Problema quadratico biparametrico agli autovalori (QMEP)

Luca Ferragina

Universitá di Pisa

Seminario di Calcolo Scientifico

Sommario

Definizione del QMEP

Definizione

Un problema quadratico agli autovalori (QMEP) (biparametrico) nella forma generale é dato da:

$$Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(1)} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11} + \mu^2 A_{02})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(2)} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11} + \mu^2 B_{02})\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$

dove $A_{jk} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$,$B_{jk} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ e $\boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathbb{C}^{n_i}$ per $i = 1, 2$.

D'ora in avanti assumeremo sempre $n_1 = n_2 = n$.

Definizione del QMEP

Definizione

Un problema quadratico agli autovalori (QMEP) (biparametrico) nella forma generale é dato da:

$$Q_1(\lambda,\mu)\mathbf{x}^{(1)} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11} + \mu^2 A_{02})\mathbf{x}^{(1)} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\mathbf{x}^{(2)} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11} + \mu^2 B_{02})\mathbf{x}^{(2)} = 0$$

dove $A_{jk} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$,$B_{jk} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ e $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{C}^{n_i}$ per $i = 1, 2$.
D'ora in avanti assumeremo sempre $n_1 = n_2 = n$.

Definizione del QMEP

- Diremo che (λ, μ) é un autovalore del QMEP e il prodotto tensore $\boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)}$ é il corrispondente autovettore.
- Grazie al teorema di Bezout sulle intersezioni di due curve proiettive possiamo dire che, nel caso generico, il QMEP ha $4n^2$ autovalori che corrispondono alle radici dei polinomi caratteristici $det(Q_i(\lambda, \mu)) = 0$.

Definizione del QMEP

- Diremo che (λ, μ) é un autovalore del QMEP e il prodotto tensore $\boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)}$ é il corrispondente autovettore.
- Grazie al teorema di Bezout sulle intersezioni di due curve proiettive possiamo dire che, nel caso generico, il QMEP ha $4n^2$ autovalori che corrispondono alle radici dei polinomi caratteristici $det(Q_i(\lambda, \mu)) = 0$.

Fatti utili sul MEP

MEP omogeneo

Definizione

Un problema agli autovalori multiparametrico omogeneo (MEP-h) nella forma generale é dato da:

$$W_i^h(\boldsymbol{\eta})\mathbf{x}^{(i)} = \sum_{j=0}^{k} \eta_j V_{ij}\mathbf{x}^{(i)} = 0 \qquad \text{i=1,...,k}$$

con $V_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ e $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{C}^{n_i}$

- Una (k+1)-pla $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \ldots, \eta_k)$ che soddisfa il MEP-h si dice autovalore
- mentre il prodotto tensore $\bigotimes_{i=1}^{k} \mathbf{x}^{(i)}$ é il corrispondente autovettore

MEP omogeneo

Definizione

Un problema agli autovalori multiparametrico omogeneo (MEP-h) nella forma generale é dato da:

$$W_i^h(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{x}^{(i)} = \sum_{j=0}^{k} \eta_j V_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)} = 0 \qquad \text{i=1,...,k}$$

con $V_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ e $\boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathbb{C}^{n_i}$

- Una (k+1)-pla $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \ldots, \eta_k)$ che soddisfa il MEP-h si dice autovalore
- mentre il prodotto tensore $\bigotimes_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}^{(i)}$ é il corrispondente autovettore

MEP omogeneo

Definizione

Un problema agli autovalori multiparametrico omogeneo (MEP-h) nella forma generale é dato da:

$$W_i^h(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{x^{(i)}} = \sum_{j=0}^{k} \eta_j V_{ij}\boldsymbol{x^{(i)}} = 0 \qquad \text{i=1,...,k}$$

con $V_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ e $\boldsymbol{x^{(i)}} \in \mathbb{C}^{n_i}$

- Una (k+1)-pla $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \ldots, \eta_k)$ che soddisfa il MEP-h si dice autovalore
- mentre il prodotto tensore $\bigotimes_{i=1}^{k} \boldsymbol{x^{(i)}}$ é il corrispondente autovettore

MEP omogeneo

Definizione

Un problema agli autovalori multiparametrico omogeneo (MEP-h) nella forma generale é dato da:

$$W_i^h(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{x}^{(i)} = \sum_{j=0}^{k} \eta_j V_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)} = 0 \qquad \text{i=1,...,k}$$

con $V_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ e $\boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathbb{C}^{n_i}$

- Una (k+1)-pla $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \ldots, \eta_k)$ che soddisfa il MEP-h si dice autovalore
- mentre il prodotto tensore $\bigotimes_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}^{(i)}$ é il corrispondente autovettore

MEP omogeneo

In pratica un MEP-h é determinato dalle seguenti matrici:

$$\begin{matrix} V_{10} & V_{11} & \dots & V_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{k0} & V_{k1} & \dots & V_{kk} \end{matrix}$$

Operatori determinanti

Studieremo il MEP-h nello spazio $\bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{n_i} \simeq \mathbb{C}^N$, dove $N = \prod_{i=1}^{k} n_i$. Le trasformazioni lineari V_{ij} su $\mathbb{C}^{n_i}$ possono essere estese a $\mathbb{C}^N$:

$$V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \dots x_k)$$

Lemma

Se $i \neq h$, allora $V_{ij}^{\dagger}$ e $V_{hj}^{\dagger}$ commutano fra loro.

Dim.

$$\begin{aligned} V_{ij}^{\dagger} V_{hj}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) &= V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \dots x_k) \\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \cdots \otimes x_k) \\ &= V_{hj}^{\dagger} V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \end{aligned}$$

$\square$

Operatori determinanti

Studieremo il MEP-h nello spazio $\bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{n_i} \simeq \mathbb{C}^N$, dove $N = \prod_{i=1}^{k} n_i$. Le trasformazioni lineari V_{ij} su $\mathbb{C}^{n_i}$ possono essere estese a $\mathbb{C}^N$:

$$V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \ldots x_k)$$

Lemma

Se $i \neq h$, allora $V_{ij}^{\dagger}$ e $V_{hj}^{\dagger}$ commutano fra loro.

Dim.

$$\begin{aligned} V_{ij}^{\dagger} V_{hj}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) &= V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \ldots x_k) \\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \cdots \otimes x_k) \\ &= V_{hj}^{\dagger} V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \end{aligned}$$

$\square$

Operatori determinanti

Studieremo il MEP-h nello spazio $\bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{n_i} \simeq \mathbb{C}^N$, dove $N = \prod_{i=1}^{k} n_i$. Le trasformazioni lineari V_{ij} su $\mathbb{C}^{n_i}$ possono essere estese a $\mathbb{C}^N$:

$$V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \ldots x_k)$$

Lemma

Se $i \neq h$, allora $V_{ij}^{\dagger}$ e $V_{hj}^{\dagger}$ commutano fra loro.

Dim.

$$\begin{aligned} V_{ij}^{\dagger}V_{hj}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) &= V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \ldots x_k) \\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \cdots \otimes x_k) \\ &= V_{hj}^{\dagger}V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \end{aligned}$$

□

Operatori determinanti

Studieremo il MEP-h nello spazio $\bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{n_i} \simeq \mathbb{C}^N$, dove $N = \prod_{i=1}^{k} n_i$. Le trasformazioni lineari V_{ij} su $\mathbb{C}^{n_i}$ possono essere estese a $\mathbb{C}^N$:

$$V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \ldots x_k)$$

Lemma

Se $i \neq h$, allora $V_{ij}^{\dagger}$ e $V_{hj}^{\dagger}$ commutano fra loro.

Dim.

$$\begin{aligned} V_{ij}^{\dagger}V_{hj}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) &= V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \ldots x_k) \\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes V_{ij}x_i \otimes \cdots \otimes V_{hj}x_h \otimes \cdots \otimes x_k) \\ &= V_{hj}^{\dagger}V_{ij}^{\dagger}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \end{aligned}$$

□

Operatori determinanti

Considero la seguente matrice $k \times k$ e il seguente vettore di lunghezza k:

$$L = \begin{bmatrix} V^\dagger_{11} & \dots & V^\dagger_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V^\dagger_{k1} & \dots & V^\dagger_{kk} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} V^\dagger_{10} \\ \vdots \\ V^\dagger_{k0} \end{bmatrix}$$

Osservando che questi sono a coefficienti matriciali, possiamo dare la seguente definizione, grazie al lemma precedente:

Definizione

L'operatore determinante Δ_0 si definisce come:

$$\Delta_0 = det(L)$$

Analogamente l'operatore Δ_i é il determinante della matrice L a cui é stata sostituita l'i-esima colonna con $\boldsymbol{f}$

Operatori determinanti

Considero la seguente matrice $k \times k$ e il seguente vettore di lunghezza k:

$$L = \begin{bmatrix} V^\dagger_{11} & \dots & V^\dagger_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V^\dagger_{k1} & \dots & V^\dagger_{kk} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} V^\dagger_{10} \\ \vdots \\ V^\dagger_{k0} \end{bmatrix}$$

Osservando che questi sono a coefficienti matriciali, possiamo dare la seguente definizione, grazie al lemma precedente:

Definizione

L'operatore determinante Δ_0 si definisce come:

$$\Delta_0 = det(L)$$

Analogamente l'operatore Δ_i é il determinante della matrice L a cui é stata sostituita l'i-esima colonna con $\boldsymbol{f}$

Operatori determinanti

Considero la seguente matrice $k \times k$ e il seguente vettore di lunghezza k:

$$L = \begin{bmatrix} V_{11}^{\dagger} & \dots & V_{1k}^{\dagger} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{k1}^{\dagger} & \dots & V_{kk}^{\dagger} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} V_{10}^{\dagger} \\ \vdots \\ V_{k0}^{\dagger} \end{bmatrix}$$

Osservando che questi sono a coefficienti matriciali, possiamo dare la seguente definizione, grazie al lemma precedente:

Definizione

L'operatore determinante Δ_0 si definisce come:

$$\Delta_0 = det(L)$$

Analogamente l'operatore Δ_i é il determinante della matrice L a cui é stata sostituita l'i-esima colonna con $\boldsymbol{f}$

Operatori determinanti

Considero la seguente matrice $k \times k$ e il seguente vettore di lunghezza k:

$$L = \begin{bmatrix} V_{11}^{\dagger} & \dots & V_{1k}^{\dagger} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{k1}^{\dagger} & \dots & V_{kk}^{\dagger} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} V_{10}^{\dagger} \\ \vdots \\ V_{k0}^{\dagger} \end{bmatrix}$$

Osservando che questi sono a coefficienti matriciali, possiamo dare la seguente definizione, grazie al lemma precedente:

Definizione

L'operatore determinante Δ_0 si definisce come:

$$\Delta_0 = det(L)$$

Analogamente l'operatore Δ_i é il determinante della matrice L a cui é stata sostituita l'i-esima colonna con $\boldsymbol{f}$

MEP-h non singolari

Definizione

Un MEP-h si dice non singolare se esiste una combinazione lineare non singolare degli operatori determinanti:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta_i$$

Il seguente teorema (che non dimostreremo) fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la non singolaritá di un MEP-h.

