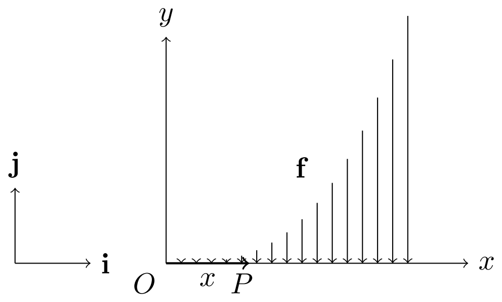
Esercizio 1. In un piano, su cui fissiamo un sistema di assi coordinati Oxy di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, è data la distribuzione di forze per unità di lunghezza

$$\mathbf{f} = -\lambda x^n \mathbf{j}, \quad \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0, \ell].$$

Calcolarne la risultante e il centro dei vettori paralleli.



Soluzione. La risultante è data dall'integrale

$$\mathbf{R} = \int_0^\ell \mathbf{f} dx = \int_0^\ell -\lambda x^n \mathbf{j} dx = \left(-\lambda \int_0^\ell x^n dx \right) \mathbf{j} = -\frac{\lambda \ell^{n+1}}{n+1} \mathbf{j}.$$

Invece il centro dei vettori paralleli C è dato dalla seguente relazione: se P è il generico punto dell'intervallo $[0, \ell]$, $P - O = x\mathbf{i}$,

$$C - O = \frac{\int_0^\ell (\mathbf{f} \cdot \mathbf{j})(P - O) dx}{\int_0^\ell (\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}) dx} = \frac{\int_0^\ell -\lambda x^n \cdot x \mathbf{i} dx}{\int_0^\ell -\lambda x^n dx} = \frac{\int_0^\ell x^{n+1} dx}{\int_0^\ell x^n dx} \mathbf{i} = \frac{n+1}{n+2} \ell \mathbf{i}.$$

Ad esempio,

- per $n = 0$ (distribuzione uniforme), $C - O = \frac{\ell}{2}\mathbf{i}$;
- per $n = 1$ (distribuzione lineare), $C - O = \frac{2}{3}\ell \mathbf{i}$.

□

Esercizio 2. Data la curva di equazione

$$y = A \cos\left(\frac{x}{a}\right),$$

calcolarne il triedro intrinseco $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ nel suo generico punto P e nel punto con $x = 0$. In quest'ultimo caso, specificare il raggio di curvatura.

Soluzione. Sia O l'origine degli assi. Il generico punto P appartenente alla curva è

$$P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + A \cos\left(\frac{x}{a}\right) \mathbf{j}.$$

Il versore tangente è dato da
$$\mathbf{T}=\frac{d(P-O)}{ds}=\frac{d(P-O)}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}.$$
Abbiamo che
$$\frac{d(P-O)}{dx}=\mathbf{i}-\frac{A}{a}\sin\left(\frac{x}{a}\right)\mathbf{j}$$
e
$$ds=|dP|=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\frac{A^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}.$$
Ne segue che
$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}},$$
da cui
$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{i}-\frac{A}{a}\sin\left(\frac{x}{a}\right)\mathbf{j}}{\sqrt{1+\frac{A^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}}.$$
Per calcolare $\mathbf{N}$ ricorriamo alla prima formula di Frenet-Serret:
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\mathbf{N},$$
dove ρ è il raggio di curvatura. Si ha che
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=-\frac{\frac{A}{a^2}\cos\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\frac{A^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)}\left[\frac{A}{a}\sin\left(\frac{x}{a}\right)\mathbf{i}-\left(1+\frac{A^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)\mathbf{j}\right].$$
Poiché per una curva cartesiana vale
$$\frac{1}{\rho}=\frac{|y''(x)|}{\sqrt{(1+(y'(x))^2)^3}}=\frac{\frac{A}{a^2}|\cos(\frac{x}{a})|}{\sqrt{(1+\frac{A^2}{a^2}\sin^2(\frac{x}{a}))^3}}$$
il calcolo di $\mathbf{N}$ segue dalla prima formula di Frenet-Serret. Poiché la curva è piana, $\mathbf{B}\equiv\mathbf{k}=\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$.

Per $x=0$, si ottiene
$$\mathbf{T}=\mathbf{i},\quad \mathbf{N}=-\mathbf{j},\quad \frac{1}{\rho}=\frac{A}{a^2}.$$
□

Esercizio 3. Sia assegnata una terna di riferimento $O(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$. Per la curva di equazioni
$$\begin{cases} x=R\cos\phi\\ y=R\sin\phi\\ z=\frac{p}{2\pi}\phi,\end{cases}$$
dove $R,p\in\mathbb{R}$ sono assegnati, calcolare il triedro intrinseco $(\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B})$, il raggio di curvatura e la torsione. Successivamente, si calcolino velocità e accelerazione di un punto P che si muove sulla stessa curva.

