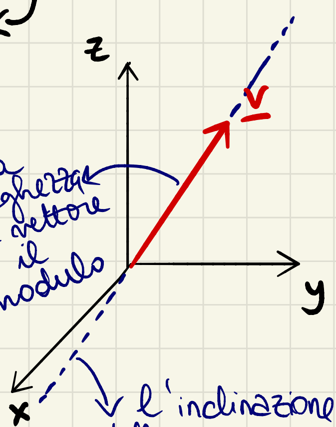
CALCOLO VETTORIALE

NOZIONI DA SAPERE

1 Differenza tra uno SCALARE e un VETTORE

- numero reale (modulo)
  +
  direzione
  +
  verso
  +
  unità di misura eventuale



la lunghezza del vettore dà il modulo

l'inclinazione della retta dà la direzione del vettore $\underline{v}$

- un numero reale
  +
  eventuale unità di misura

- le operazioni tra scalari sono quelle tra numeri reali imparate a scuola

- le operazioni tra vettori NON sono le operazioni tra i moduli !

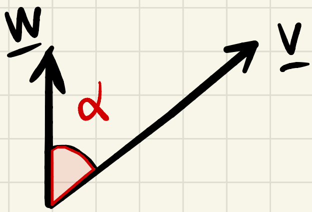
Per ogni direzione ci sono due versi possibili:

Data la differenza sostanziale tra scalari e vettori, li distinguiamo <u>sottolineando</u> i vettori

2 Operazioni tra vettori

Con $|\underline{v}|$ si indica il modulo di $\underline{v}$

- PRODOTTO SCALARE → il risultato è uno scalare



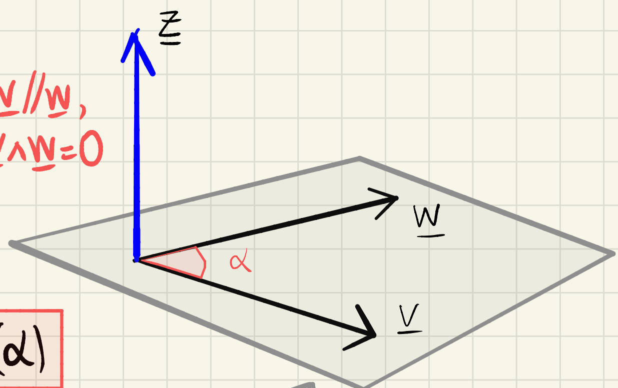
$$\boxed{\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}|\cos(\alpha)}$$

se $\underline{v} \perp \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

- PRODOTTO VETTORE

il risultato è un vettore

se $\underline{v} // \underline{w}$, $\underline{v} \wedge \underline{w} = 0$



Se $\underline{z} = \underline{v} \wedge \underline{w}$, allora $\underline{z}$ ha:

MODULO : $\boxed{|\underline{z}| = |\underline{v}||\underline{w}|\sin(\alpha)}$

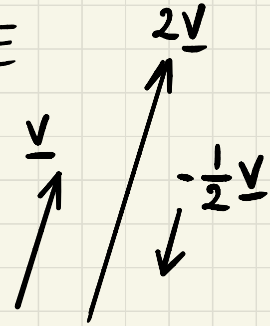
DIREZIONE : ortogonale al piano identificato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$

VERSO : secondo la regola della mano destra.

PRODOTTO SCALARE per VETTORE

$c\underline{v}$ ha:
- stessa direzione di $\underline{v}$
- modulo uguale a $c|\underline{v}|$
- stesso verso di $\underline{v}$ se $c>0$, verso opposto se $c<0$

c → scalare, $\underline{v}$ → vettore



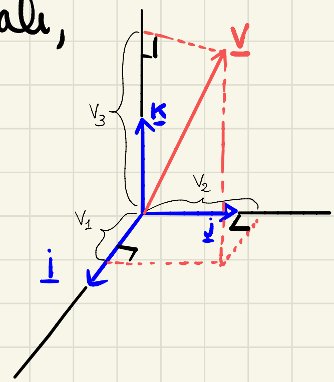
---

3 Rappresentazione algebrica di un vettore

Dati tre versori (vettore di modulo 1) a due a due ortogonali, possiamo scrivere ogni vettore come combinazione lineare dei tre versori:

$$\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$$

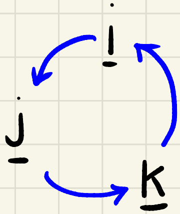
v_1, v_2, v_3: componenti di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ (sono scalari)



