



Figura 1: Esercizio 1.

Esercizio 1. Gli estremi A e B di un'asta omogenea di lunghezza ℓ sono liberi di scorrere, rispettivamente, lungo le due guide rettilinee lisce Ox e Oy tra loro ortogonali e poste nel piano orizzontale. Indicando con α l'angolo tra l'asta e l'asse x , studiare il moto dell'asta quando soggetta alle due forze elastiche $\mathbf{F}_A = -k(A - O)$ e $\mathbf{F}_B = -k(B - O)$ come in Figura 1, supponendo assegnate le condizioni iniziali $\alpha(0) = 0$ e $\dot{\alpha}(0) = \omega_0$. Trovare poi le reazioni vincolari dinamiche in A e in B .

Soluzione. Troviamo il moto dell'asta con diversi metodi, tutti equivalenti.

Conservazione energia meccanica / Equazioni di Lagrange Poiché le forze attive agenti sull'asta sono conservative, sappiamo che l'energia meccanica è un integrale primo del moto, cioè

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

lungo il moto. In alternativa, possiamo scrivere le equazioni di Lagrange a partire dalla funzione di Lagrange $\mathcal{L} = T - V$.

L'energia potenziale V ha espressione

$$V = \frac{1}{2}k|A - O|^2 + \frac{1}{2}k|B - O|^2,$$

e poiché $A - O = \ell \cos \alpha \mathbf{i}$ e $B - O = -\ell \sin \alpha \mathbf{j}$, abbiamo

$$V(\alpha) = \frac{1}{2}k\ell^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}k\ell^2.$$

Osserviamo che V è costante. L'energia cinetica, invece, ha espressione

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}I_G|\boldsymbol{\omega}|^2.$$

Poiché

$$G - O = \frac{\ell}{2} \cos \alpha \mathbf{i} - \frac{\ell}{2} \sin \alpha \mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{k}$$

$$I_G = \frac{1}{12}m\ell^2,$$

abbiamo che

$$T(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{8}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{24}m\ell^2\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\alpha}^2.$$

Osserviamo che tracciando le perpendicolari agli assi passanti per A e B si ottiene un punto C , che ha la proprietà di essere il centro di istantanea rotazione per il sistema, caratterizzato dalla proprietà $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, dove \mathbf{v}_C è la velocità *come punto del corpo rigido*. Allora in alternativa si poteva calcolare T usando C :

$$T = \frac{1}{2}I_C\omega^2,$$

dove I_C è il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano e passante per C ; per il teorema di Huygens-Steiner, questo è dato da

$$I_C = I_G + m|G - C|^2.$$

Poiché $|G - C|$ è la metà della diagonale del rettangolo $ABCD$, abbiamo che $|G - C| = \frac{\ell}{2}$, e perciò

$$I_C = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2;$$

si ritrova

$$T = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\alpha}^2.$$

Ora che abbiamo T e V , possiamo fare appello alla conservazione dell'energia meccanica $E = T + V$ e scrivere

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = 0 \iff \ddot{\alpha} = 0.$$

Possiamo anche pensare di scrivere le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \iff \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} = 0 \iff \ddot{\alpha} = 0.$$

Il moto è quindi uniforme e la legge oraria è

$$\alpha(t) = \dot{\alpha}(0)t + \alpha(0) = \omega_0 t$$

Equazioni cardinali Indicando con Φ_A e Φ_B le reazioni vincolari rispettivamente in A e B , le equazioni cardinali per il sistema sono

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_G = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \Phi_A + \Phi_B \\ \dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M}_G + \Psi_G. \end{cases}$$

Osserviamo che, poiché le cerniere sono lisce, le reazioni vincolari sono ortogonali alle guide e i momenti intrinseci $\Psi_A^{\text{intr.}}$ e $\Psi_B^{\text{intr.}}$ soddisfano $\Psi_A^{\text{intr.}} \cdot \mathbf{k} = \Psi_B^{\text{intr.}} \cdot \mathbf{k} \equiv 0$.

Scriviamo i singoli termini:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_G &= \left(-\frac{\ell}{2}\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \frac{\ell}{2}\ddot{\alpha} \sin \alpha \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\ell}{2}\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \frac{\ell}{2}\ddot{\alpha} \cos \alpha \right) \mathbf{j}, \\
\mathbf{F}_A &= -kl \cos \alpha \mathbf{i}, \\
\mathbf{F}_B &= kl \sin \alpha \mathbf{j}, \\
\Phi_A &= \Phi_A \mathbf{j}, \\
\Phi_B &= \Phi_B \mathbf{i}, \\
\dot{\mathbf{K}}_G &= \frac{d}{dt}(\sigma_G \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\alpha} \mathbf{k} \right) = \frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\alpha} \mathbf{k}, \\
\mathbf{M}_G &= (A - G) \wedge \mathbf{F}_A + (B - G) \wedge \mathbf{F}_B = \mathbf{0} \mathbf{k}, \\
\boldsymbol{\Psi}_G &= (A - G) \wedge \Phi_A + (B - G) \wedge \Phi_B + \boldsymbol{\Psi}_A + \boldsymbol{\Psi}_B = \\
&= \frac{\ell}{2} \cos \alpha \Phi_A \mathbf{k} + \frac{\ell}{2} \sin \alpha \Phi_B \mathbf{k} + \boldsymbol{\Psi}_A \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\Psi}_B \cdot \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Ne segue che le equazioni cardinali sono

