INTRODUZIONE AI ROUGH PATHS CONTROLLATI

Cominciamo la trattazione con un lemma motivazionale, già visto (in parte) negli scorsi paragrafi.

LEMMA

Sia $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ un Rough Path (con $\alpha > \frac{1}{3}$), e sia:

$$F \in C^2_b(V, L(V, W))$$

Sia quindi $Y : [0,T] \to L(V, W)$ data da:

$$Y_s = F(X_s),$$

e sia $Y'_s : [0,T] \to L(V, L(V,W))$ data da:

$$Y'_s = DF(X_s)$$

Definiamo infine, per $(s,t) \in [0,T]^2$:

$$R^Y_{s,t} \overset{def}{=} Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}$$

Allora:

- $Y \in C^{0,\alpha}([0,T], L(V,W))$;
- $Y' \in C^{0,\alpha}([0,T], L(V, L(V,W)))$;
- $R^Y \in C^{0,2\alpha}([0,T]^2, L(V,W))$.

Dim.

Dato che $F \in C^2_b(V, L(V,W))$, allora:

$$\| DF \|_\infty < +\infty, \quad \| D^2F \|_\infty < +\infty$$

Allora:

$$\| Y_{s,t} \| \leq \| F(X_t) - F(X_s) \| \leq$$
$$\leq \| DF \|_\infty \| X_t - X_s \| = \| DF \|_\infty \| X_{s,t} \|$$

In modo del tutto simile:

$$\| Y'_{s,t} \| \leq \| D^2 F \|_\infty \| X_{s,t} \|$$

Deduciamo allora che:

$$\begin{cases} [Y]_\alpha \leq \| DF \|_\infty [X]_\alpha \\ [Y']_\alpha \leq \| D^2F \|_\infty [X]_\alpha \end{cases},$$

da cui $Y \in C^{0,\alpha}([0,T], L(V,W))$, $Y' \in C^{0,\alpha}([0,T], L(V, L(V,W)))$.

Definiamo ora:

$$\phi : [0,1] \to L(V,W)$$
$$\xi \to F(X_s + \xi X_{s,t})$$

Allora, dalla teoria degli sviluppi di Taylor, esiste $\bar{\xi}$ tale che:

$$R^Y_{s,t} = F(X_t) - F(X_s) - DF(X_s) X_{s,t} =$$
$$= \frac{1}{2} D^2 F(X_s + \bar{\xi} X_{s,t})(X_{s,t}, X_{s,t}),$$

ove:

$$D^2 F \in L(V, L(V, L(V, L(V, W)))) \simeq$$
$$\simeq L(V, L(V \otimes V, L(V, W)))$$

Segue allora che:

$$[R^Y]_{2\alpha} \leq \frac{1}{2} \| D^2 F \|_\infty [X]^2_\alpha ,$$

da cui $R^Y \in C^{0,2\alpha}([0,T]^2, L(V,W))$, c.v.d.

OSSERVAZIONE
Al di là dei dettagli notazionali, anche piuttosto pesanti, il lemma ci dice che, dato $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$, e $F \in C^2_b$, allora con quella scelta della coppia $(Y, Y') \in C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha}$ si ha $R^Y \in C^{0,2\alpha}$.

Motivati dall'osservazione, diamo allora una definizione. Per essere più generali possibile, e anche per alleggerire la notazione, sarà $Y : [0,T] \to \bar{W}$ (con $\bar{W}$ spazio di Banach): in molti casi sarà $\bar{W} = L(V,W)$, ma altre scelte sono sensate, in altri contesti.

Dato un cammino $X \in C^{0,\alpha}([0,T], V)$, diciamo che un cammino $Y \in C^{0,\alpha}([0,T], \bar{W})$ è CONTROLLATO da X se esiste $Y' \in C^{0,\alpha}([0,T], L(V, \bar{W}))$ tale che sia:

$$R^Y \in C^{0,2\alpha}([0,T]^2, \bar{W}),$$

dove:

$$R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}$$

Tale definizione implica la definizione di ROUGH PATH CONTROLLATO:

$$(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$$

OSSERVAZIONE
Osserviamo che Y' dipende da X, e che, se esiste, non è necessariamente unico. Chiameremo Y' DERIVATA DI GUBINELLI di X. Nel prossimo paragrafo discuteremo dell'unicità.