Se $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono versori ortogonali, allora:

- $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{j} = 0$
- $\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$
- $\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$

! $\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$, $\underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$, $\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$



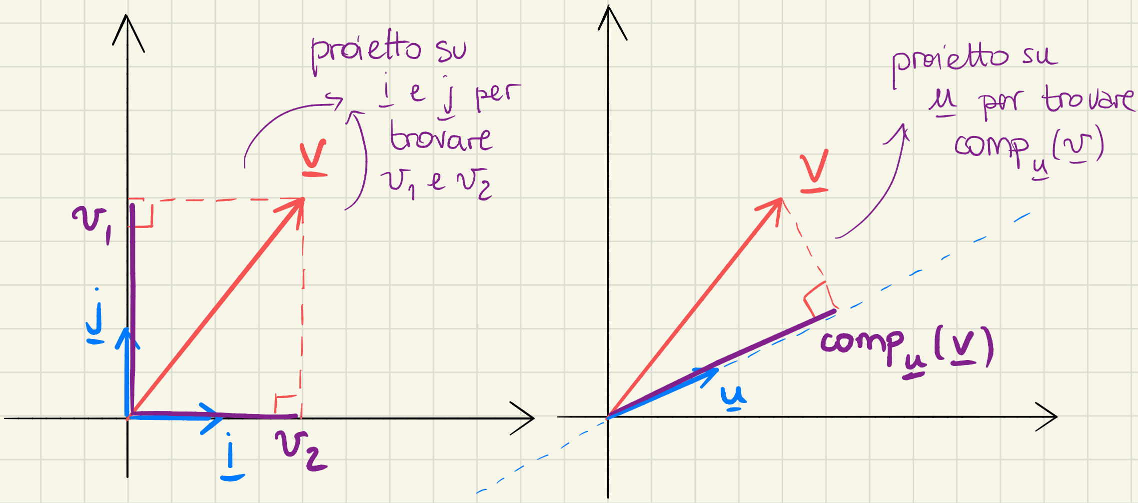
Osservazione: Sia $\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$.

Allora $\underline{v} \cdot \underline{i} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \cdot \underline{i} =$

$= v_1$ ← componente di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{i}$.

Generalizzando, la componente di $\underline{v}$ rispetto a un generico versore $\underline{u}$ è

$$\boxed{\text{comp}_{\underline{u}}(\underline{v}) = \underline{v} \cdot \underline{u}}$$



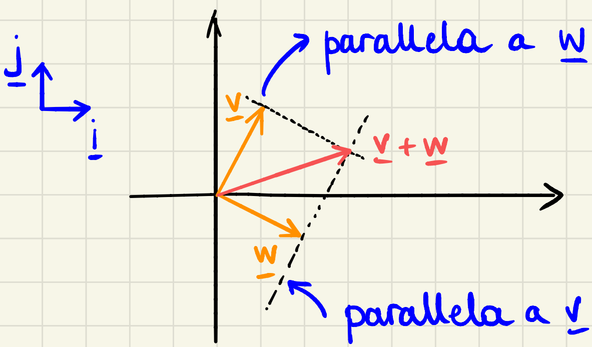
ESERCIZI (28/10/2019)

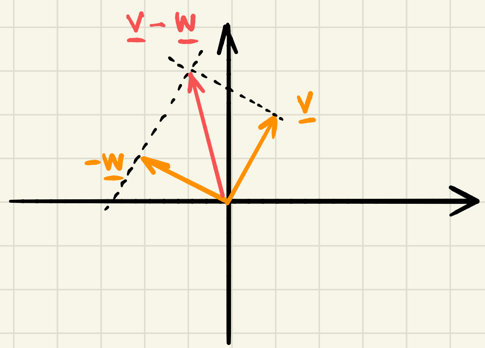
① Dati $\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j}$ e $\underline{w} = 2\underline{i} - \underline{j}$, calcolare e disegnare $\underline{v} + \underline{w}$ e $\underline{v} - \underline{w}$

Soluzione: $\underline{v} + \underline{w} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{i} - \underline{j} = 3\underline{i} + \underline{j}$

$\underline{v} - \underline{w} = \underline{i} + 2\underline{j} - (2\underline{i} - \underline{j}) = \underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{i} + \underline{j} =$

$= -\underline{i} + 3\underline{j}$





② Dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ dati prima, calcolarne $\underline{v} \cdot \underline{w}$ e $\underline{v} \wedge \underline{w}$.

