Introduzione al trasporto ottimo

Giacomo Colombo

- Sono dati:
  - uno spazio $X \subset \mathbb{R}^n$
  - una funzione costo boreliana $c\colon X \times X \to [0, +\infty]$
  - due probabilità μ, ν su X
- Consideriamo mappe boreliane $T\colon X \to X$ di **trasporto** tra μ e ν, ovvero tali che $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A)) =: T_{\#}\mu(A)$
- Ci chiediamo di trovare

$$\inf \int_X c(x, T(x))\, d\mu(x)$$

  tra tutte le mappe di trasporto

Il Problema Con Costo Quadratico

In particolare ci concentriamo sul problema con costo quadratico

$$\inf \int_X |x - T(x)|^2 \, d\mu, \quad T_\# \mu = \nu, \quad X \text{ compatto}$$

Il Problema Con Costo Quadratico

In particolare ci concentriamo sul problema con costo quadratico

$$\inf \int_X |x - T(x)|^2 \, d\mu, \quad T_{\#}\mu = \nu, \quad X \text{ compatto}$$

Ci chiediamo:

- esistenza e unicità
- proprietà qualitative dei minimi (regolarità)

Il Problema Con Costo Quadratico

In particolare ci concentriamo sul problema con costo quadratico

$$\inf \int_X |x - T(x)|^2 \, d\mu, \quad T_{\#}\mu = \nu, \quad X \text{ compatto}$$

Ci chiediamo:

- esistenza e unicità
- proprietà qualitative dei minimi (regolarità)

L'approccio per l'esistenza si basa sul metodo diretto

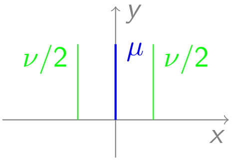
Fenomeni Tipici Del Problema

Fenomeni di **non esistenza**:

- se μ atomica e ν diffusa non ci sono mappe ammissibili

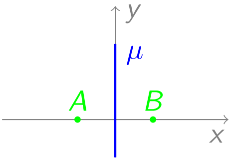
Fenomeni di **non esistenza**:

- se μ atomica e ν diffusa non ci sono mappe ammissibili
- se μ, ν come in figura non esistono mappe ottimali



Fenomeni di **non esistenza**:

- se μ atomica e ν diffusa non ci sono mappe ammissibili
- se μ, ν come in figura non esistono mappe ottimali



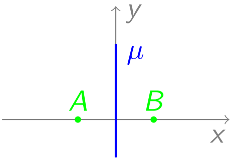
Fenomeni di **non unicità**:

- se μ, ν come in figura ogni mappa ammissibile è ottimale

Fenomeni Tipici Del Problema

Fenomeni di **non esistenza**:

- se μ atomica e ν diffusa non ci sono mappe ammissibili
- se μ, ν come in figura non esistono mappe ottimali



Fenomeni di **non unicità**:

- se μ, ν come in figura ogni mappa ammissibile è ottimale

Problema

Le mappe di trasporto con topologia debole o forte non sono uno spazio compatto

I Piani Di Trasporto

Definizione (Piano Di Trasporto)

Date due probabilità μ,ν su X, un **piano di trasporto** è una probabilità π su $X \times X$ tale che

$$p_{1\#}\pi = \mu, \quad p_{2\#}\pi = \nu.$$

- La quantità $\pi(A \times B)$ indica quanta massa in A viene trasportata in B

Definizione (Piano Di Trasporto)

Date due probabilità μ,ν su X, un **piano di trasporto** è una probabilità π su $X \times X$ tale che

$$p_{1\#}\pi = \mu, \quad p_{2\#}\pi = \nu.$$

- La quantità $\pi(A \times B)$ indica quanta massa in A viene trasportata in B
- Il **costo** di un piano di trasporto è

$$\int_{X \times X} |x - y|^2 \, d\pi(x, y)$$

- Una mappa di trasporto T induce un piano di trasporto $\pi_T := (Id \times T)_{\#}\mu$ con lo stesso costo

DEFINIZIONE (CONVERGENZA DEBOLE)

Una successione di probabilità μ_n su uno spazio metrico compatto Y converge debole a μ se

$$\int_Y \varphi \, d\mu_n \to \int_Y \varphi \, d\mu \quad \text{per ogni } \varphi \colon Y \to \mathbb{R} \text{ continua}$$

Definizione (Convergenza debole)

Una successione di probabilità μ_n su uno spazio metrico compatto Y converge debole a μ se

$$\int_Y \varphi \, d\mu_n \to \int_Y \varphi \, d\mu \quad \text{per ogni } \varphi \colon Y \to \mathbb{R} \text{ continua}$$