Teorema

I fatti seguenti sono equivalenti:

- *La matrice* $\Delta = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta_i$ *é non singolare.*
- *Se* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \ldots, \eta_k)$ *é un autovalore del MEP-h allora* $\sum_{i=0}^{k} \eta_i \alpha_i \neq 0$

MEP-h non singolari

Definizione

Un MEP-h si dice non singolare se esiste una combinazione lineare non singolare degli operatori determinanti:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta_i$$

Il seguente teorema (che non dimostreremo) fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la non singolaritá di un MEP-h.

Teorema

I fatti seguenti sono equivalenti:

- *La matrice $\Delta = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta_i$ é non singolare.*
- *Se $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \ldots, \eta_k)$ é un autovalore del MEP-h allora $\sum_{i=0}^{k} \eta_i \alpha_i \neq 0$*

MEP-h non singolari

Definizione

Un MEP-h si dice non singolare se esiste una combinazione lineare non singolare degli operatori determinanti:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta_i$$

Il seguente teorema (che non dimostreremo) fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la non singolaritá di un MEP-h.

Teorema

I fatti seguenti sono equivalenti:

- *La matrice* $\Delta = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta_i$ *é non singolare.*
- *Se* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \ldots, \eta_k)$ *é un autovalore del MEP-h allora* $\sum_{i=0}^{k} \eta_i \alpha_i \neq 0$

Equivalenza fra il MEP-h e il problema generalizzato

Fatto 1

Un MEP-h non singolare é equivalente all'intersezione dei seguenti problemi agli autovalori generalizzati:

$$\Delta_i \boldsymbol{x} = \eta_i \Delta \boldsymbol{x} \qquad i = 1, \dots, k$$

Dove $\boldsymbol{x} = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \in \mathbb{C}$
Inoltre le matrici $\Delta^{-1}\Delta_i$ commutano fra loro.

Fatto 2

Sia $S \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ una famiglia commutativa. Allora esiste una matrice unitaria Q tale che $Q^H A Q$ é la forma di Schur di A per ogni $A \in S$.

Equivalenza fra il MEP-h e il problema generalizzato

Fatto 1

Un MEP-h non singolare é equivalente all'intersezione dei seguenti problemi agli autovalori generalizzati:

$$\Delta_i \boldsymbol{x} = \eta_i \Delta \boldsymbol{x} \qquad i = 1, \dots, k$$

Dove $\boldsymbol{x} = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \in \mathbb{C}$
Inoltre le matrici $\Delta^{-1}\Delta_i$ commutano fra loro.

Fatto 2

Sia $S \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ una famiglia commutativa. Allora esiste una matrice unitaria Q tale che $Q^H A Q$ é la forma di Schur di A per ogni $A \in S$.

Algoritmo di risoluzione del MEP omogeneo

A questo punto siamo in grado di mettere insieme tutte le informazioni enunciate sul MEP omogeneo non singolare per costruire un algoritmo che lo risolva:

Algoritmo

- Date le matrici V_{ij} le estendiamo a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ, Δ_i e $A_i = \Delta^{-1}\Delta_i$
- Otteniamo i k problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A_i - \lambda I)z = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

che risolviamo calcolando la matrice Q tale che $S_i = Q^H A_i Q$ é la forma di Schur di A_i.

Algoritmo di risoluzione del MEP omogeneo

A questo punto siamo in grado di mettere insieme tutte le informazioni enunciate sul MEP omogeneo non singolare per costruire un algoritmo che lo risolva:

Algoritmo

- Date le matrici V_{ij} le estendiamo a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ, Δ_i e $A_i = \Delta^{-1}\Delta_i$
- Otteniamo i k problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A_i - \lambda I)z = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

che risolviamo calcolando la matrice Q tale che $S_i = Q^H A_i Q$ é la forma di Schur di A_i.

Algoritmo di risoluzione del MEP omogeneo

A questo punto siamo in grado di mettere insieme tutte le informazioni enunciate sul MEP omogeneo non singolare per costruire un algoritmo che lo risolva:

Algoritmo

- Date le matrici V_{ij} le estendiamo a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ, Δ_i e $A_i = \Delta^{-1}\Delta_i$
- Otteniamo i k problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A_i - \lambda I)z = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

che risolviamo calcolando la matrice Q tale che $S_i = Q^H A_i Q$ é la forma di Schur di A_i.

Algoritmo di risoluzione del MEP omogeneo

A questo punto siamo in grado di mettere insieme tutte le informazioni enunciate sul MEP omogeneo non singolare per costruire un algoritmo che lo risolva:

Algoritmo

- Date le matrici V_{ij} le estendiamo a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ, Δ_i e $A_i = \Delta^{-1}\Delta_i$
- Otteniamo i k problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A_i - \lambda I)z = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

che risolviamo calcolando la matrice Q tale che $S_i = Q^H A_i Q$ é la forma di Schur di A_i.

Algoritmo di risoluzione del MEP omogeneo

A questo punto siamo in grado di mettere insieme tutte le informazioni enunciate sul MEP omogeneo non singolare per costruire un algoritmo che lo risolva:

Algoritmo

- Date le matrici V_{ij} le estendiamo a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ, Δ_i e $A_i = \Delta^{-1}\Delta_i$
- Otteniamo i k problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A_i - \lambda I)z = 0 \qquad i = 1, \dots, k$$

che risolviamo calcolando la matrice Q tale che $S_i = Q^H A_i Q$ é la forma di Schur di A_i.

MEP non omogenei

Solitamente i problemi di fronte a cui ci si trova sono MEP non omogenei, della forma:

$$W_i(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}^{(i)} = V_{i0}\mathbf{x}^{(i)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j V_{ij}\mathbf{x}^{(i)} = 0 \qquad i = 1, \dots, k$$

dove l'autovalore $\boldsymbol{\lambda}$ é una k-upla.

Un problema di questo tipo é detto non singolare se Δ_0 é non singolare.

Osservazioni

- Si vede facilmente che $W_i^h(1, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = W_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e quindi dal problema non omogeneo ci si puó ricondurre a quello omogeneo.
- Se $\boldsymbol{\eta}$ é un autovalore del MEP-h tale che $\eta_0 \neq 0$, allora $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, \frac{\eta_k}{\eta_0})$ é un autovalore del MEP.

MEP non omogenei

Solitamente i problemi di fronte a cui ci si trova sono MEP non omogenei, della forma:

$$W_i(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}^{(i)} = V_{i0}\mathbf{x}^{(i)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j V_{ij}\mathbf{x}^{(i)} = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

dove l'autovalore $\boldsymbol{\lambda}$ é una k-upla.

Un problema di questo tipo é detto non singolare se Δ_0 é non singolare.

Osservazioni

- Si vede facilmente che $W_i^h(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = W_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ e quindi dal problema non omogeneo ci si puó ricondurre a quello omogeneo.
- Se $\boldsymbol{\eta}$ é un autovalore del MEP-h tale che $\eta_0 \neq 0$, allora $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{\eta_1}{\eta_0}, \ldots, \frac{\eta_k}{\eta_0})$ é un autovalore del MEP.

MEP non omogenei

Solitamente i problemi di fronte a cui ci si trova sono MEP non omogenei, della forma:

$$W_i(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}^{(i)} = V_{i0}\mathbf{x}^{(i)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j V_{ij}\mathbf{x}^{(i)} = 0 \qquad i = 1, \ldots, k$$

dove l'autovalore $\boldsymbol{\lambda}$ é una k-upla.

Un problema di questo tipo é detto non singolare se Δ_0 é non singolare.

Osservazioni

- Si vede facilmente che $W_i^h(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = W_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ e quindi dal problema non omogeneo ci si puó ricondurre a quello omogeneo.
- Se $\boldsymbol{\eta}$ é un autovalore del MEP-h tale che $\eta_0 \neq 0$, allora $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{\eta_1}{\eta_0}, \ldots, \frac{\eta_k}{\eta_0})$ é un autovalore del MEP.

MEP non omogenei

Solitamente i problemi di fronte a cui ci si trova sono MEP non omogenei, della forma:

$$W_i(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x^{(i)}} = V_{i0}\mathbf{x^{(i)}} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j V_{ij}\mathbf{x^{(i)}} = 0 \qquad i = 1, \dots, k$$

dove l'autovalore $\boldsymbol{\lambda}$ é una k-upla.

Un problema di questo tipo é detto non singolare se Δ_0 é non singolare.

Osservazioni

- Si vede facilmente che $W_i^h(1, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = W_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e quindi dal problema non omogeneo ci si puó ricondurre a quello omogeneo.
- Se $\boldsymbol{\eta}$ é un autovalore del MEP-h tale che $\eta_0 \neq 0$, allora $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, \frac{\eta_k}{\eta_0})$ é un autovalore del MEP.

MEP non omogenei

Solitamente i problemi di fronte a cui ci si trova sono MEP non omogenei, della forma:

$$W_i(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}^{(i)} = V_{i0}\mathbf{x}^{(i)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j V_{ij}\mathbf{x}^{(i)} = 0 \qquad i = 1, \dots, k$$

dove l'autovalore $\boldsymbol{\lambda}$ é una k-upla.

Un problema di questo tipo é detto non singolare se Δ_0 é non singolare.

Osservazioni

- Si vede facilmente che $W_i^h(1, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = W_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e quindi dal problema non omogeneo ci si puó ricondurre a quello omogeneo.
- Se $\boldsymbol{\eta}$ é un autovalore del MEP-h tale che $\eta_0 \neq 0$, allora $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, \frac{\eta_k}{\eta_0})$ é un autovalore del MEP.

MEP non omogenei

- Se abbiamo un MEP non omogeneo non singolare, allora possiamo considerare il MEP-h definito dalle stesse V_{ij}. Se per quest'ultimo prendiamo $\Delta = \Delta_0$, segue dal teorema che $\eta_0 \neq 0$.
- Se invece il MEP é singolare, allora deve esistere almeno un autovalore η del MEP-h corrispondente tale che $\eta_0 = 0$. In questo caso si dice che il MEP non omogeneo ha un autovalore infinito.
- Un MEP non singolare é equivalente all'intersezione dei seguenti problemi generalizzati agli autovalori:

$$\Delta_i \boldsymbol{x} = \lambda_i \Delta_0 \boldsymbol{x} \qquad i = 1, \dots, k$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1 \otimes, \dots, \otimes x_k)$.

