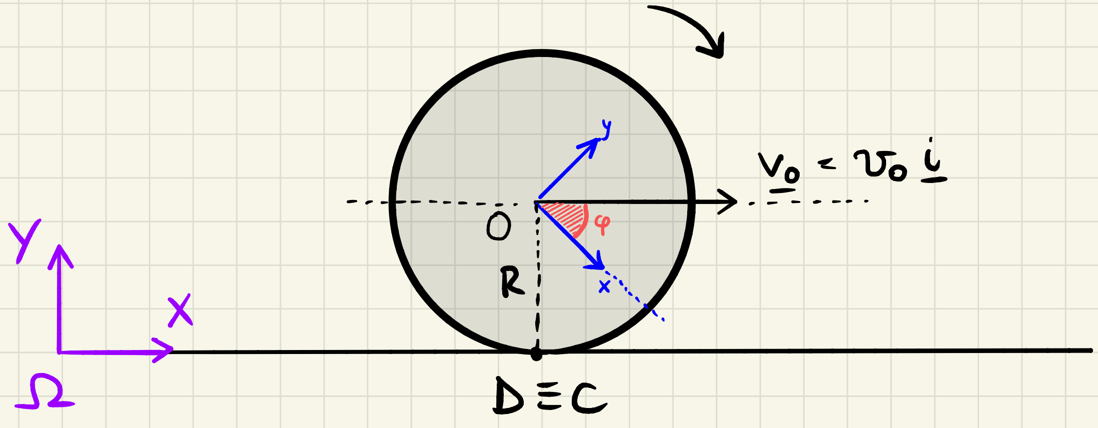
ESERCIZI (22/10/2019)

1 Determinare il centro di istantanea rotazione (CIR), la polare fissa e la polare mobile nel problema di un disco che rotola senza strisciare lungo una guida rettilinea liscia.



Soluzione Siano $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ versori associati agli assi fissi X, Y, Z (quest'ultimo uscente dal piano del foglio). Sia $v_0 = |\underline{v}_0|$ e φ l'angolo tra l'orizzontale e un asse x solidale al disco. Allora abbiamo che la velocità angolare del disco è

$$\underline{\omega} = -\dot{\varphi}\,\underline{K}.$$

il segno − è perché il disco ruota in senso orario.

Il vincolo di rotolamento senza strisciamento si esprime, invece, come:

$$v_0\,dt = R\,d\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{R}$$

Il C.I.R. è quel punto C che soddisfa:

$$C - O = \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v_0}}{|\underline{\omega}|^2}$$

$$= \frac{-\dot{\varphi}\,\underline{K} \wedge v_0\,\underline{i}}{\dot{\varphi}^2} = -\frac{v_0}{\dot{\varphi}}\,\underline{j} = -R\,\underline{j}.$$

Ne segue che $C \equiv D$, cioè corrisponde al punto di contatto del disco con la guida.

La polare fissa è la curva descritta dal C.I.R. in un sistema di riferimento fisso (ad esempio $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$). Siano X_c, Y_c e
← centrato in Ω
X_o, Y_o le coordinate di C e O in $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$.

Allora:

$$C - O = (X_c - X_o)\underline{i} + (Y_c - Y_o)\underline{j}$$

le coordinate lungo Z sono nulle

$$= -R\underline{j}$$

dalle pagina precedente

Quindi, uguagliando le componenti corrispondenti agli stessi versori:

$$\begin{cases} X_c - X_o = 0 \\ Y_c - Y_o = -R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_c = X_o \\ Y_c = \underbrace{Y_o}_{\equiv R} - R = 0 \end{cases}$$

perché il centro del disco ha Y costante

La curva che descrive la polare fissa è quindi data da $\boxed{\begin{cases} X_c = X_o \\ Y_c = 0 \end{cases}}$.

La polare mobile è la curva descritta dal C.I.R. in un sistema di riferimento solidale al corpo (ad esempio scegliamo $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$, corrispondenti agli assi x, y, z).

