**Esercizio 1.** Dati i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{z} = \mathbf{k}$:

1. Calcolare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ e l'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
2. Dimostrare che $\mathbf{v}$ e $\alpha\mathbf{v}$ sono paralleli per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Calcolare $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z})$, $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{z}$ e $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z})$.
4. Si può calcolare $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})$?
5. Dato il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, calcolare la componente di $\mathbf{v}$ in direzione $\mathbf{u}$.

*Soluzione.* 1. Ricordando che il prodotto scalare gode della proprietà commutativa e distributiva, e che

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \end{aligned}$$

segue che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 + 0 + 1 + 0 = 1.$$

Per calcolare l'angolo $\theta$ tra i due vettori, ricorriamo all'importante relazione

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos\theta,$$

da cui

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}.$$

Poiché $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{2}$ e $|\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} = \sqrt{2}$, segue che

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che l'angolo $\theta$ può assumere due valori:

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

2. Per dimostrare che due vettori sono paralleli basta verificare che il loro prodotto vettoriale sia il vettore nullo. Calcoliamo dunque $\mathbf{v} \wedge (\alpha\mathbf{v})$, ricordando che il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva e che

$$\begin{aligned} &\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ &\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k},\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i},\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}; \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \wedge (\alpha \mathbf{v}) &= (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \wedge [\alpha(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})] \\
&= (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \wedge [(\alpha v_1)\mathbf{i} + (\alpha v_2)\mathbf{j} + (\alpha v_3)\mathbf{k}] \\
&= \alpha v_1^2 \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + \alpha v_2^2 \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} + \alpha v_3^2 \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} + \\
&+ \alpha v_1 v_2 \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + \alpha v_1 v_3 \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + \alpha v_2 v_1 \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + \alpha v_2 v_3 \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + \\
&+ \alpha v_1 v_3 \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + \alpha v_3 v_2 \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = \\
&= (\alpha v_1 v_2 - \alpha v_1 v_2)\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + (\alpha v_2 v_3 - \alpha v_2 v_3)\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (\alpha v_1 v_3 - \alpha v_1 v_3)\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

3. In un'espressione con prodotti scalari e vettoriali si calcolano prima le espressioni in parentesi. La prima:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w} \wedge \mathbf{z} = (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \wedge \mathbf{k} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + \mathbf{k} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{0} = \mathbf{i}; \\
&\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0} - \mathbf{k} = -\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

La seconda:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{j} + \mathbf{0} + \mathbf{i} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}; \\
&(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{z} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} - \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j} - \mathbf{i} + \mathbf{0} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

La terza:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{i}; \\
&\mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0} - \mathbf{k} = -\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

In particolare notiamo che $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{z} \neq \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z})$ e dunque l'uso delle parentesi è essenziale.

4. Notiamo che per calcolare $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})$ dovremmo prima calcolare $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$, che dà come risultato uno scalare, e moltiplicare il risultato vettorialmente per $\mathbf{v}$. Poiché il prodotto vettoriale può solo essere calcolato tra due vettori, questa ultima operazione è impossibile e dunque l'espressione non può essere calcolata.

5. In generale, la componente di un vettore $\mathbf{v}$ rispetto a un *versore* $\hat{\mathbf{u}}$ è

$$\mathrm{comp}_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}},$$

dunque per rispondere alla domanda occorre prima calcolare il versore associato a $\mathbf{u}$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

Adesso possiamo calcolare la componente di $\mathbf{v}$:

$$\mathrm{comp}_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\square$

**Esercizio 2.** Dato $(P-O)(t) = 3t^3\mathbf{i} + 2\sin(3t)\mathbf{j} + e^{4t}\mathbf{k}$, calcolare la velocità $\mathbf{v}_P(t)$ e l'accelerazione $\mathbf{a}_P(t)$.