MEP non omogenei

- Se abbiamo un MEP non omogeneo non singolare, allora possiamo considerare il MEP-h definito dalle stesse V_{ij}. Se per quest'ultimo prendiamo $\Delta = \Delta_0$, segue dal teorema che $\eta_0 \neq 0$.
- Se invece il MEP é singolare, allora deve esistere almeno un autovalore $\boldsymbol{\eta}$ del MEP-h corrispondente tale che $\eta_0 = 0$. In questo caso si dice che il MEP non omogeneo ha un autovalore infinito.
- Un MEP non singolare é equivalente all'intersezione dei seguenti problemi generalizzati agli autovalori:

$$\Delta_i \boldsymbol{x} = \lambda_i \Delta_0 \boldsymbol{x} \qquad i = 1, \ldots, k$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1 \otimes, \ldots, \otimes x_k)$.

MEP non omogenei

- Se abbiamo un MEP non omogeneo non singolare, allora possiamo considerare il MEP-h definito dalle stesse V_{ij}. Se per quest'ultimo prendiamo $\Delta = \Delta_0$, segue dal teorema che $\eta_0 \neq 0$.
- Se invece il MEP é singolare, allora deve esistere almeno un autovalore $\boldsymbol{\eta}$ del MEP-h corrispondente tale che $\eta_0 = 0$. In questo caso si dice che il MEP non omogeneo ha un autovalore infinito.
- Un MEP non singolare é equivalente all'intersezione dei seguenti problemi generalizzati agli autovalori:

$$\Delta_i \boldsymbol{x} = \lambda_i \Delta_0 \boldsymbol{x} \qquad i = 1, \dots, k$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1 \otimes, \dots, \otimes x_k)$.

Le linearizzazioni di Khazanov e Muhic-Plestenjak

Prima forma compagna

Definizione

Sia $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ un polinomio di grado due a coefficienti matriciali.

Si definisce prima forma compagna di $Q(\lambda)$ la seguente matrice:

$$Q^c(\lambda) = \begin{bmatrix} K & C \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & M \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Prima forma compagna

Definizione

Sia $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ un polinomio di grado due a coefficienti matriciali.
Si definisce prima forma compagna di $Q(\lambda)$ la seguente matrice:

$$Q^c(\lambda) = \begin{bmatrix} K & C \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & M \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Prima forma compagna

Lemma

Esistono due matrici $E(\lambda)$ e $F(\lambda)$, i cui determinanti sono costanti diverse da zero, tali che:

$$E(\lambda)Q^c(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Dim.

Basta considerare

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} I & C + \lambda M \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad e \qquad \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda I & -I \end{bmatrix}$$

Prima forma compagna

Lemma

Esistono due matrici $E(\lambda)$ e $F(\lambda)$, i cui determinanti sono costanti diverse da zero, tali che:

$$E(\lambda)Q^c(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Dim.

Basta considerare

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} I & C + \lambda M \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad e \qquad \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda I & -I \end{bmatrix}$$

$\square$

Linearizzazioni

Definizione

Considero una matrice polinomiale $n \times n$ $Q(\lambda, \mu)$. Una combinazione di matrici $ln \times ln$, $L(\lambda, \mu) = A + \lambda B + \mu C$ é una linearizzazione di ordine ln di $Q(\lambda, \mu)$ se esistono due matrici polinomiali $P(\lambda, \mu)$ e $R(\lambda, \mu)$, i cui determinanti sono delle costanti non nulle indipendenti da λ e μ, tali che:

$$\begin{bmatrix} Q(\lambda, \mu) & 0 \\ 0 & I_{(l-1)n} \end{bmatrix} = P(\lambda, \mu) L(\lambda, \mu) R(\lambda, \mu)$$

Linearizzazione di Khazanov

Affrontiamo ora il problema del QMEP. In questo approccio partiamo da $Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$ e lo scriviamo come polinomio nella sola variabile λ:

$$(A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} + \lambda(A_{10} + \mu A_{11}) + \lambda^2 A_{20})\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$$

Ora usiamo la prima forma compagna e linearizziamo quest'ultima espressione come:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} & A_{10} + \mu A_{11} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^{(1)}} \\ \lambda \boldsymbol{x^{(1)}} \end{bmatrix} = 0$$

Di nuovo riscriviamo il tutto come un polinomio nella sola variabile μ:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} + \lambda A_{20} \\ \lambda I & -I \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^2 \begin{bmatrix} A_{02} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^{(1)}} \\ \lambda \boldsymbol{x^{(1)}} \end{bmatrix} = 0$$

Linearizzazione di Khazanov

Affrontiamo ora il problema del QMEP. In questo approccio partiamo da $Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$ e lo scriviamo come polinomio nella sola variabile λ:

$$(A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} + \lambda(A_{10} + \mu A_{11}) + \lambda^2 A_{20})\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$$

Ora usiamo la prima forma compagna e linearizziamo quest'ultima espressione come:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} & A_{10} + \mu A_{11} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^{(1)}} \\ \lambda \boldsymbol{x^{(1)}} \end{bmatrix} = 0$$

Di nuovo riscriviamo il tutto come un polinomio nella sola variabile μ:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} + \lambda A_{20} \\ \lambda I & -I \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^2 \begin{bmatrix} A_{02} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^{(1)}} \\ \lambda \boldsymbol{x^{(1)}} \end{bmatrix} = 0$$

Linearizzazione di Khazanov

Affrontiamo ora il problema del QMEP. In questo approccio partiamo da $Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$ e lo scriviamo come polinomio nella sola variabile λ:

$$(A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} + \lambda(A_{10} + \mu A_{11}) + \lambda^2 A_{20})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

Ora usiamo la prima forma compagna e linearizziamo quest'ultima espressione come:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} & A_{10} + \mu A_{11} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Di nuovo riscriviamo il tutto come un polinomio nella sola variabile μ:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} + \lambda A_{20} \\ \lambda I & -I \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^2 \begin{bmatrix} A_{02} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Linearizzazione di Khazanov

Affrontiamo ora il problema del QMEP. In questo approccio partiamo da $Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$ e lo scriviamo come polinomio nella sola variabile λ:

$$(A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} + \lambda(A_{10} + \mu A_{11}) + \lambda^2 A_{20})\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$$

Ora usiamo la prima forma compagna e linearizziamo quest'ultima espressione come:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} & A_{10} + \mu A_{11} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^{(1)}} \\ \lambda \boldsymbol{x^{(1)}} \end{bmatrix} = 0$$

Di nuovo riscriviamo il tutto come un polinomio nella sola variabile μ:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} + \lambda A_{20} \\ \lambda I & -I \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^2 \begin{bmatrix} A_{02} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x^{(1)}} \\ \lambda \boldsymbol{x^{(1)}} \end{bmatrix} = 0$$

Linearizzazione di Khazanov

Affrontiamo ora il problema del QMEP. In questo approccio partiamo da $Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$ e lo scriviamo come polinomio nella sola variabile λ:

$$(A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} + \lambda(A_{10} + \mu A_{11}) + \lambda^2 A_{20})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

Ora usiamo la prima forma compagna e linearizziamo quest'ultima espressione come:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} + \mu A_{01} + \mu^2 A_{02} & A_{10} + \mu A_{11} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Di nuovo riscriviamo il tutto come un polinomio nella sola variabile μ:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} + \lambda A_{20} \\ \lambda I & -I \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^2 \begin{bmatrix} A_{02} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Linearizzazione di Khazanov

A questo punto riutilizziamo la prima forma compagna:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} + \lambda A_{20} & A_{01} & A_{11} \\ \lambda I & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu\lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Che é equivalente a:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{01} & A_{11} \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu\lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Linearizzazione di Khazanov

- Poiché in questi passaggi abbiamo usato solamente la prima forma compagna, e questo equivale a moltiplicare a destra e a sinistra per matrici non singolari, quella di Khazanov é realmente una linearizzazione nel senso della definizione precedente.
- Ripetendo questo procedimento per il secondo polinomio $Q_2(\lambda, \mu)$ otteniamo un MEP bi-parametrico con matrici di taglia $4n \times 4n$, che puó essere risolto tramite la costruzione delle matrici Δ_i che avranno taglia $16n^2 \times 16n^2$. Omettiamo i dettagli, ma non é difficile vedere che il MEP cosí definito é singolare.

Linearizzazione di Khazanov

- Poiché in questi passaggi abbiamo usato solamente la prima forma compagna, e questo equivale a moltiplicare a destra e a sinistra per matrici non singolari, quella di Khazanov é realmente una linearizzazione nel senso della definizione precedente.
- Ripetendo questo procedimento per il secondo polinomio $Q_2(\lambda, \mu)$ otteniamo un MEP bi-parametrico con matrici di taglia $4n \times 4n$, che puó essere risolto tramite la costruzione delle matrici Δ_i che avranno taglia $16n^2 \times 16n^2$. Omettiamo i dettagli, ma non é difficile vedere che il MEP cosí definito é singolare.

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{01} & A_{11} \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu\lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} & B_{01} & B_{11} \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & B_{20} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu\lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Linearizzazione di Muhic-Plestenjak

Un'altra linearizzazione, della quale peró omettiamo la costruzione, é la seguente:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{01} \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} & A_{11} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

- Si puó dimostrare che quest'ultima linearizzazione puó essere ottenuta moltiplicando a destra e a sinistra la matrice della linearizzazione di Khazanov per due matrici con determinante costante diverso da zero, quindi é effettivamente una linearizzazione nel senso della definizione che abbiamo dato.
- Rispetto a quella di Khazanov questa linearizzazione ha il vantaggio di portare alla costruzione di matrici Δ_i di taglia piú piccola ($9n^2 \times 9n^2$), tuttavia si puó vedere che anche questa porta a definire un MEP singolare.

Linearizzazione di Muhic-Plestenjak

Un'altra linearizzazione, della quale peró omettiamo la costruzione, é la seguente:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{01} \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} & A_{11} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

- Si puó dimostrare che quest'ultima linearizzazione puó essere ottenuta moltiplicando a destra e a sinistra la matrice della linearizzazione di Khazanov per due matrici con determinante costante diverso da zero, quindi é effettivamente una linearizzazione nel senso della definizione che abbiamo dato.
- Rispetto a quella di Khazanov questa linearizzazione ha il vantaggio di portare alla costruzione di matrici Δ_i di taglia piú piccola ($9n^2 \times 9n^2$), tuttavia si puó vedere che anche questa porta a definire un MEP singolare.