Se $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$, allora, $R^Y : [0,T]^2 \to \overline{W}$ è tale che:

$$\| R^Y \|_{2\alpha} = \sup_{\substack{s,t \in [0,T] \\ s \neq t}} \frac{|R^Y_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty$$

Possiamo allora dotare $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$ della seminorma:

$$[(Y, Y')]_{X,2\alpha} \overset{\text{def}}{=} [Y']_\alpha + \| R^Y \|_{2\alpha}$$

Al solito, tale seminorma è nulla solo se Y' e R^Y sono costanti. Se allora consideriamo la norma seguente:

$$\| (Y, Y') \|_{X,2\alpha} \overset{\text{def}}{=} [(Y, Y')]_{X,2\alpha} + \| Y_0 \| + \| Y'_0 \| ,$$

allora $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$, munito di tale norma, è uno spazio di Banach.

Sebbene allora $\mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ non sia nemmeno uno spazio vettoriale, per $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$ è uno spazio di Banach. Lo spazio totale è allora:

$$\mathscr{C}^\alpha \ltimes \mathscr{D}^{2\alpha} \overset{\text{def}}{=} \coprod_{(X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha} \{(X, \mathbb{X})\} \times \mathscr{D}_X^{2\alpha}$$

Esso è una sorta di fibrato, con spazio base $\mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, ma non è da intendersi come un vero e proprio fibrato, in quanto le fibre non sono tra loro isomorfe. Informalmente parlando, infatti, $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$ è tanto più ricco quanto più $(X, \mathbb{X})$ è regolare.

ALCUNE OSSERVAZIONI

Cominciamo osservando che la seminorma su $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\overline{W})$ introdotta nello scorso paragrafo controlla l' α-Hölderianità di Y. Infatti:

$$R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t},$$

da cui:

$$[Y]_\alpha \leq [R^Y]_\alpha + \|Y'\|_\infty [X]_\alpha$$

Ora, se ad esempio l'intervallo temporale è $[0,T]$:

$$[R^Y]_\alpha = \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ t\neq s}} \frac{\|R^Y_{s,t}\|}{|t-s|^\alpha} = \sup_{\substack{t,s\in[0,T]\\ t\neq s}} \frac{\|R^Y_{s,t}\|}{|t-s|^{2\alpha}} |t-s|^\alpha \leq$$

$$\leq T^\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} \leq T^\alpha [(Y,Y')]_{X,2\alpha}$$

D'altra parte, per $s\in[0,T]$:

$$\|Y'_s\| \leq \|Y'_0\| + \|Y'_s - Y'_0\| \leq \|Y'_0\| + [Y']_\alpha T^\alpha,$$

da cui:

$$\|Y'\|_\infty \leq \|Y'_0\| + [Y']_\alpha T^\alpha \leq$$

$$\leq \|Y'_0\| + [(Y,Y')]_{X,2\alpha} T^\alpha$$

Si ha allora, usando maggiorazioni elementari:

$$[Y]_\alpha \leq (T^\alpha + 1)(1 + [X]_\alpha)(\|Y'_0\| + [Y,Y')]_{X,2\alpha})$$

Concludiamo ora il paragrafo dando un'idea del perché $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\overline{W})$ è tanto più ricco quanto più $(X,\mathbb{X})$ è regolare: una trattazione dettagliata porterebbe via troppo tempo.

Supponiamo che $(X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ sia in realtà tale che $X \in C^{0,2\alpha}([0,T],V)$, e supponiamo che sia:

$$Y \in C^{0,2\alpha}([0,T],\overline{W})$$

Allora, dato che per definizione:

$$R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t},$$

la derivata di Gubinelli non è affatto unica.

Infatti $Y' \equiv 0$ è una derivata di Gubinelli, ma in effetti ogni funzione continua (e quindi anche limitata) lo è.

Se invece X non è così regolare, ossia se, in termini informali, $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], \overline{\omega})$ è "propriamente" un Rough Path, vi è unicità di Y': non entriamo però nei dettagli della questione.

Un'altra ragione per l'assenza di unicità della derivata di Gubinelli può essere la non-indipendenza delle componenti, per cammini a valori in spazi multidimensionali.
A titolo di esempio, sia:

$$
\begin{aligned}
X : [0,T] &\to \mathbb{R} \\
t &\to (t, t),
\end{aligned}
$$

e sia $Y = X$. Allora chiaramente Y è controllato da X, con:

$$Y'_s \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dato che $Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} = X_{s,t} - X_{s,t} = 0$. In realtà, però, qualsiasi matrice stocastica è una derivata di Gubinelli, in quanto per ogni $P \in M(2, \mathbb{R})$ siffatta:

$$P X_{s,t} = X_{s,t}$$

per ogni $s,t \in [0,T]$.