*Soluzione.* Poiché $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ non cambiano nel tempo[1], per calcolare la velocità $\mathbf{v}_P$ occorre derivare singolarmente le componenti di $(P-O)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P(t) &= \frac{d}{dt}(3t^3)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(2\sin(3t))\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(e^{4t})\mathbf{k} \\ &= 9t^2\mathbf{i} + 6\cos(3t)\mathbf{j} + 4e^{4t}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Similmente, per calcolare l'accelerazione occorre derivare le componenti di $\mathbf{v}_P$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P(t) &= \frac{d}{dt}(9t^2)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(6\cos(3t))\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(4e^{4t})\mathbf{k} \\ &= 18t\mathbf{i} - 18\sin(3t)\mathbf{j} + 16e^{4t}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

□

**Esercizio 3.** Di un punto $P$ sappiamo che $\mathbf{a}_P = 3\mathbf{j}$. Calcolare il moto $(P-O)(t)$, sapendo che all'istante $t=0$ valgono $(P-O)(0) \equiv O$ e $\mathbf{v}_P(0) = \mathbf{i}$.

*Soluzione.* Se $(P-O)(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$, abbiamo che

$$\mathbf{v}_P(t) = \dot{x}_1(t)\mathbf{i} + \dot{x}_2(t)\mathbf{j} + \dot{x}_3(t)\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{a}_P(t) = \ddot{x}_1(t)\mathbf{i} + \ddot{x}_2(t)\mathbf{j} + \ddot{x}_3(t)\mathbf{k}.$$

Pertanto, se $\mathbf{a}_P(t) = 3\mathbf{j}$, vuol dire che

$$\begin{cases}\ddot{x}_1(t) = 0 \\ \ddot{x}_2(t) = 3 \\ \ddot{x}_3(t) = 0.\end{cases}$$

Risolvendo le precedenti tre equazioni differenziali ordinarie troviamo $x_1(t), x_2(t)$ e $x_3(t)$ e dunque $(P-O)(t)$. Per quanto riguarda la prima, si risolve semplicemente integrando membro a membro rispetto al tempo:

$$\ddot{x}_1(t) = 0 \longrightarrow \dot{x}_1(t) = c_1 \longrightarrow x_1(t) = c_1 t + k_1,$$

dove $c_1$ e $k_1$ sono costanti di integrazione da calcolare in seguito a partire dalle condizioni iniziali. La terza equazione differenziale è formalmente la stessa, dunque la soluzione sarà

$$x_3(t) = c_3 t + k_3.$$

[1]Se anche i vettori della terna di riferimento dipendono dal tempo, bisognerebbe derivare anche loro. Si veda più avanti nel corso di Meccanica Razionale

La seconda equazione differenziale è lievemente diversa, ma si risolve allo stesso modo:

$$\ddot{x}_2(t) = 3 \longrightarrow \dot{x}_2(t) = 3t + c_2 \longrightarrow x_2(t) = \frac{3}{2}t^2 + c_2 t + k_2.$$

Ne segue che la *soluzione generale* è

$$(P - O)(t) = (c_1 t + k_1)\mathbf{i} + (\frac{3}{2}t^2 + c_2 t + k_2)\mathbf{j} + (c_3 t + k_3)\mathbf{k}.$$

Per calcolare le costanti $c_i, k_i,\ i = 1, 2, 3$, bisogna imporre le condizioni iniziali: la prima è $(P - O)(0) \equiv O$, dunque calcoliamo $(P - O)(0)$ dalla soluzione generale e uguagliamo a $O$:

$$(P - O)(0) = k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

da cui segue che $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0$. La seconda condizione iniziale è $\mathbf{v}_P(0) = \mathbf{i}$, perciò calcoliamo $\mathbf{v}_P(0)$ derivando la soluzione generale e la uguagliamo a $\mathbf{i}$:

$$\mathbf{v}_P(t) = c_1\mathbf{i} + (3t + c_2)\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{v}_P(0) = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} = \mathbf{i},$$

da cui

$$c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0.$$

Concludiamo che

$$(P - O)(t) = t\mathbf{i} + \frac{3}{2}t^2\mathbf{j}.$$

□

**Esercizio 4.** Fissata una terna di riferimento $O, \mathbf{ijk}$, di un punto $P$ di coordinate $(P - O)(t) = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ sappiamo che $\mathbf{a}_P(t) = -\omega^2 x_1\mathbf{i}$. Sapendo che $(P - O)(0) = O$ e $\mathbf{v}_P(0) = \mathbf{i}$, calcolare $(P - O)(t)$.