Linearizzazione di Muhic-Plestenjak

Un'altra linearizzazione, della quale peró omettiamo la costruzione, é la seguente:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{01} \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} & A_{11} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \mu \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

- Si puó dimostrare che quest'ultima linearizzazione puó essere ottenuta moltiplicando a destra e a sinistra la matrice della linearizzazione di Khazanov per due matrici con determinante costante diverso da zero, quindi é effettivamente una linearizzazione nel senso della definizione che abbiamo dato.
- Rispetto a quella di Khazanov questa linearizzazione ha il vantaggio di portare alla costruzione di matrici Δ_i di taglia piú piccola $(9n^2 \times 9n^2)$, tuttavia si puó vedere che anche questa porta a definire un MEP singolare.

Una nuova linearizzazione

L'approccio che vedremo in questa sezione non porta ad una linearizzazione nel senso che abbiamo inteso finora, tuttavia ci permetterá di ottenere un MEP che, oltre ad essere di dimensioni leggermente minori, ha il notevole pregio di essere non singolare.
Partiamo dalla forma base del QMEP

$$Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(1)} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11} + \mu^2 A_{02})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(2)} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11} + \mu^2 B_{02})\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$

e introduciamo tre nuove variabili: $\alpha = \lambda^2$, $\beta = \lambda\mu$ e $\gamma = \mu^2$.
Possiamo ora riscrivere il QMEP come un MEP con 5 parametri.

Una nuova linearizzazione

L'approccio che vedremo in questa sezione non porta ad una linearizzazione nel senso che abbiamo inteso finora, tuttavia ci permetterá di ottenere un MEP che, oltre ad essere di dimensioni leggermente minori, ha il notevole pregio di essere non singolare.

Partiamo dalla forma base del QMEP

$$Q_1(\lambda,\mu)\mathbf{x}^{(1)} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11} + \mu^2 A_{02})\mathbf{x}^{(1)} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\mathbf{x}^{(2)} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11} + \mu^2 B_{02})\mathbf{x}^{(2)} = 0$$

e introduciamo tre nuove variabili: $\alpha = \lambda^2$, $\beta = \lambda\mu$ e $\gamma = \mu^2$.

Possiamo ora riscrivere il QMEP come un MEP con 5 parametri.

Una nuova linearizzazione

L'approccio che vedremo in questa sezione non porta ad una linearizzazione nel senso che abbiamo inteso finora, tuttavia ci permetterá di ottenere un MEP che, oltre ad essere di dimensioni leggermente minori, ha il notevole pregio di essere non singolare.
Partiamo dalla forma base del QMEP

$$Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(1)} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11} + \mu^2 A_{02})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(2)} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11} + \mu^2 B_{02})\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$

e introduciamo tre nuove variabili: $\alpha = \lambda^2$, $\beta = \lambda\mu$ e $\gamma = \mu^2$.
Possiamo ora riscrivere il QMEP come un MEP con 5 parametri.

Una nuova linearizzazione

L'approccio che vedremo in questa sezione non porta ad una linearizzazione nel senso che abbiamo inteso finora, tuttavia ci permetterá di ottenere un MEP che, oltre ad essere di dimensioni leggermente minori, ha il notevole pregio di essere non singolare.
Partiamo dalla forma base del QMEP

$$Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x^{(1)}} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11} + \mu^2 A_{02})\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\boldsymbol{x^{(2)}} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11} + \mu^2 B_{02})\boldsymbol{x^{(2)}} = 0$$

e introduciamo tre nuove variabili: $\alpha = \lambda^2$, $\beta = \lambda\mu$ e $\gamma = \mu^2$.
Possiamo ora riscrivere il QMEP come un MEP con 5 parametri.

Una nuova linearizzazione

$$(A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \alpha A_{20} + \beta A_{11} + \gamma A_{02})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$
$$(B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \alpha B_{20} + \beta B_{11} + \gamma B_{02})\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y}^{(1)} = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y}^{(2)} = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y}^{(3)} = 0$$

É facile vedere che se $((\lambda, \mu), \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)})$ é una coppia autovalore-autovettore del QMEP, allora

$$\left((\lambda, \mu, \lambda^2, \lambda\mu, \mu^2), \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)} \otimes \begin{bmatrix}1\\\lambda\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\\lambda\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\\mu\end{bmatrix}\right) \text{ é una coppia}$$

autovalore-autovettore del MEP corrispondente.

Una nuova linearizzazione

$$(A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \alpha A_{20} + \beta A_{11} + \gamma A_{02})\boldsymbol{x^{(1)}} = 0$$
$$(B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \alpha B_{20} + \beta B_{11} + \gamma B_{02})\boldsymbol{x^{(2)}} = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y^{(1)}} = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y^{(2)}} = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y^{(3)}} = 0$$

É facile vedere che se $((\lambda, \mu), \boldsymbol{x^{(1)}} \otimes \boldsymbol{x^{(2)}})$ é una coppia autovalore-autovettore del QMEP, allora

$$\left((\lambda, \mu, \lambda^2, \lambda\mu, \mu^2), \boldsymbol{x^{(1)}} \otimes \boldsymbol{x^{(2)}} \otimes \begin{bmatrix}1\\\lambda\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\\lambda\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\\mu\end{bmatrix}\right) \text{ é una coppia}$$

autovalore-autovettore del MEP corrispondente.

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori determinanti Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari

Dim.

La versione omogenea del nostro MEP si ottiene ponendo $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}$ $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}}$ $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\eta}}$ $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\eta}}$ $\gamma = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\eta}}$ e moltiplicando tutte le equazioni per $\tilde{\eta}$.Considerando i polinomi caratteristici, otteniamo le seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
det(\tilde{\eta}A_{00} + \tilde{\lambda}A_{10} + \tilde{\mu}A_{01} + \tilde{\alpha}A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) &= 0 \\
det(\tilde{\eta}B_{00} + \tilde{\lambda}B_{10} + \tilde{\mu}B_{01} + \tilde{\alpha}B_{20} + \tilde{\beta}B_{11} + \tilde{\gamma}B_{02}) &= 0 \\
\tilde{\alpha}\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}^2 &= 0 \\
\tilde{\beta}\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}\tilde{\mu} &= 0 \\
\tilde{\gamma}\tilde{\eta} - \tilde{\mu}^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori determinanti Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari

Dim.

La versione omogenea del nostro MEP si ottiene ponendo $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}$ $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}}$ $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\eta}}$ $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\eta}}$ $\gamma = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\eta}}$ e moltiplicando tutte le equazioni per $\tilde{\eta}$. Considerando i polinomi caratteristici, otteniamo le seguenti equazioni:

$$det(\tilde{\eta}A_{00} + \tilde{\lambda}A_{10} + \tilde{\mu}A_{01} + \tilde{\alpha}A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$
$$det(\tilde{\eta}B_{00} + \tilde{\lambda}B_{10} + \tilde{\mu}B_{01} + \tilde{\alpha}B_{20} + \tilde{\beta}B_{11} + \tilde{\gamma}B_{02}) = 0$$
$$\tilde{\alpha}\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}^2 = 0$$
$$\tilde{\beta}\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}\tilde{\mu} = 0$$
$$\tilde{\gamma}\tilde{\eta} - \tilde{\mu}^2 = 0$$

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori determinanti Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari

Dim.

La versione omogenea del nostro MEP si ottiene ponendo $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}$ $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}}$ $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\eta}}$ $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\eta}}$ $\gamma = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\eta}}$ e moltiplicando tutte le equazioni per $\tilde{\eta}$.Considerando i polinomi caratteristici, otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
det(\tilde{\eta}A_{00} + \tilde{\lambda}A_{10} + \tilde{\mu}A_{01} + \tilde{\alpha}A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0 \\
det(\tilde{\eta}B_{00} + \tilde{\lambda}B_{10} + \tilde{\mu}B_{01} + \tilde{\alpha}B_{20} + \tilde{\beta}B_{11} + \tilde{\gamma}B_{02}) = 0 \\
\tilde{\alpha}\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}^2 = 0 \\
\tilde{\beta}\tilde{\eta} - \tilde{\lambda}\tilde{\mu} = 0 \\
\tilde{\gamma}\tilde{\eta} - \tilde{\mu}^2 = 0
\end{aligned}$$

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori determinanti Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari

Dim.

Supponiamo che $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$, allora dalla terza equazione segue che $\tilde{\lambda} = 0$, e quindi dalla quarta che $\tilde{\eta}\tilde{\beta} = 0$.
Distinguiamo due casi:
CASO 1 $(\tilde{\eta} = 0)$
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\mu} = 0)$. Quindi quello che rimane delle prime due equazioni é:

$$det(\tilde{\beta} A_{11} + \tilde{\gamma} A_{02}) = 0$$
$$det(\tilde{\beta} B_{11} + \tilde{\gamma} B_{02}) = 0$$

Nel caso generico questo non ha soluzione.

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori determinanti Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari

Dim.

Supponiamo che $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$, allora dalla terza equazione segue che $\tilde{\lambda} = 0$, e quindi dalla quarta che $\tilde{\eta}\tilde{\beta} = 0$.
Distinguiamo due casi:
CASO 1 $(\tilde{\eta} = 0)$
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\mu} = 0)$. Quindi quello che rimane delle prime due equazioni é:

$$det(\tilde{\beta} A_{11} + \tilde{\gamma} A_{02}) = 0$$
$$det(\tilde{\beta} B_{11} + \tilde{\gamma} B_{02}) = 0$$

Nel caso generico questo non ha soluzione.

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori determinanti Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari

Dim.

Supponiamo che $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$, allora dalla terza equazione segue che $\tilde{\lambda} = 0$, e quindi dalla quarta che $\tilde{\eta}\tilde{\beta} = 0$.
Distinguiamo due casi:
CASO 1 $(\tilde{\eta} = 0)$
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\mu} = 0)$. Quindi quello che rimane delle prime due equazioni é:

$$det(\tilde{\beta} A_{11} + \tilde{\gamma} A_{02}) = 0$$
$$det(\tilde{\beta} B_{11} + \tilde{\gamma} B_{02}) = 0$$

Nel caso generico questo non ha soluzione.

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori determinanti Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari

Dim.

Supponiamo che $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$, allora dalla terza equazione segue che $\tilde{\lambda} = 0$, e quindi dalla quarta che $\tilde{\eta}\tilde{\beta} = 0$.
Distinguiamo due casi:
CASO 1 $(\tilde{\eta} = 0)$
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\mu} = 0)$. Quindi quello che rimane delle prime due equazioni é:

$$det(\tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$
$$det(\tilde{\beta}B_{11} + \tilde{\gamma}B_{02}) = 0$$

Nel caso generico questo non ha soluzione.

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari.

Dim.