$$\begin{cases} -m \frac{\ell}{2} \ddot{\alpha} \sin \alpha - m \frac{\ell}{2} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha = -kl \cos \alpha + \Phi_B \\ -m \frac{\ell}{2} \ddot{\alpha} \cos \alpha + m \frac{\ell}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha = kl \sin \alpha + \Phi_A \\ \frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\alpha} = \frac{\ell}{2} \cos \alpha \Phi_A + \frac{\ell}{2} \sin \alpha \Phi_B, \end{cases} \quad (1)$$

che, essendo tre equazioni in tre incognite, sono sufficienti per risolvere il moto e le reazioni vincolari. Moltiplicando la prima per $\sin \alpha$ e la seconda per $\cos \alpha$ e sommando le due equazioni, si ottiene

$$\cos \alpha \Phi_A + \sin \alpha \Phi_B = -m \frac{\ell}{2} \ddot{\alpha}.$$

Inoltre, la terza equazione del sistema si semplifica

$$\cos \alpha \Phi_A + \sin \alpha \Phi_B = \frac{1}{6} m \ell \ddot{\alpha}.$$

Eguagliando i secondi membri delle due precedenti equazioni, otteniamo l'equazione del moto:

$$\frac{1}{6} m \ell \ddot{\alpha} = -\frac{1}{2} m \ell \ddot{\alpha} \implies \ddot{\alpha} = 0.$$

Equazioni cardinali con polo diverso Scriviamo la seconda equazione cardinale con polo C , il centro di istantanea rotazione:

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}_C + \boldsymbol{\Psi}_C - m \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{v}_G. \quad (2)$$

Il vantaggio di usare C , a fronte di un'equazione più complicata, risiede nel fatto che il momento delle reazioni vincolari $\boldsymbol{\Psi}_C$ è nullo perché le rette di azione di

entrambe le reazioni passano per C . Quindi la seconda equazione non contiene le reazioni ed è sufficiente per trovare il moto.

Calcoliamo dapprima il membro di sinistra. Osserviamo che in questo caso il momento della quantità di moto ha un'espressione più complicata perché il polo non è il centro di massa:

$$\mathbf{K}_C = \sigma_C \boldsymbol{\omega} + m(G - C) \wedge \mathbf{v}_C,$$

ma $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, quindi dobbiamo solo calcolare σ_C , il tensore di inerzia in C . In realtà quello che serve non è tutto il tensore, ma solo I_C , il momento di inerzia rispetto a un asse passante per C e parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, che abbiamo già calcolato in precedenza ed è uguale a

$$I_C = \frac{1}{3} m \ell^2.$$

Ne deriva che

$$\mathbf{K}_C = \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\alpha} \mathbf{k},$$

da cui

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\alpha} \mathbf{k}.$$

Calcoliamo adesso il secondo membro di (2). Abbiamo già osservato che $\boldsymbol{\Psi}_C = \mathbf{0}$. Si verifichi che anche $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$. Resta da calcolare $\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{v}_G$; si osservi che in questo caso $\mathbf{v}_C \neq \mathbf{0}$ perché è la velocità non come punto del corpo rigido, ma la derivata di $C - O$. Tuttavia poiché \mathbf{v}_C e \mathbf{v}_G sono paralleli, anche $\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{v}_G$ è nullo. Per concludere, la seconda equazione cardinale è

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{0}$$

da cui l'equazione del moto $\frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\alpha} = 0$ e la legge oraria

$$\alpha(t) = \omega_0 t.$$

Calcoliamo adesso le reazioni vincolari dinamiche. Ricorriamo alla prima equazione cardinale, che abbiamo già calcolato (equazione (1)). Semplificando e sostituendo $\ddot{\alpha} = 0$, $\dot{\alpha} = \omega_0$ e $\alpha = \omega_0 t$, otteniamo

$$\begin{cases} \Phi_A(t) = - (kl - \frac{1}{2} m \ell \omega_0^2) \cos(\omega_0 t) \\ \Phi_B(t) = (kl - \frac{1}{2} m \ell \omega_0^2) \sin(\omega_0 t). \end{cases}$$

□