Soluzione: $\underline{v} \cdot \underline{w} = (\underline{i} + 2\underline{j}) \cdot (2\underline{i} - \underline{j}) = \underbrace{\underline{i} \cdot 2\underline{i}}_{= 2\underline{i}\cdot\underline{i} = 2} + \underbrace{\underline{i} \cdot (-\underline{j})}_{= -\underline{i}\cdot\underline{j} = 0} +$

$+ \underbrace{2\underline{j} \cdot 2\underline{i}}_{= 4\underline{j}\cdot\underline{i} = 0} + \underbrace{2\underline{j} \cdot (-\underline{j})}_{-2\underline{j}\cdot\underline{j} = -2} = 2 - 2 = 0$

Infatti i due vettori sono ortogonali.

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = (\underline{i} + 2\underline{j}) \wedge (2\underline{i} - \underline{j}) = \underline{i} \wedge (2\underline{i}) + \underline{i} \wedge (-\underline{j}) +$$

$$+ 2\underline{j} \wedge 2\underline{i} + 2\underline{j} \wedge (-\underline{j}) =$$

$$= 2\underbrace{\underline{i} \wedge \underline{i}}_{=0} - \underbrace{\underline{i} \wedge \underline{j}}_{=\underline{k}} + 4\underbrace{\underline{i} \wedge \underline{j}}_{=\underline{k}} - 2\underbrace{\underline{j} \wedge \underline{j}}_{=0} = -\underline{k} + 4\underline{k} = 3\underline{k}$$

Quanto fa $\underline{v} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$?

Poiché $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è ortogonale al piano di $\underline{v}$ e $\underline{w}$, in particolare è ortogonale a $\underline{v}$ e $\underline{w}$. Quindi il prodotto scalare per $\underline{v}$ sarà nullo e così il prodotto scalare per qualsiasi vettore nel piano generato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

③ Calcolare il modulo del vettore

$$\underline{v} = \underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}.$$

<u>Soluzione</u> : $\boxed{|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}}$ Nel nostro caso:

$$|\underline{v}| = \sqrt{(\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}) \cdot (\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k})} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

④ Calcolare il coseno dell'angolo tra

$\underline{v} = -\underline{i} + 2\underline{j}$ e $\underline{w} = \underline{i} + 3\underline{k}$

<u>Soluzione</u>: Se α è l'angolo tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$, allora

$$\cos(\alpha) = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}||\underline{w}|} = \frac{(-\underline{i} + 2\underline{j}) \cdot (\underline{i} + 3\underline{k})}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+4}\,\sqrt{1+9}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$\boxed{\text{Poiché } \cos(\alpha) < 0 \text{, l'angolo è ottuso.}}$ maggiore di $\pi/2$

⑤ Dati $\underline{v} = \underline{i} + \underline{j}$, $\underline{w} = \underline{i} - \underline{j}$, $\underline{z} = \underline{j} + \underline{k}$, calcolare

$$\underline{v} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{z}).$$

<u>Soluzione</u>: Usiamo la formula

$$\boxed{\underline{v} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{z}) = \underline{w}\,(\underline{v} \cdot \underline{z}) - \underline{z}\,(\underline{v} \cdot \underline{w})}$$

$$= [\underbrace{(\underline{i} + \underline{j}) \cdot (\underline{j} + \underline{k})}_{1}]\,\underline{w} - [\underbrace{(\underline{i} + \underline{j}) \cdot (\underline{i} - \underline{j})}_{0}]\,\underline{z} = \underline{w}.$$

Usando i prodotti vettoriali, invece:

$$\underline{v} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{z}) = \underline{v} \wedge [(\underline{i}-\underline{j}) \wedge (\underline{j}+\underline{k})]$$

$$= \underline{v} \wedge [\underline{k} - \underline{j} - \underline{i}] = (\underline{i}+\underline{j}) \wedge (\underline{k} - \underline{j} - \underline{i})$$

$$= -\underline{j} - \underline{k} + \underline{i} + \underline{k} = \underline{i} - \underline{j} = \underline{w}.$$

6 Calcolare la componente di $\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j}$ rispetto al versore $\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})$.

__Soluzione__ Basta calcolare il prodotto scalare:

$$\underline{v} \cdot \underline{u} = (\underline{i} + 2\underline{j}) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + 2\underline{j}) \cdot (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$