CASO 2 $(\tilde{\eta} \neq 0) \Rightarrow (\tilde{\beta} = 0)$.
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}})$. E dalle prime due si ha:

$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$

$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$

Anche questo non ha soluzione nel caso generico. Quindi il nostro MEP non puó avere un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$ e per il primo teorema sul MEP, Δ_3 é non singolare. Si ragiona in modo analogo per Δ_4 e Δ_5. □

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari.

Dim.

CASO 2 $(\tilde{\eta} \neq 0) \Rightarrow (\tilde{\beta} = 0)$.
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}})$. E dalle prime due si ha:

$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$

$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$

Anche questo non ha soluzione nel caso generico. Quindi il nostro MEP non puó avere un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$ e per il primo teorema sul MEP, Δ_3 é non singolare. Si ragiona in modo analogo per Δ_4 e Δ_5. □

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari.

Dim.

CASO 2 $(\tilde{\eta} \neq 0) \Rightarrow (\tilde{\beta} = 0)$.
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}})$. E dalle prime due si ha:

$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$
$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$

Anche questo non ha soluzione nel caso generico. Quindi il nostro MEP non puó avere un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$ e per il primo teorema sul MEP, Δ_3 é non singolare. Si ragiona in modo analogo per Δ_4 e Δ_5. □

Lemma

Nel caso generico, la versione omogenea del MEP con 5 parametri ottenuta é non singolare.
In particolare, gli operatori Δ_3, Δ_4, Δ_5 sono tutti non singolari.

Dim.

CASO 2 $(\tilde{\eta} \neq 0) \Rightarrow (\tilde{\beta} = 0)$.
Dall'ultima equazione risulta $(\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}})$. E dalle prime due si ha:

$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$
$$det(A_{00} + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\eta}} A_{11} + \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\eta}^2} A_{02}) = 0$$

Anche questo non ha soluzione nel caso generico. Quindi il nostro MEP non puó avere un autovalore tale che $\tilde{\alpha} = 0$ e per il primo teorema sul MEP, Δ_3 é non singolare. Si ragiona in modo analogo per Δ_4 e Δ_5. □

Grazie al lemma precedente possiamo porre $\Delta = \Delta_3$ e ridurre il MEP omogeneo ai seguenti problemi agli autovalori generalizzati:

$$(\Delta_0 - \tilde{\eta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_2 - \tilde{\mu}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_3 - \tilde{\alpha}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_4 - \tilde{\beta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_5 - \tilde{\gamma}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$

Dove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(1)} \otimes \boldsymbol{y}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(3)}$.

Osservazioni

- Grazie alla nostra scelta $\Delta = \Delta_3$ é ovvio che $\tilde{\alpha} = 1$.
- Come dimostreremo nel prossimo teorema, poiché non siamo interessati alla soluzione di tutto il MEP che abbiamo ricavato dalla linearizzazione, ma vogliamo risolvere il QMEP di partenza, sará sufficiente considerare solo due dei sistemi di sopra.

Grazie al lemma precedente possiamo porre $\Delta = \Delta_3$ e ridurre il MEP omogeneo ai seguenti problemi agli autovalori generalizzati:

$$(\Delta_0 - \tilde{\eta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_2 - \tilde{\mu}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$

$$(\Delta_3 - \tilde{\alpha}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_4 - \tilde{\beta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_5 - \tilde{\gamma}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$

Dove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(1)} \otimes \boldsymbol{y}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(3)}$.

Osservazioni

- Grazie alla nostra scelta $\Delta = \Delta_3$ é ovvio che $\tilde{\alpha} = 1$.
- Come dimostreremo nel prossimo teorema, poiché non siamo interessati alla soluzione di tutto il MEP che abbiamo ricavato dalla linearizzazione, ma vogliamo risolvere il QMEP di partenza, sará sufficiente considerare solo due dei sistemi di sopra.

Grazie al lemma precedente possiamo porre $\Delta = \Delta_3$ e ridurre il MEP omogeneo ai seguenti problemi agli autovalori generalizzati:

$$(\Delta_0 - \tilde{\eta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_2 - \tilde{\mu}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_3 - \tilde{\alpha}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_4 - \tilde{\beta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_5 - \tilde{\gamma}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$

Dove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(1)} \otimes \boldsymbol{y}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(3)}$.

Osservazioni

- Grazie alla nostra scelta $\Delta = \Delta_3$ é ovvio che $\tilde{\alpha} = 1$.
- Come dimostreremo nel prossimo teorema, poiché non siamo interessati alla soluzione di tutto il MEP che abbiamo ricavato dalla linearizzazione, ma vogliamo risolvere il QMEP di partenza, sará sufficiente considerare solo due dei sistemi di sopra.

Grazie al lemma precedente possiamo porre $\Delta = \Delta_3$ e ridurre il MEP omogeneo ai seguenti problemi agli autovalori generalizzati:

$$(\Delta_0 - \tilde{\eta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_2 - \tilde{\mu}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_3 - \tilde{\alpha}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_4 - \tilde{\beta}\Delta)\boldsymbol{z} = 0 \qquad (\Delta_5 - \tilde{\gamma}\Delta)\boldsymbol{z} = 0$$

Dove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(1)} \otimes \boldsymbol{y}^{(2)} \otimes \boldsymbol{y}^{(3)}$.

Osservazioni

- Grazie alla nostra scelta $\Delta = \Delta_3$ é ovvio che $\tilde{\alpha} = 1$.
- Come dimostreremo nel prossimo teorema, poiché non siamo interessati alla soluzione di tutto il MEP che abbiamo ricavato dalla linearizzazione, ma vogliamo risolvere il QMEP di partenza, sará sufficiente considerare solo due dei sistemi di sopra.

Teorema

Nel caso generico, la coppia di problemi

$$(\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta_3)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_2 - \tilde{\mu}\Delta_3)\boldsymbol{z} = 0$$

associata al QMEP, ha $8n^2$ autovalori $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$, di cui:

- *$4n^2$ sono tali che $\tilde{\lambda} \neq 0$. ognuno di questi autovalori corrisponde ad un autovalore finito (λ, μ) del QMEP, dove*

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \qquad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}^2}$$

- *i restanti $4n^2$ autovalori sono tali che $\tilde{\lambda} = 0$. Questi autovalori sono un risultato della trasformazione e non sono in relazione con gli autovalori del QMEP.*

Teorema

Nel caso generico, la coppia di problemi

$$(\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta_3)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_2 - \tilde{\mu}\Delta_3)\boldsymbol{z} = 0$$

associata al QMEP, ha $8n^2$ *autovalori* $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$*, di cui:*

- $4n^2$ *sono tali che* $\tilde{\lambda} \neq 0$. *ognuno di questi autovalori corrisponde ad un autovalore finito* (λ, μ) *del QMEP, dove*

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \qquad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}^2}$$

- *i restanti* $4n^2$ *autovalori sono tali che* $\tilde{\lambda} = 0$. *Questi autovalori sono un risultato della trasformazione e non sono in relazione con gli autovalori del QMEP.*

Teorema

Nel caso generico, la coppia di problemi

$$(\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta_3)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_2 - \tilde{\mu}\Delta_3)\boldsymbol{z} = 0$$

associata al QMEP, ha $8n^2$ *autovalori* $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$*, di cui:*

- $4n^2$ *sono tali che* $\tilde{\lambda} \neq 0$. *ognuno di questi autovalori corrisponde ad un autovalore finito* (λ, μ) *del QMEP, dove*

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \qquad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}^2}$$

- *i restanti* $4n^2$ *autovalori sono tali che* $\tilde{\lambda} = 0$. *Questi autovalori sono un risultato della trasformazione e non sono in relazione con gli autovalori del QMEP.*

Dim.

- Dalla costruzione sappiamo che ad ogni autovalore (λ, μ) del QMEP corrisponde un autovalore $(\lambda, \mu, \lambda^2, \lambda\mu, \mu^2)$ del MEP, e quindi un autovalore $(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda^2}, 1, \frac{\mu}{\lambda}, \frac{\mu^2}{\lambda^2})$ del MEP omogeneo. Il QMEP ha $4n^2$ autovalori a cui corrispondono $4n^2$ autovalori del MEP-h.
- Supponiamo che $(0, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, 1, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore del MEP omogeneo. Dalle ultime tre equazioni del MEP omogeneo segue che:

$$\tilde{\lambda}^2 = 0 \qquad \tilde{\lambda}\tilde{\mu} = 0 \qquad \tilde{\mu}^2 = 0$$

quindi $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} = 0$.Dalle prime due equazioni del QMEP si ha:

$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$
$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$

che ha n^2 autovalori $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ nel caso generico.Possiamo quindi contare $4n^2$ autovalori del MEP omogeneo con $\tilde{\lambda} = 0$.

Dim.

- Dalla costruzione sappiamo che ad ogni autovalore (λ, μ) del QMEP corrisponde un autovalore $(\lambda, \mu, \lambda^2, \lambda\mu, \mu^2)$ del MEP, e quindi un autovalore $(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda^2}, 1, \frac{\mu}{\lambda}, \frac{\mu^2}{\lambda^2})$ del MEP omogeneo. Il QMEP ha $4n^2$ autovalori a cui corrispondono $4n^2$ autovalori del MEP-h.
- Supponiamo che $(0, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, 1, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore del MEP omogeneo. Dalle ultime tre equazioni del MEP omogeneo segue che:

$$\tilde{\lambda}^2 = 0 \qquad \tilde{\lambda}\tilde{\mu} = 0 \qquad \tilde{\mu}^2 = 0$$

quindi $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} = 0$. Dalle prime due equazioni del QMEP si ha:

$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$
$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$

che ha n^2 autovalori $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ nel caso generico. Possiamo quindi contare $4n^2$ autovalori del MEP omogeneo con $\tilde{\lambda} = 0$.

Dim.

- Dalla costruzione sappiamo che ad ogni autovalore (λ, μ) del QMEP corrisponde un autovalore $(\lambda, \mu, \lambda^2, \lambda\mu, \mu^2)$ del MEP, e quindi un autovalore $(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda^2}, 1, \frac{\mu}{\lambda}, \frac{\mu^2}{\lambda^2})$ del MEP omogeneo. Il QMEP ha $4n^2$ autovalori a cui corrispondono $4n^2$ autovalori del MEP-h.
- Supponiamo che $(0, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, 1, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore del MEP omogeneo. Dalle ultime tre equazioni del MEP omogeneo segue che:

$$\tilde{\lambda}^2 = 0 \qquad \tilde{\lambda}\tilde{\mu} = 0 \qquad \tilde{\mu}^2 = 0$$

quindi $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} = 0$.Dalle prime due equazioni del QMEP si ha:

$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$
$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$

che ha n^2 autovalori $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ nel caso generico.Possiamo quindi contare $4n^2$ autovalori del MEP omogeneo con $\tilde{\lambda} = 0$.