INTEGRAZIONE DI UN ROUGH PATH CONTROLLATO

Vogliamo ora estendere la nozione di integrale al caso di un cammino Y controllato da X, integrato sul Rough Path $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, con $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

Dal lemma visto all'inizio della trattazione, se $Y_s = F(X_s)$, con F sufficientemente regolare, allora $Y'_s = DF(X_s)$, nel senso della definizione di cammino controllato. Dunque i cammini di questa forma sono "prototipi" di cammini controllati.

Usando la notazione introdotta in precedenza, sia:

$$\overline{W} = L(V, W)$$

Ricordando quanto fatto per definire l'integrale:

$$\int_0^t F(X_s)\, dX_s,$$

l'idea è ancora una volta quella di definire l'integrale come limite di una successione di somme di Riemann.

Senza perdere di generalità, sia $[0,T] = [0,1]$. La prima idea è quella di definire l'integrale in questo modo:

$$\int_0^1 Y_s\, dX_s \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\pi_n - 1} Y_{t_k^{(n)}} X_{t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}} + Y'_{t_k^{(n)}} \mathbb{X}_{t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}},$$

ove $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ è una successione di partizioni incapsulate, con:

$$\lim_{n\to+\infty} |\pi_n| = 0,$$

e:

$$\pi_n = \{ t_0^{(n)} = 0, t_1^{(n)}, \dots, t_{\pi_n}^{(n)} = 1 \}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

OSSERVAZIONE

Il prodotto $Y'_s \mathbb{X}_{s,t}$, con s,t opportuni, ha senso con il seguente isomorfismo:

$$L(V, L(V, W)) \cong L(V \otimes V, W)$$

L'integrale così definito, se esiste, è a valori in W.

TEOREMA (DI GUBINELLI)

Sia $T>0$, e sia $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T], V)$, con $\alpha > \frac{1}{3}$.

Sia poi:

$$(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{X}([0,T], L(V,W))$$

Allora esiste una costante $C = C(T,\alpha)$ tale che:

- L'integrale prima definito esiste, e per ogni $s<t$ in $[0,T]$ si ha:

$$\left\| \int_s^t Y_r \, dX_r - Y_s X_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t} \right\| \leq$$
$$\leq C \left([X]_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} [Y']_\alpha \right) |t-s|^{3\alpha} ;$$

- La mappa:

$$\Phi : \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T], L(V,W)) \to \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T], W)$$
$$\Phi(Y, Y') \overset{def}{=} \left(\int_0^\cdot Y_r \, dX_r , Y \right) = (Z, Z')$$

è una mappa lineare e continua, con la seguente stima:

$$[(Z, Z')]_{X,2\alpha} \leq [Y]_\alpha + \|Y'\|_{L^\infty} \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} +$$
$$+ C \left([X]_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} [Y']_{2\alpha} \right)$$

Dim.

L'obiettivo è quello di usare il Sewing Lemma. Definiamo allora:

$$A : \Delta_{0,T} \to W$$
$$A_{s,t} \overset{def}{=} Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}$$

Allora per $s \leq u \leq t$:

$$\delta A_{s,u,t} = \delta(Y X)_{s,u,t} + \delta(Y' \mathbb{X})_{s,u,t} ,$$

con:

- $\delta(Y X)_{s,u,t} = - Y_{s,u} X_{u,t}$;
- $\delta(Y' \mathbb{X})_{s,u,t} = - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} + Y'_s \delta \mathbb{X}_{s,u,t}$,

con:

$$\delta \mathbb{X}_{s,u,t} = \mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t},$$

per la relazione di Chen, da cui:

$$\delta (Y' \mathbb{X})_{s,u,t} = -Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} + Y'_s X_{s,u} \otimes X_{u,t}.$$

Dunque, ricapitolando:

$$\begin{aligned} \delta A_{s,u,t} &= -Y_{s,u} X_{u,t} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} + Y'_s X_{s,u} \otimes X_{u,t} = \\ &= [-Y_{s,u} + Y'_s X_{s,u}] \otimes X_{u,t} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} = \\ &= -R^Y_{s,u} X_{u,t} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} \| R^Y_{s,u} X_{u,t} \| &\le \| R^Y_{s,u} \| \| X_{u,t} \| \le \\ &\le \| R^Y \|_{2\alpha} [X]_\alpha |t-s|^{3\alpha}, \end{aligned}$$

mentre:

$$\begin{aligned} \| Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} \| &\le \| Y'_{s,u} \| \| \mathbb{X}_{u,t} \| \le \\ &\le [Y']_\alpha \| \mathbb{X} \|_{2\alpha} |t-s|^{3\alpha} \end{aligned}$$

Dunque:

$$\| \delta A_{s,u,t} \| \le ([X]_\alpha \| R^Y \|_{2\alpha} + [Y']_\alpha \| \mathbb{X} \|_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha};$$

con $3\alpha > 1$: il Sewing Lemma è allora applicabile.

