1\ -1)^T$ sono altre direzioni principali di inerzia.

Concludiamo che gli assi principali di inerzia sono dati dalle equazioni

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}, \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

□

[1] L'apice ^{T} indica l'operazione di trasposizione, il cui risultato è il vettore colonna con le stesse componenti