Dim.

- Dalla costruzione sappiamo che ad ogni autovalore (λ, μ) del QMEP corrisponde un autovalore $(\lambda, \mu, \lambda^2, \lambda\mu, \mu^2)$ del MEP, e quindi un autovalore $(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda^2}, 1, \frac{\mu}{\lambda}, \frac{\mu^2}{\lambda^2})$ del MEP omogeneo. Il QMEP ha $4n^2$ autovalori a cui corrispondono $4n^2$ autovalori del MEP-h.
- Supponiamo che $(0, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, 1, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sia un autovalore del MEP omogeneo. Dalle ultime tre equazioni del MEP omogeneo segue che:

$$\tilde{\lambda}^2 = 0 \qquad \tilde{\lambda}\tilde{\mu} = 0 \qquad \tilde{\mu}^2 = 0$$

quindi $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} = 0$.Dalle prime due equazioni del QMEP si ha:

$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$
$$det(A_{20} + \tilde{\beta}A_{11} + \tilde{\gamma}A_{02}) = 0$$

che ha n^2 autovalori $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ nel caso generico.Possiamo quindi contare $4n^2$ autovalori del MEP omogeneo con $\tilde{\lambda} = 0$.

□

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter costruire un algoritmo che trovi tutti gli autovalori del QMEP:

Algoritmo

- Date le matrici A_{ij} e B_{ij} di partenza, costruiamo il MEP associato con 5 parametri.
- Estendiamo tutte le matrici del MEP a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ_1, Δ_2, Δ_3,$A = \Delta_3^{-1}\Delta_1$ e $B = \Delta_3^{-1}\Delta_2$.
- Consideriamo la seguente coppia di problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A - \tilde{\lambda} I)z = 0$$
$$(B - \tilde{\mu} I)z = 0$$

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter costruire un algoritmo che trovi tutti gli autovalori del QMEP:

Algoritmo

- Date le matrici A_{ij} e B_{ij} di partenza, costruiamo il MEP associato con 5 parametri.
- Estendiamo tutte le matrici del MEP a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ_1, Δ_2, Δ_3,$A = \Delta_3^{-1}\Delta_1$ e $B = \Delta_3^{-1}\Delta_2$.
- Consideriamo la seguente coppia di problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A - \tilde{\lambda} I)z = 0$$
$$(B - \tilde{\mu} I)z = 0$$

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter costruire un algoritmo che trovi tutti gli autovalori del QMEP:

Algoritmo

- Date le matrici A_{ij} e B_{ij} di partenza, costruiamo il MEP associato con 5 parametri.
- Estendiamo tutte le matrici del MEP a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ_1, Δ_2, Δ_3,$A = \Delta_3^{-1}\Delta_1$ e $B = \Delta_3^{-1}\Delta_2$.
- Consideriamo la seguente coppia di problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A - \tilde{\lambda} I)z = 0$$

$$(B - \tilde{\mu} I)z = 0$$

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter costruire un algoritmo che trovi tutti gli autovalori del QMEP:

Algoritmo

- Date le matrici A_{ij} e B_{ij} di partenza, costruiamo il MEP associato con 5 parametri.
- Estendiamo tutte le matrici del MEP a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ_1, Δ_2, Δ_3, $A = \Delta_3^{-1}\Delta_1$ e $B = \Delta_3^{-1}\Delta_2$.
- Consideriamo la seguente coppia di problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A - \tilde{\lambda} I)z = 0$$
$$(B - \tilde{\mu} I)z = 0$$

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter costruire un algoritmo che trovi tutti gli autovalori del QMEP:

Algoritmo

- Date le matrici A_{ij} e B_{ij} di partenza, costruiamo il MEP associato con 5 parametri.
- Estendiamo tutte le matrici del MEP a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ_1, Δ_2, Δ_3,$A = \Delta_3^{-1}\Delta_1$ e $B = \Delta_3^{-1}\Delta_2$.
- Consideriamo la seguente coppia di problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A - \tilde{\lambda} I)z = 0$$
$$(B - \tilde{\mu} I)z = 0$$

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Abbiamo ora tutti gli strumenti per poter costruire un algoritmo che trovi tutti gli autovalori del QMEP:

Algoritmo

- Date le matrici A_{ij} e B_{ij} di partenza, costruiamo il MEP associato con 5 parametri.
- Estendiamo tutte le matrici del MEP a $\mathbb{C}^N$.
- Costruiamo le matrici Δ_1, Δ_2, Δ_3,$A = \Delta_3^{-1}\Delta_1$ e $B = \Delta_3^{-1}\Delta_2$.
- Consideriamo la seguente coppia di problemi agli autovalori "incrociati"

$$(A - \tilde{\lambda} I)z = 0$$
$$(B - \tilde{\mu} I)z = 0$$

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Algoritmo

- Calcoliamo la forma di Schur di A, $S = Q^H AQ$ e poi effetuiamo il prodotto $R = Q^H BQ$. La diagonale di S dará i $\tilde{\lambda}$, quella di R dará i $\tilde{\mu}$.
- Per tutti i $\tilde{\lambda}$ diversi da 0, calcoliamo $\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$ e $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}^2}$.

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Algoritmo

- Calcoliamo la forma di Schur di A, $S = Q^H AQ$ e poi effetuiamo il prodotto $R = Q^H BQ$. La diagonale di S dará i $\tilde{\lambda}$, quella di R dará i $\tilde{\mu}$.
- Per tutti i $\tilde{\lambda}$ diversi da 0, calcoliamo $\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$ e $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}^2}$.

Algoritmo di risoluzione del QMEP

Algoritmo

- Calcoliamo la forma di Schur di A, $S = Q^H A Q$ e poi effetuiamo il prodotto $R = Q^H B Q$. La diagonale di S dará i $\tilde{\lambda}$, quella di R dará i $\tilde{\mu}$.
- Per tutti i $\tilde{\lambda}$ diversi da 0, calcoliamo $\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$ e $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}^2}$.

Casi speciali del QMEP

In questa sezione ci interesseremo a due casi speciali del QMEP dove mancano alcuni termini quadratici. Ci sono almeno due buone ragioni per fare questo:

- Spesso le applicazioni possono portare a questi casi speciali piuttosto che alla forma generale.
- Possiamo sfruttare la struttura di questi casi speciali per sviluppare metodi che sono piú efficienti e di natura piú semplice rispetto agli approcci per il QMEP generale.

Casi speciali del QMEP

In questa sezione ci interesseremo a due casi speciali del QMEP dove mancano alcuni termini quadratici. Ci sono almeno due buone ragioni per fare questo:

- Spesso le applicazioni possono portare a questi casi speciali piuttosto che alla forma generale.
- Possiamo sfruttare la struttura di questi casi speciali per sviluppare metodi che sono piú efficienti e di natura piú semplice rispetto agli approcci per il QMEP generale.

Casi speciali del QMEP

In questa sezione ci interesseremo a due casi speciali del QMEP dove mancano alcuni termini quadratici. Ci sono almeno due buone ragioni per fare questo:

- Spesso le applicazioni possono portare a questi casi speciali piuttosto che alla forma generale.
- Possiamo sfruttare la struttura di questi casi speciali per sviluppare metodi che sono piú efficienti e di natura piú semplice rispetto agli approcci per il QMEP generale.

Casi speciali del QMEP

In questa sezione ci interesseremo a due casi speciali del QMEP dove mancano alcuni termini quadratici. Ci sono almeno due buone ragioni per fare questo:

- Spesso le applicazioni possono portare a questi casi speciali piuttosto che alla forma generale.
- Possiamo sfruttare la struttura di questi casi speciali per sviluppare metodi che sono piú efficienti e di natura piú semplice rispetto agli approcci per il QMEP generale.

Caso speciale 1

Il primo caso speciale del QMEP che prenderemo in considerazione é quello in cui manca il termine $\lambda\mu$ in entrambe le equazioni, cioé dove $A_{11} = B_{11} = 0$. Le equazioni risultanti sono:

$$Q_1(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \mu^2 A_{02})\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\boldsymbol{x}^{(\mathbf{2})} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \mu^2 B_{02})\boldsymbol{x}^{(\mathbf{2})} = 0$$

Teorema

Nel caso generico il QMEP appena definito ha $4n^2$ soluzioni finite.

Caso speciale 1

Il primo caso speciale del QMEP che prenderemo in considerazione é quello in cui manca il termine $\lambda\mu$ in entrambe le equazioni, cioé dove $A_{11} = B_{11} = 0$. Le equazioni risultanti sono:

$$Q_1(\lambda,\mu)\mathbf{x^{(1)}} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \mu^2 A_{02})\mathbf{x^{(1)}} = 0$$

$$Q_2(\lambda,\mu)\mathbf{x^{(2)}} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \mu^2 B_{02})\mathbf{x^{(2)}} = 0$$

Teorema

Nel caso generico il QMEP appena definito ha $4n^2$ soluzioni finite.

Caso speciale 1

Il metodo che proponiamo per questo caso speciale é un adattamento del metodo appena visto per il caso generale. In pratica introduciamo due nuove variabili $\alpha = \lambda^2$ e $\gamma = \mu^2$ e ci riportiamo al seguente MEP a 4 parametri:

$$(A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \alpha A_{20} + \gamma A_{02})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

$$(B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \alpha B_{20} + \gamma B_{02})\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y}^{(1)} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{y}^{(3)} = 0$$

Caso speciale 1

Il metodo che proponiamo per questo caso speciale é un adattamento del metodo appena visto per il caso generale. In pratica introduciamo due nuove variabili $\alpha = \lambda^2$ e $\gamma = \mu^2$ e ci riportiamo al seguente MEP a 4 parametri:

$$(A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \alpha A_{20} + \gamma A_{02})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

$$(B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \alpha B_{20} + \gamma B_{02})\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{y}^{(1)} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{y}^{(3)} = 0$$

Caso speciale 1

Teorema

Nel caso generico il MEP appena definito é non singolare ed esiste una relazione uno ad uno fra gli autovalori del MEP e quelli del caso speciale del QMEP:
$((\lambda,\mu),\boldsymbol{x^{(1)}}\otimes\boldsymbol{x^{(2)}})$ *é una coppia autovalore-autovettore del QMEP se e solo se* $\left((\lambda,\mu,\lambda^2,\mu^2),\boldsymbol{x^{(1)}}\otimes\boldsymbol{x^{(2)}}\otimes\begin{bmatrix}1\\\lambda\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\\mu\end{bmatrix}\right)$ *é una coppia autovalore-autovettore del MEP*

Dim.