Soluzione. La curva assegnata si chiama *elica cilindrica circolare retta a passo p costante*. Osserviamo che R è il raggio del cilindro infinito su cui la curva si avvolge, mentre il parametro p è detto *passo* e rappresenta la differenza in coordinata z di due punti dell'elica, dove il secondo è ottenuto a partire dal primo facendo un giro completo di angolo 2π. In formule, sia

$$P_1 \equiv (R\cos\phi, R\sin\phi, \frac{p}{2\pi}\phi).$$

Il punto P_2 ottenuto incrementando ϕ di un angolo 2π ha coordinate

$$P_2 \equiv (R\cos(\phi+2\pi), R\sin(\phi+2\pi), \frac{p}{2\pi}(\phi+2\pi)) = (R\cos\phi, R\sin(\phi), \frac{p}{2\pi}\phi + p),$$

da cui si vede che i due punti hanno la stessa proiezione sul piano xy (perché le prime due coordinate sono uguali) e le coordinate z differiscono di p.

Passiamo ora a calcolare il triedro intrinseco. Il generico punto della curva è

$$(P-O)(\phi) = R\cos\phi\mathbf{i} + R\sin\phi\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}\phi\mathbf{k},$$

quindi possiamo calcolare il modulo dell'ascissa curvilinea:

$$\begin{aligned} |ds| = |dP| &= |d(R\cos\phi)\mathbf{i} + d(R\sin\phi)\mathbf{j} + d\left(\frac{p}{2\pi}\phi\right)\mathbf{k}| \\ &= |-R\sin\phi d\phi\mathbf{i} + R\cos\phi d\phi\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}d\phi\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}|d\phi|. \end{aligned}$$

Orientando ds secondo la direzione crescente di ϕ, abbiamo:

$$ds = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}d\phi.$$

Ricordando che l'ascissa curvilinea di una circonferenza è $ds = Rd\phi$, osserviamo che $\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}} > R$, quindi la lunghezza di un arco di circonferenza di ampiezza ϕ è sempre minore della lunghezza di un arco di elica cilindrica della stessa ampiezza ϕ.

Calcoliamo il versore tangente:

$$\mathbf{T} = \frac{d(P-O)}{ds} = \frac{d(P-O)}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{(-R\sin\phi\mathbf{i} + R\cos\phi\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}\mathbf{k})}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}.$$

Per esercizio, verificare che $|\mathbf{T}| = 1$. Osserviamo che se indichiamo con ψ l'angolo tra $\mathbf{T}$ e la direzione dell'asse z, si ha che

$$\cos\psi = \mathbf{T}\cdot\mathbf{k} = \frac{\frac{p}{2\pi}}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}},$$

che è costante e maggiore di zero, da cui segue che l'angolo ψ è costante e acuto.

Calcoliamo adesso il versore normale principale $\mathbf{N}$. Per la **prima formula di Frenet-Serret**,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{N},$$

dove ρ è il raggio di curvatura, per cui calcoliamo

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = -\frac{R\cos\phi\mathbf{i} + R\sin\phi\mathbf{j}}{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}},$$

da cui segue che

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{R}{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}$$

e infine

$$\mathbf{N} = -\cos\phi\mathbf{i} - \sin\phi\mathbf{j}.$$

Notiamo che il raggio di curvatura ρ è costante come nel caso della circonferenza e che $\mathbf{N}$ è sempre parallelo al piano xy.

Il versore binormale è dato da

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \frac{\frac{p}{2\pi}(\sin\phi\mathbf{i} - \cos\phi\mathbf{j}) + R\mathbf{k}}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}},$$

mentre la torsione $1/\tau$ è data dalla **terza formula di Frenet-Serret**:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{N}.$$

Si ha:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{-\frac{p}{2\pi}}{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\mathbf{N},$$

dunque la torsione è costante e negativa:

$$\tau = -\left(\frac{2\pi R^2}{p} + \frac{p}{2\pi}\right).$$

Supponiamo adesso di avere un punto P che si muove sull'elica cilindrica con traiettoria

$$(P - O)(t) = (R\cos(\phi(t))\mathbf{i} + R\sin(\phi(t))\mathbf{j} + \frac{p}{2\pi}\phi(t)\mathbf{k}).$$

È noto che la velocità in termini del triedro intrinseco è

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{T},$$

dove

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\phi}\,\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\dot{\phi}.$$

L'accelerazione è invece

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{N},$$

dove semplicemente

$$\ddot{s} = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}\ddot{\phi}$$

e $\frac{\dot{s}^2}{\rho} = R\dot{\phi}^2$ (dimostralo per esercizio!).

Sempre per esercizio, si calcolino la velocità e l'accelerazione in termini di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ derivando direttamente $P(t) - O$ e si verifichi che $\dot{s}, \ddot{s}$ e $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$ calcolati prima soddisfano le seguenti relazioni:

$$\dot{s} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{T}, \quad \ddot{s} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}, \quad \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N}.$$

Si verifichi infine che $\mathbf{a}\cdot\mathbf{B} = 0$, cioè che l'accelerazione è sempre contenuta nel piano osculatore individuato da $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$. $\square$

Esercizio 4. Verificare che

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\left(\frac{dP}{ds}\wedge\frac{d^2P}{ds^2}\right)\cdot\frac{d^3P}{ds^3},$$

e quindi, ricordando l'interpretazione geometrica del determinante di una matrice, concludere che se $x(s), y(s), z(s)$ sono le componenti di $P - O$, allora

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \\ x'''(s) & y'''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}.$$

(Suggerimento: per dimostrare la prima relazione, nel calcolare la derivata terza, si usi la seconda formula di Frenet-Serret.)