Tralasciamo ora i dettagli sulla continuità di Φ (che comunque discende dalla continuità di I, nell'enunciato del Sewing Lemma, rispetto ad A), e concentriamoci sulla seconda stima.

Si ha:

$$\begin{aligned} [(Z, Z')]_{2\alpha} &= [Z']_\alpha + \| R^Z \|_{2\alpha} = \\ &= [Y]_\alpha + \| R^Z \|_{2\alpha}, \end{aligned}$$

dunque è sufficiente mostrare che:

$$\| R^Z \|_{2\alpha} \le \| Y' \|_{L^\infty} \| \mathbb{X} \|_{2\alpha} + C([X] \| R^Y \|_{2\alpha} + \| \mathbb{X} \|_{2\alpha} [Y']_{2\alpha})$$

Ora:

$$R^Z_{s,t} = Z_{s,t} - Z'_s X_{s,t} = \int_s^t Y_r \, dX_r - Y_s X_{s,t},$$

da cui:

$$\left\| \int_s^t Y_\tau \, dX_\tau - Y_s X_{s,t} \right\| \leq \| Y' \mathbb{X}_{s,t} \| +$$

$$+ C' \left([X]_\alpha \| R^Y \|_{2\alpha} + [Y']_\alpha \| \mathbb{X} \|_{2\alpha} \right) |t-s|^{3\alpha} \leq$$

$$\leq \| Y' \|_{L^\infty} \| \mathbb{X}_{s,t} \| + C \left([X] \| R^Y \|_{2\alpha} + [Y']_\alpha \| \mathbb{X} \|_{2\alpha} \right) |t-s|^{2\alpha},$$

con:

$$C = \max \{ C', C' T^\alpha \},$$

da cui:

$$\| R^Z \|_{2\alpha} \leq \| Y' \|_{L^\infty} \| \mathbb{X} \|_{2\alpha} +$$

$$+ C \left([X]_\alpha \| R^Y \|_{2\alpha} + [Y']_\alpha \| \mathbb{X} \|_{2\alpha} \right)$$

Per concludere, bisogna dimostrare che sia $Z \in C^{0,\alpha}([0,T], W)$. In effetti, si ragiona come visto sopra, usando la disuguaglianza triangolare per stimare la quantità:

$$\left\| \int_s^t Y_\tau \, dX_\tau \right\|,$$

eventualmente ridefinendo la costante C.

La dimostrazione è dunque completa, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Sia $f \in C^{0,2\alpha}([0,T])$, e siano $(X, \mathbb{X})$, $(X', \mathbb{X}')$ due Rough Paths in $\mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ tali che $X = X'$, e:

$\forall \; s,t \in [0,T]: \quad \mathbb{X}'_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + f(t) - f(s)$

Allora, se $(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T], W)$, risulta che:

$$(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{X'}([0,T], W)$$

(ciò è banale).

Vale allora:

$$\int_s^t Y_\tau \, dX'_\tau = \lim_{m \to +\infty} \sum_{\Pi_m} Y_{t_k} X'_{t_k, t_{k+1}} + Y'_{t_k} \mathbb{X}'_{t_k, t_{k+1}} =$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \sum_{\Pi_m} Y_{t_k} X_{t_k, t_{k+1}} + Y'_{t_k} \mathbb{X}_{t_k, t_{k+1}} +$$

$$+ \lim_{m \to +\infty} \sum_{\Pi_m} Y'_{t_k} \left[f(t_{k+1}) - f(t_k) \right] = \int_s^t Y_\tau \, dX_\tau + \int_s^t Y'_\tau \, df(\tau),$$

ove il secondo integrale è da intendersi nel senso di Young, in quanto $Y \in C^{0,\alpha}([0,T])$, $f \in C^{0,2\alpha}([0,T])$, e $\alpha > \frac{1}{3}$, da cui $\alpha + 2\alpha > 1$.

Nel caso particolare in cui X è il moto Browniano, e $\mathbb{X}$ è definito mediante l'integrazione secondo Itô, e $\mathbb{X}'$ è definito mediante l'integrazione secondo Stratonovich, allora:

$$\mathbb{X}'_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + \frac{t-s}{2}$$

Come conseguenza, ad esempio:

$$\int_s^t Y_\tau \circ dB_\tau = \int_s^t Y_\tau \, dB_\tau + \int_s^t Y'_\tau \, d\frac{\tau}{2} =$$

$$= \int_s^t Y_\tau \, dB_\tau + \frac{1}{2}\int_s^t Y'_\tau \, d\tau ,$$

se Y è controllato dal moto Browniano.