É facile vedere che ogni coppia autovalore-autovettore del QMEP dá una coppia del MEP.Cosí otteniamo $4n^2$ autovalori del MEP. Sappiamo che il nostro MEP deve avere esattamente $4n^2$ autovalori,quindi questi devono essere tutti finiti ed associati agli autovalori del QMEP.Poiché tutti gli autovalori sono finiti, il corrispondente operatore Δ_0 é non singolare. □

Caso speciale 1

Teorema

Nel caso generico il MEP appena definito é non singolare ed esiste una relazione uno ad uno fra gli autovalori del MEP e quelli del caso speciale del QMEP:
$((\lambda, \mu), \boldsymbol{x^{(1)}} \otimes \boldsymbol{x^{(2)}})$ *é una coppia autovalore-autovettore del QMEP se e solo se* $\left((\lambda, \mu, \lambda^2, \mu^2), \boldsymbol{x^{(1)}} \otimes \boldsymbol{x^{(2)}} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix}\right)$ *é una coppia autovalore-autovettore del MEP*

Dim.

É facile vedere che ogni coppia autovalore-autovettore del QMEP dá una coppia del MEP. Cosí otteniamo $4n^2$ autovalori del MEP. Sappiamo che il nostro MEP deve avere esattamente $4n^2$ autovalori,quindi questi devono essere tutti finiti ed associati agli autovalori del QMEP. Poiché tutti gli autovalori sono finiti, il corrispondente operatore Δ_0 é non singolare. □

Caso speciale 1

Teorema

Nel caso generico il MEP appena definito é non singolare ed esiste una relazione uno ad uno fra gli autovalori del MEP e quelli del caso speciale del QMEP:
$((\lambda, \mu), \boldsymbol{x^{(1)}} \otimes \boldsymbol{x^{(2)}})$ *é una coppia autovalore-autovettore del QMEP se e solo se* $\left((\lambda, \mu, \lambda^2, \mu^2), \boldsymbol{x^{(1)}} \otimes \boldsymbol{x^{(2)}} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix}\right)$ *é una coppia autovalore-autovettore del MEP*

Dim.

É facile vedere che ogni coppia autovalore-autovettore del QMEP dá una coppia del MEP.Cosí otteniamo $4n^2$ autovalori del MEP. Sappiamo che il nostro MEP deve avere esattamente $4n^2$ autovalori,quindi questi devono essere tutti finiti ed associati agli autovalori del QMEP.Poiché tutti gli autovalori sono finiti, il corrispondente operatore Δ_0 é non singolare. □

Caso speciale 1

Teorema

Nel caso generico il MEP appena definito é non singolare ed esiste una relazione uno ad uno fra gli autovalori del MEP e quelli del caso speciale del QMEP:
$((\lambda,\mu),\boldsymbol{x^{(1)}}\otimes\boldsymbol{x^{(2)}})$ *é una coppia autovalore-autovettore del QMEP se e solo se* $\left((\lambda,\mu,\lambda^2,\mu^2),\boldsymbol{x^{(1)}}\otimes\boldsymbol{x^{(2)}}\otimes\begin{bmatrix}1\\\lambda\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\\mu\end{bmatrix}\right)$ *é una coppia autovalore-autovettore del MEP*

Dim.

É facile vedere che ogni coppia autovalore-autovettore del QMEP dá una coppia del MEP.Cosí otteniamo $4n^2$ autovalori del MEP. Sappiamo che il nostro MEP deve avere esattamente $4n^2$ autovalori,quindi questi devono essere tutti finiti ed associati agli autovalori del QMEP.Poiché tutti gli autovalori sono finiti, il corrispondente operatore Δ_0 é non singolare. □

Caso speciale 1

Teorema

Nel caso generico il MEP appena definito é non singolare ed esiste una relazione uno ad uno fra gli autovalori del MEP e quelli del caso speciale del QMEP:
$((\lambda, \mu), \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)})$ *é una coppia autovalore-autovettore del QMEP se e solo se* $\left((\lambda, \mu, \lambda^2, \mu^2), \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix}\right)$ *é una coppia autovalore-autovettore del MEP*

Dim.

É facile vedere che ogni coppia autovalore-autovettore del QMEP dá una coppia del MEP.Cosí otteniamo $4n^2$ autovalori del MEP. Sappiamo che il nostro MEP deve avere esattamente $4n^2$ autovalori,quindi questi devono essere tutti finiti ed associati agli autovalori del QMEP.Poiché tutti gli autovalori sono finiti, il corrispondente operatore Δ_0 é non singolare. $\square$

Caso speciale 1

Sebbene non sia una linearizzazione nel senso della definizione data all'inizio, chiamiamo quella appena fatta una linearizzazione minimale a causa delle seguenti proprietá:

- gli autovalori del problema di partenza corrispondono esattamente a quelli della linearizzazione;
- l'operatore Δ_0 é non singolare.

Inoltre é una linearizzazione "simmetrica" nel senso che se le matrici di partenza sono simmetriche, allora anche gli operatori determinanti sono simmetrici.

Caso speciale 1

Sebbene non sia una linearizzazione nel senso della definizione data all'inizio, chiamiamo quella appena fatta una linearizzazione minimale a causa delle seguenti proprietá:

- gli autovalori del problema di partenza corrispondono esattamente a quelli della linearizzazione;
- l'operatore Δ_0 é non singolare.

Inoltre é una linearizzazione "simmetrica" nel senso che se le matrici di partenza sono simmetriche, allora anche gli operatori determinanti sono simmetrici.

Caso speciale 1

Sebbene non sia una linearizzazione nel senso della definizione data all'inizio, chiamiamo quella appena fatta una linearizzazione minimale a causa delle seguenti proprietá:

- gli autovalori del problema di partenza corrispondono esattamente a quelli della linearizzazione;
- l'operatore Δ_0 é non singolare.

Inoltre é una linearizzazione "simmetrica" nel senso che se le matrici di partenza sono simmetriche, allora anche gli operatori determinanti sono simmetrici.

Caso speciale 1

Sebbene non sia una linearizzazione nel senso della definizione data all'inizio, chiamiamo quella appena fatta una linearizzazione minimale a causa delle seguenti proprietá:

- gli autovalori del problema di partenza corrispondono esattamente a quelli della linearizzazione;
- l'operatore Δ_0 é non singolare.

Inoltre é una linearizzazione "simmetrica" nel senso che se le matrici di partenza sono simmetriche, allora anche gli operatori determinanti sono simmetrici.

Caso speciale 2

Il secondo caso speciale di cui ci occuperemo é quello in cui ad entrambe le equazioni manca il termine μ^2, cioé quando $A_{02} = B_{02} = 0$:

$$Q_1(\lambda, \mu)\mathbf{x}^{(1)} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11})\mathbf{x}^{(1)} = 0$$

$$Q_2(\lambda, \mu)\mathbf{x}^{(2)} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11})\mathbf{x}^{(2)} = 0$$

Lemma

Nel caso generico il QMEP appena definito ha $3n^2$ soluzioni finite.

Caso speciale 2

Il secondo caso speciale di cui ci occuperemo é quello in cui ad entrambe le equazioni manca il termine μ^2, cioé quando $A_{02} = B_{02} = 0$:

$$Q_1(\lambda, \mu)\boldsymbol{x}^{(1)} := (A_{00} + \lambda A_{10} + \mu A_{01} + \lambda^2 A_{20} + \lambda\mu A_{11})\boldsymbol{x}^{(1)} = 0$$

$$Q_2(\lambda, \mu)\boldsymbol{x}^{(2)} := (B_{00} + \lambda B_{10} + \mu B_{01} + \lambda^2 B_{20} + \lambda\mu B_{11})\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$

Lemma

Nel caso generico il QMEP appena definito ha $3n^2$ soluzioni finite.

Caso speciale 2

Dim.

Consideriamo il sistema omogeneo dato dai polinomi caratteristici:

$$det(\tilde{\eta}^2 A_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta}A_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta}A_{01} + \tilde{\mu}^2 A_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}A_{11}) = 0$$
$$det(\tilde{\eta}^2 B_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta}B_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta}B_{01} + \tilde{\mu}^2 B_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}B_{11}) = 0$$

Otteniamo le soluzioni infinite ponendo $\tilde{\eta} = 0$. Quindi cerchiamo $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\mu}$ non entrambe nulle tali che:

$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu}A_{20} + \tilde{\lambda}A_{11}) = 0$$
$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu}B_{20} + \tilde{\lambda}B_{11}) = 0$$

Nel caso generico i polinomi $det(\tilde{\mu}A_{20} + \tilde{\lambda}A_{11})$ e $det(\tilde{\mu}B_{20} + \tilde{\lambda}B_{11})$ non hanno soluzioni non nulle, l'unica opzione é $\tilde{\mu} = 0$ e $\tilde{\lambda} \neq 0$.In coordinate proiettive $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (0, 1, 0)$ é una soluzione di molteplicitá n^2, quindi ci sono n^2 autovalori del QMEP infiniti e gli altri $3n^2$ sono finiti. □

Caso speciale 2

Dim.

Consideriamo il sistema omogeneo dato dai polinomi caratteristici:

$$det(\tilde{\eta}^2 A_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta}A_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta}A_{01} + \tilde{\mu}^2 A_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}A_{11}) = 0$$
$$det(\tilde{\eta}^2 B_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta}B_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta}B_{01} + \tilde{\mu}^2 B_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}B_{11}) = 0$$

Otteniamo le soluzioni infinite ponendo $\tilde{\eta} = 0$. Quindi cerchiamo $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\mu}$ non entrambe nulle tali che:

$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu}A_{20} + \tilde{\lambda}A_{11}) = 0$$
$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu}B_{20} + \tilde{\lambda}B_{11}) = 0$$

Nel caso generico i polinomi $det(\tilde{\mu}A_{20} + \tilde{\lambda}A_{11})$ e $det(\tilde{\mu}B_{20} + \tilde{\lambda}B_{11})$ non hanno soluzioni non nulle, l'unica opzione é $\tilde{\mu} = 0$ e $\tilde{\lambda} \neq 0$.In coordinate proiettive $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (0, 1, 0)$ é una soluzione di molteplicitá n^2, quindi ci sono n^2 autovalori del QMEP infiniti e gli altri $3n^2$ sono finiti.

Caso speciale 2

Dim.

