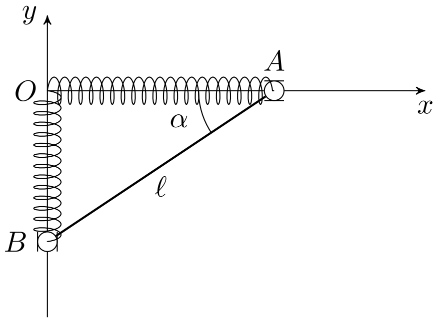

Figura 1: Esercizio 1.

Esercizio 1. Gli estremi A e B di un'asta omogenea di lunghezza ℓ sono liberi di scorrere, rispettivamente, lungo le due guide rettilinee lisce Ox e Oy tra loro ortogonali e poste nel piano orizzontale. Indicando con α l'angolo tra l'asta e l'asse x, studiare il moto dell'asta quando soggetta alle due forze elastiche $\mathbf{F}_A = -k(A-O)$ e $\mathbf{F}_B = -k(B-O)$ come in figura 1, suppondendo assegnate le condizioni iniziali $\alpha(0) = 0$ e $\dot{\alpha}(0) = \omega_0$. Trovare poi le reazioni vincolari dinamiche in A e in B.

Soluzione. Troviamo il moto dell'asta con diversi metodi, tutti equivalenti.

Conservazione energia meccanica / Equazioni di Lagrange Poiché le forze attive agenti sull'asta sono conservative, sappiamo che l'energia meccanica è un integrale primo del moto, cioè

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

lungo il moto. In alternativa, possiamo scrivere le equazioni di Lagrange a partire dalla funzione di Lagrange $L = T - V$.

L'energia potenziale V ha espressione

$$V = \frac{1}{2}k|A-O|^2 + \frac{1}{2}k|B-O|^2,$$

e poiché $A - O = \ell \cos\alpha \mathbf{i}$ e $B - O = -\ell \sin\alpha \mathbf{j}$, abbiamo

$$V(\alpha) = \frac{1}{2}k\ell^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\alpha = \frac{1}{2}k\ell^2.$$

Osserviamo che è costante. L'energia cinetica, invece, ha espressione

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}I_G|\boldsymbol{\omega}|^2.$$

Poiché

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{\ell}{2}\cos\alpha\mathbf{i} - \frac{\ell}{2}\sin\alpha\mathbf{j} \\ \boldsymbol{\omega} &= \dot{\alpha}\mathbf{k} \\ I_G &= \frac{1}{12}m\ell^2, \end{aligned}$$

abbiamo che

$$T(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{8}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\alpha}^2.$$

Osserviamo che tracciando le perpendicolari agli assi passanti per A e B si ottiene un punto C, che ha la proprietà di essere il centro di istantanea rotazione per il sistema, caratterizzato dalla proprietà $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{v}_C$ è la velocità *come punto del corpo rigido*. Allora in alternativa si poteva calcolare T usando C:

$$T = \frac{1}{2}I_C\omega^2,$$

dove I_C è il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano e passante per C; per il teorema di Huygens-Steiner, questo è dato da

$$I_C = I_G + m|G - C|^2.$$

Poiché $|G - C|$ è la metà della diagonale del rettangolo $ABCD$, abbiamo che $|G - C| = \frac{\ell}{2}$, e perciò

$$I_C = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2;$$

si ritrova

$$T = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\alpha}^2.$$

Ora che abbiamo T e V, possiamo fare appello alla conservazione dell'energia meccanica $E = T + V$ e scrivere

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = 0 \iff \ddot{\alpha} = 0.$$

Possiamo anche pensare di scrivere le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \iff \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} = 0 \iff \ddot{\alpha} = 0.$$

Il moto è quindi uniforme e la legge oraria è

$$\alpha(t) = \dot{\alpha}(0)t + \alpha(0) = \omega_0 t$$

Equazioni cardinali Indicando con $\mathbf{\Phi}_A$ e $\mathbf{\Phi}_B$ le reazioni vincolari rispettivamente in A e B, le equazioni cardinali per il sistema sono

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_G = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{\Phi}_A + \mathbf{\Phi}_B \\ \dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M}_G + \mathbf{\Psi}_G. \end{cases}$$

Osservando che poiché le cerniere sono lisce, le reazioni vincolari sono ortogonali alle guide e i momenti intrinseci $\mathbf{\Psi}_A$ e $\mathbf{\Psi}_B$ soddisfano $\mathbf{\Psi}_A \cdot \mathbf{k} = \mathbf{\Psi}_B \cdot \mathbf{k} \equiv 0$, scriviamo i singoli termini:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_G = \left(-\frac{\ell}{2}\dot\alpha^2\cos\alpha - \frac{\ell}{2}\ddot\alpha\sin\alpha\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\ell}{2}\dot\alpha^2\sin\alpha - \frac{\ell}{2}\ddot\alpha\cos\alpha\right)\mathbf{j},\\
&\mathbf{F}_A = -k\ell\cos\alpha\mathbf{i},\\
&\mathbf{F}_B = k\ell\sin\alpha\mathbf{j},\\
&\mathbf{\Phi}_A = \Phi_A\mathbf{j},\\
&\mathbf{\Phi}_B = \Phi_B\mathbf{i},\\
&\dot{\mathbf{K}}_G = \frac{d}{dt}(\sigma_G\boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\dot\alpha\mathbf{k}\right) = \frac{1}{12}m\ell^2\ddot\alpha\mathbf{k},\\
&\mathbf{M}_G = (A-G)\wedge\mathbf{F}_A + (B-G)\wedge\mathbf{F}_B = 0\mathbf{k},\\
&\mathbf{\Psi}_G = (A-G)\wedge\mathbf{\Phi}_A + (B-G)\wedge\mathbf{\Phi}_B + \mathbf{\Psi}_A + \mathbf{\Psi}_B =\\
&= \frac{\ell}{2}\cos\alpha\Phi_A\mathbf{k} + \frac{\ell}{2}\sin\alpha\Phi_B\mathbf{k} + \mathbf{\Psi}_A\cdot\mathbf{k} + \mathbf{\Psi}_B\cdot\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Ne segue che le equazioni cardinali sono