↖ centrato in O

Dobbiamo esprimere $C-O$ nel sistema $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$. Abbiamo che

$$\begin{cases} \underline{i} = \cos\varphi\, \underline{u}_1 + \operatorname{sen}\varphi\, \underline{u}_2 \\ \underline{j} = -\operatorname{sen}\varphi\, \underline{u}_1 + \cos\varphi\, \underline{u}_2 \end{cases},$$

per cui:

perché O è l'origine

$$C-O = (x_c - \underbrace{x_o}_{=0})\underline{u}_1 + (y_c - \underbrace{y_o}_{=0})\underline{u}_2$$

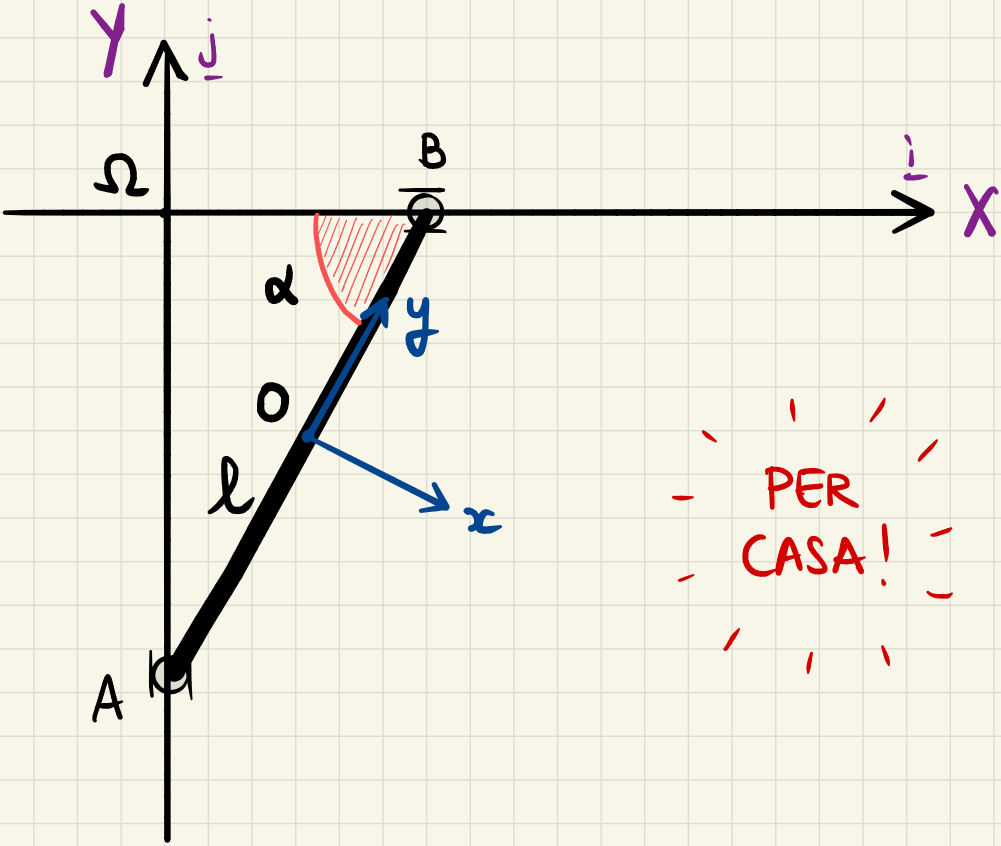
$$= x_c \underline{u}_1 + y_c \underline{u}_2$$

$$= -R\underline{j} = R\operatorname{sen}\varphi\, \underline{u}_1 - R\cos\varphi\, \underline{u}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_c = R\operatorname{sen}\varphi \\ y_c = -R\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_c^2 + y_c^2 = R^2}$$

CIRCONFERENZA di CENTRO O e RAGGIO R

2 Una sbarretta ha gli estremi liberi di muoversi su due guide rettilinee tra di loro ortogonali. Determinare il C.I.R., la polare fissa e la polare mobile.



PER CASA!

Risultati: C.I.R: $C - \Omega = l\cos\alpha\, \underline{i} - l\,\text{sen}\alpha\, \underline{j}$

Pol. fis. $X_c^2 + Y_c^2 = l^2$

Pol. mob. $(x_c - x_0)^2 + (y_c - y_0)^2 = l^2/4$