Consideriamo il sistema omogeneo dato dai polinomi caratteristici:

$$det(\tilde{\eta}^2 A_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta}A_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta}A_{01} + \tilde{\mu}^2 A_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}A_{11}) = 0$$
$$det(\tilde{\eta}^2 B_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta}B_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta}B_{01} + \tilde{\mu}^2 B_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}B_{11}) = 0$$

Otteniamo le soluzioni infinite ponendo $\tilde{\eta} = 0$. Quindi cerchiamo $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\mu}$ non entrambe nulle tali che:

$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu}A_{20} + \tilde{\lambda}A_{11}) = 0$$
$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu}B_{20} + \tilde{\lambda}B_{11}) = 0$$

Nel caso generico i polinomi $det(\tilde{\mu}A_{20} + \tilde{\lambda}A_{11})$ e $det(\tilde{\mu}B_{20} + \tilde{\lambda}B_{11})$ non hanno soluzioni non nulle, l'unica opzione é $\tilde{\mu} = 0$ e $\tilde{\lambda} \neq 0$. In coordinate proiettive $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (0, 1, 0)$ é una soluzione di molteplicitá n^2, quindi ci sono n^2 autovalori del QMEP infiniti e gli altri $3n^2$ sono finiti.

Caso speciale 2

Dim.

Consideriamo il sistema omogeneo dato dai polinomi caratteristici:

$$det(\tilde{\eta}^2 A_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta} A_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta} A_{01} + \tilde{\mu}^2 A_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu} A_{11}) = 0$$
$$det(\tilde{\eta}^2 B_{00} + \tilde{\lambda}\tilde{\eta} B_{10} + \tilde{\mu}\tilde{\eta} B_{01} + \tilde{\mu}^2 B_{20} + \tilde{\lambda}\tilde{\mu} B_{11}) = 0$$

Otteniamo le soluzioni infinite ponendo $\tilde{\eta} = 0$. Quindi cerchiamo $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\mu}$ non entrambe nulle tali che:

$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu} A_{20} + \tilde{\lambda} A_{11}) = 0$$
$$\tilde{\mu}^n det(\tilde{\mu} B_{20} + \tilde{\lambda} B_{11}) = 0$$

Nel caso generico i polinomi $det(\tilde{\mu} A_{20} + \tilde{\lambda} A_{11})$ e $det(\tilde{\mu} B_{20} + \tilde{\lambda} B_{11})$ non hanno soluzioni non nulle, l'unica opzione é $\tilde{\mu} = 0$ e $\tilde{\lambda} \neq 0$.In coordinate proiettive $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (0, 1, 0)$ é una soluzione di molteplicitá n^2, quindi ci sono n^2 autovalori del QMEP infiniti e gli altri $3n^2$ sono finiti. □

Caso speciale 2

Tratteremo questo caso speciale in maniera differente rispetto al precedente, applicheremo l'approccio di Khazanov linearizzando le equazioni come polinomi quadratici in λ per ottenere le seguenti equazioni:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} B_{01} & B_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(2)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

Vale chiaramente che se $((\lambda, \mu), \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)})$ é una coppia autovalore-autovettore per il QMEP, allora $\left((\lambda, \mu), \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(2)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(2)} \end{bmatrix}\right)$ é una coppia autovalore-autovettore per il MEP definito tramite la linearizzazione di Khazanov.

Caso speciale 2

Tratteremo questo caso speciale in maniera differente rispetto al precedente, applicheremo l'approccio di Khazanov linearizzando le equazioni come polinomi quadratici in λ per ottenere le seguenti equazioni:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \lambda \mathbf{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} B_{01} & B_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(2)} \\ \lambda \mathbf{x}^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

Vale chiaramente che se $((\lambda, \mu), \mathbf{x}^{(1)} \otimes \mathbf{x}^{(2)})$ é una coppia autovalore-autovettore per il QMEP, allora $\left((\lambda, \mu), \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \lambda \mathbf{x}^{(1)} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(2)} \\ \lambda \mathbf{x}^{(2)} \end{bmatrix} \right)$ é una coppia autovalore-autovettore per il MEP definito tramite la linearizzazione di Khazanov.

Caso speciale 2

Tratteremo questo caso speciale in maniera differente rispetto al precedente, applicheremo l'approccio di Khazanov linearizzando le equazioni come polinomi quadratici in λ per ottenere le seguenti equazioni:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} B_{01} & B_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(2)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

Vale chiaramente che se $((\lambda, \mu), \boldsymbol{x}^{(1)} \otimes \boldsymbol{x}^{(2)})$ é una coppia autovalore-autovettore per il QMEP, allora $\left((\lambda, \mu), \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(2)} \\ \lambda \boldsymbol{x}^{(2)} \end{bmatrix}\right)$ é una coppia autovalore-autovettore per il MEP definito tramite la linearizzazione di Khazanov.

Caso speciale 2

Lemma

Nel caso generico, il MEP ottenuto é non singolare nella sua versione omogenea. In particolare, l'operatore determinante Δ_2 é non singolare.

Dim.

Supponiamo che la versione omogena abbia un autovalore $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ tale che $\tilde{\mu} = 0$.Quello che rimane del sistema dato dai polinomi caratteristici é:

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

che nel caso generico non ha soluzioni non nulle, quindi deve essere $\tilde{\mu} \neq 0$ e per il teorema enunciato all'inizio, Δ_2 é non singolare. $\square$

Caso speciale 2

Lemma

Nel caso generico, il MEP ottenuto é non singolare nella sua versione omogenea. In particolare, l'operatore determinante Δ_2 é non singolare.

Dim.

Supponiamo che la versione omogena abbia un autovalore $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ tale che $\tilde{\mu} = 0$. Quello che rimane del sistema dato dai polinomi caratteristici é:

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

che nel caso generico non ha soluzioni non nulle, quindi deve essere $\tilde{\mu} \neq 0$ e per il teorema enunciato all'inizio, Δ_2 é non singolare. $\square$

Caso speciale 2

Lemma

Nel caso generico, il MEP ottenuto é non singolare nella sua versione omogenea. In particolare, l'operatore determinante Δ_2 é non singolare.

Dim.

Supponiamo che la versione omogena abbia un autovalore $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ tale che $\tilde{\mu} = 0$.Quello che rimane del sistema dato dai polinomi caratteristici é:

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

che nel caso generico non ha soluzioni non nulle, quindi deve essere $\tilde{\mu} \neq 0$ e per il teorema enunciato all'inizio, Δ_2 é non singolare. □

Caso speciale 2

Lemma

Nel caso generico, il MEP ottenuto é non singolare nella sua versione omogenea. In particolare, l'operatore determinante Δ_2 é non singolare.

Dim.

Supponiamo che la versione omogena abbia un autovalore $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ tale che $\tilde{\mu} = 0$.Quello che rimane del sistema dato dai polinomi caratteristici é:

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\tilde{\eta}\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

che nel caso generico non ha soluzioni non nulle, quindi deve essere $\tilde{\mu} \neq 0$ e per il teorema enunciato all'inizio, Δ_2 é non singolare. □

Caso speciale 2

Teorema

Nel caso generico, la coppia di problemi

$$(\Delta_0 - \tilde{\eta}\Delta_2)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta_2)\boldsymbol{z} = 0$$

associata al QMEP, ha $4n^2$ *autovalori* $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda})$*, di cui:*

- $3n^2$ *sono tali che* $\tilde{\eta} \neq 0$*. Ognuno di questi autovalori corrisponde ad un autovalore finito* (λ, μ) *del QMEP, dove*

$$\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}} \qquad \mu = \frac{1}{\tilde{\eta}^2}$$

- *i restanti* n^2 *autovalori sono tali che* $\tilde{\lambda} = 0$*.*

Caso speciale 2

Teorema

Nel caso generico, la coppia di problemi

$$(\Delta_0 - \tilde{\eta}\Delta_2)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta_2)\boldsymbol{z} = 0$$

associata al QMEP, ha $4n^2$ *autovalori* $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda})$*, di cui:*

- $3n^2$ *sono tali che* $\tilde{\eta} \neq 0$*. Ognuno di questi autovalori corrisponde ad un autovalore finito* (λ, μ) *del QMEP, dove*

$$\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}} \qquad \mu = \frac{1}{\tilde{\eta}^2}$$

- *i restanti* n^2 *autovalori sono tali che* $\tilde{\lambda} = 0$*.*

Caso speciale 2

Teorema

Nel caso generico, la coppia di problemi

$$(\Delta_0 - \tilde{\eta}\Delta_2)\boldsymbol{z} = 0$$
$$(\Delta_1 - \tilde{\lambda}\Delta_2)\boldsymbol{z} = 0$$

associata al QMEP, ha $4n^2$ *autovalori* $(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda})$*, di cui:*

- $3n^2$ *sono tali che* $\tilde{\eta} \neq 0$*. Ognuno di questi autovalori corrisponde ad un autovalore finito* (λ, μ) *del QMEP, dove*

$$\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}} \qquad \mu = \frac{1}{\tilde{\eta}^2}$$

- *i restanti* n^2 *autovalori sono tali che* $\tilde{\lambda} = 0$*.*

Caso speciale 2

Dim.

- Ad ognuno dei $3n^2$ autovalori (λ, μ) del QMEP corrisponde un autovalore del MEP, e quindi un autovalore $(\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, 1)$ della versione omogenea.
- Sia $(0, \tilde{\lambda}, 1)$ un autovalore del MEP omogeneo, questo ora avrá la forma:

$$det\left(\tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & B_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

che nel caso generico ha n^2 soluzioni.

Caso speciale 2

Dim.

- Ad ognuno dei $3n^2$ autovalori (λ, μ) del QMEP corrisponde un autovalore del MEP, e quindi un autovalore $(\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, 1)$ della versione omogenea.
- Sia $(0, \tilde{\lambda}, 1)$ un autovalore del MEP omogeneo, questo ora avrá la forma:

$$det\left(\tilde{\lambda}\begin{bmatrix}0 & A_{20}\\ I & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A_{01} & A_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\tilde{\lambda}\begin{bmatrix}0 & B_{20}\\ I & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_{01} & B_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = 0$$

che nel caso generico ha n^2 soluzioni.

Dim.

- Ad ognuno dei $3n^2$ autovalori (λ, μ) del QMEP corrisponde un autovalore del MEP, e quindi un autovalore $(\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, 1)$ della versione omogenea.
- Sia $(0, \tilde{\lambda}, 1)$ un autovalore del MEP omogeneo, questo ora avrá la forma:

$$det\left(\tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & A_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{01} & A_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\tilde{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & B_{20} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & B_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

che nel caso generico ha n^2 soluzioni.

□

Caso speciale 2

Osservazione

Avremmo potuto anche applicare per questo caso lo stesso metodo usato per il primo caso speciale, questo avrebbe portato comunque a lavorare con matrici Δ_i di taglia $4n^2 \times 4n^2$ ma avrebbe avuto lo svantaggio di produrre un MEP con 4 parametri diversamente dal metodo usato che produce un MEP con soli 2 parametri.