$$
\begin{cases}
-m\frac{\ell}{2}\ddot\alpha\sin\alpha - m\frac{\ell}{2}\dot\alpha^2\cos\alpha = -k\ell\cos\alpha + \Phi_B\\
-m\frac{\ell}{2}\ddot{\cos}\alpha + m\frac{\ell}{2}\dot\alpha^2\sin\alpha = k\ell\sin\alpha + \Phi_A\\
\frac{1}{12}m\ell^2\ddot\alpha = \frac{\ell}{2}\cos\alpha\Phi_A + \frac{\ell}{2}\sin\alpha\Phi_B,
\end{cases}
\tag{1}
$$

che, essendo tre equazioni in tre incognite, sono sufficienti per risolvere il moto e le reazioni vincolari. Moltiplicando la prima per $\sin\alpha$ e la seconda per $\cos\alpha$ si ottiene

$$\cos\alpha\Phi_A + \sin\alpha\Phi_B = -m\frac{\ell}{2}\ddot\alpha;$$

inoltre, la terza equazione del sistema si scrive

$$\cos\alpha\Phi_A + \sin\alpha\Phi_B = \frac{1}{6}m\ell\ddot\alpha,$$

per cui uguagliando i secondi membri otteniamo l'equazione del moto

$$\frac{1}{6}m\ell\ddot\alpha = -\frac{1}{2}m\ell\ddot\alpha \iff \ddot\alpha = 0.$$

Equazioni cardinali con polo diverso Scriviamo la seconda equazione cardinale con polo C, il centro di istantanea rotazione:

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C + \mathbf{\Psi}_C - m\mathbf{v}_C\wedge\mathbf{v}_G. \tag{2}$$

Il vantaggio di usare C, a fronte di un'equazione più complicata, risiede nel fatto che il momento delle reazioni vincolari $\mathbf{\Psi}_C$ è nullo perché le rette di azione di entrambe le reazioni passano per C. Quindi la seconda equazione non contiene le reazioni ed è sufficiente per trovare il moto.

Calcoliamo dapprima il membro di sinistra. Osserviamo che in questo caso il momento della quantità di moto ha un'espressione più complicata perché il polo non è il centro di massa:

$$\mathbf{K}_C = \sigma_C \boldsymbol{\omega} + m(G - C) \wedge \mathbf{v}_C,$$

ma $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, quindi dobbiamo solo calcolare il tensore di inerzia in C. In realtà quello che serve non è tutto il tensore, ma solo I_C, il momento di inerzia rispetto a un asse passante per C e parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, che abbiamo già calcolato in precedenza ed è uguale a

$$I_C = \frac{1}{3} m\ell^2.$$

Ne deriva che

$$\mathbf{K}_C = \frac{1}{3} m\ell^2 \dot{\alpha} \mathbf{k},$$

da cui

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \frac{1}{3} m\ell^2 \ddot{\alpha} \mathbf{k}.$$

Calcoliamo adesso il secondo membro di (2). Abbiamo già osservato che $\boldsymbol{\Psi}_C = \mathbf{0}$. Si verifichi che anche $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$. Resta da calcolare $\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{v}_G$; si osservi che in questo caso $\mathbf{v}_C \neq 0$ perché è la velocità non come punto del corpo rigido, ma la derivata di $C - O$. Tuttavia poiché $\mathbf{v}_C$ e $\mathbf{v}_G$ sono paralleli, anche $\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{v}_G$ è nullo. Per concludere, la seconda equazione cardinale è

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{0}$$

da cui l'equazione del moto $\frac{1}{3} m\ell^2 \ddot{\alpha} = 0$ e la legge oraria

$$\alpha(t) = \omega_0 t.$$

Calcoliamo adesso le reazioni vincolari dinamiche. Ricorriamo alla prima equazione cardinale, che abbiamo già calcolato (equazione (1)). Semplificando e sostituendo $\ddot{\alpha} = 0$ e $\alpha(t)$, otteniamo

$$\begin{cases} \Phi_A(t) = -\left(k\ell - \frac{1}{2} m\ell\omega_0^2\right) \cos(\omega_0 t) \\ \Phi_B(t) = \left(k\ell - \frac{1}{2} m\ell\omega_0^2\right) \sin(\omega_0 t). \end{cases}$$

$\square$