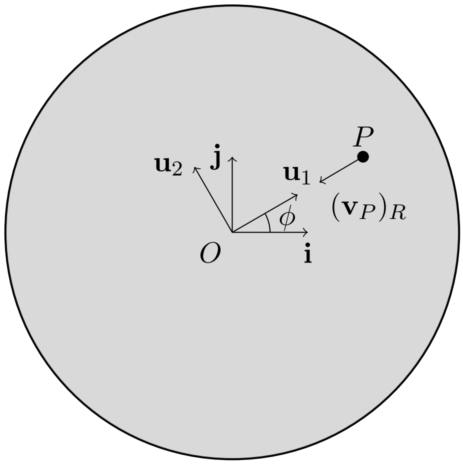
*Suggerimento.* Nel risolvere l'equazione differenziale $\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$ osservare che $y_1(t) = \sin(\omega t)$ e $y_2(t) = \cos(\omega t)$ sono entrambe soluzioni, quindi la soluzione generale sarà data dalle combinazioni lineari di $y_1$ e $y_2$. □

**Esercizio 5.** Un punto $P$ si muove su una piattaforma ruotante, dal bordo verso il centro, con velocità relativa

$$(\mathbf{v}_P)_R = \dot{r}\mathbf{u}_1,$$

in modo che la sua posizione istantanea relativa all'osservatore ruotante, solidale alla piattaforma, sia $P - O = r\mathbf{u}_1$.

Trovare la velocità e l'accelerazione di $P$ rispetto a un osservatore fisso $O, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$, nonché la traiettoria di $P$ rispetto a questo osservatore.




*Soluzione.* Siano $x_1, x_2$ le coordinate di $P$ nel sistema fisso e $y_1, y_2$ le coordinate nel sistema mobile. Si ha che

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_2 = -\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}. \end{cases}$$

La traiettoria nel sistema fisso è data da

$$(P - O) = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 = r\mathbf{u}_1 \Longrightarrow y_2 = 0,$$

che rappresenta la retta dell'asse $\mathbf{u}_1$.

Nel sistema mobile, invece,

$$(P - O) = r\mathbf{u}_1 = r(\cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j},$$

da cui si vede che

$$x_1^2 + x_2^2 = r(\phi)^2,$$

che è l'equazione della spirale archimedea.

La velocità nel sistema fisso si ricava in due modi. Applicando le formule della cinematica relativa,

$$\mathbf{v}_P = (\mathbf{v}_P)_R + \mathbf{v}_T = r\mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) = \dot{r}\mathbf{u}_1 + \dot{\phi}\mathbf{k} \wedge r\mathbf{u}_1 = \dot{r}\mathbf{u}_1 + r\dot{\phi}\mathbf{u}_2.$$

Derivando direttamente il vettore $(P-O)$, ricordando di derivare anche i vettori mobili[2] $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{v}_P = \frac{d(P - O)}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_1) = \dot{r}\mathbf{u}_1 + r\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = \dot{r}\mathbf{u}_1 + r\dot{\phi}\mathbf{u}_2.$$

[2]Si osservi che

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = \dot{\phi}\mathbf{u}_2, \quad \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -\dot{\phi}\mathbf{u}_1.$$

Lo stesso vale per l'accelerazione. Applicando le formule della cinematica rigida,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_P &= (\mathbf{a}_P)_R + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C = \\
&= \ddot{r}\mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_P)_R = \\
&= \ddot{r}\mathbf{u}_1 + \dot{\phi}\mathbf{k} \wedge [\dot{\phi}\mathbf{k} \wedge r\mathbf{u}_1] + \ddot{\phi}\mathbf{k} \wedge r\mathbf{u}_1 + 2\dot{\phi}\mathbf{k} \wedge \dot{r}\mathbf{u}_1 = \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{u}_1 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{u}_2.
\end{aligned}$$

Derivando direttamente $\mathbf{v}_P$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{u}_1 + r\dot{\phi}\mathbf{u}_2) = \ddot{r}\mathbf{u}_1 + \dot{r}\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\mathbf{u}_2 + r\ddot{\phi}\mathbf{u}_2 + r\dot{\phi}\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{u}_1 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{u}_2.
\end{aligned}$$

$\square$