- Il funzionale costo è **sequenzialmente continuo** rispetto alla convergenza debole dei piani
- La classe di piani di trasporto è **chiusa** rispetto alla convergenza debole

Esistenza di Piani Ottimali

Definizione (Convergenza debole)

Una successione di probabilità μ_n su uno spazio metrico compatto Y converge debole a μ se

$$\int_Y \varphi \, d\mu_n \to \int_Y \varphi \, d\mu \quad \text{per ogni } \varphi\colon Y \to \mathbb{R} \text{ continua}$$

- Il funzionale costo è **sequenzialmente continuo** rispetto alla convergenza debole dei piani
- La classe di piani di trasporto è **chiusa** rispetto alla convergenza debole

Per usare Weierstrass serve **compattezza**

Esistenza di Piani Ottimali

Definizione (Convergenza debole)

Una successione di probabilità μ_n su uno spazio metrico compatto Y converge debole a μ se

$$\int_Y \varphi \, d\mu_n \to \int_Y \varphi \, d\mu \quad \text{per ogni } \varphi \colon Y \to \mathbb{R} \text{ continua}$$

- Il funzionale costo è **sequenzialmente continuo** rispetto alla convergenza debole dei piani

Teorema (Banach-Alaoglu)

*La famiglia di probabilità su uno spazio metrico compatto X è **sequenzialmente compatta** rispetto alla convergenza debole*

Mappe VS Piani

- Una mappa di trasporto T induce il piano $\pi_T = (Id \times T)_{\#}\mu$

Domanda

Quando un piano è indotto da una mappa?

- Una mappa di trasporto T induce il piano $\pi_T = (Id \times T)_{\#}\mu$

Domanda

Quando un piano è indotto da una mappa?

Lemma

Un piano di trasporto π è indotto da una mappa di trasporto T se è concentrato sul grafico G_T π-misurabile di una mappa T

- Una probabilità π è concentrata su un insieme A se $\pi(A^c) = 0$
- Un insieme E è π-misurabile se esistono due boreliani $A \subset E \subset B$ tali che $\pi(B \setminus A) = 0$

Regolarità dei Piani Ottimali

Nel caso discreto $\mu = 1/n \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$, $\nu = 1/n \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}$ con $x_i, y_j \in \mathbb{R}^n$ distinti:

- si può mostrare che i piani ottimali sono indotti da mappe

Nel caso discreto $\mu = 1/n \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$, $\nu = 1/n \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}$ con $x_i, y_j \in \mathbb{R}^n$ distinti:

- si può mostrare che i piani ottimali sono indotti da mappe
- se T è ottimale tale che $T(x_i) = y_i$ l'ottimalità di T è equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_{\sigma(i)} \right|^2 \qquad \forall \sigma \in S_n$$

Regolarità dei Piani Ottimali

Nel caso discreto $\mu = 1/n \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$, $\nu = 1/n \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}$ con $x_i, y_j \in \mathbb{R}^n$ distinti:

- si può mostrare che i piani ottimali sono indotti da mappe
- se T è ottimale tale che $T(x_i) = y_i$ l'ottimalità di T è equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_{\sigma(i)} \right|^2 \qquad \forall \sigma \in S_n$$

Definizione

Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ è **ciclicamente monotono** se per ogni scelta di punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in S$ si ha

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq 0 \quad \text{dove } x_{k+1} := x_1$$

- Il supporto di una misura è il più piccolo chiuso in cui è concentrata:

$$\operatorname{supp}\pi := \{x \in X \text{ t.c. } \pi(U) > 0 \text{ per ogni } U \text{ intorno aperto di } x\}$$

- Il supporto di una misura è il più piccolo chiuso in cui è concentrata:

$$\operatorname{supp}\pi := \{x \in X \text{ t.c. } \pi(U) > 0 \text{ per ogni } U \text{ intorno aperto di } x\}$$

Teorema

Se π è un piano ottimale con costo finito, allora il suo supporto è ciclicamente monotono

- Il supporto di una misura è il più piccolo chiuso in cui è concentrata:

$$\operatorname{supp}\pi := \{x \in X \text{ t.c. } \pi(U) > 0 \text{ per ogni } U \text{ intorno aperto di } x\}$$

Teorema

Se π è un piano ottimale con costo finito, allora il suo supporto è ciclicamente monotono

- Se ci sono dei punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \operatorname{supp}\pi$ tali che

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) > 0 \tag{1}$$

allora "trasportare massa da x_i in y_{i+1} è meglio che da x_i in y_i"

Se si considerano solo due punti nella definizione di monotonia si trova

$$(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0$$

Se si considerano solo due punti nella definizione di monotonia si trova

$$(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0$$

DEFINIZIONE (SOTTODIFFERENZIALE)

Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa lsc e $x \in \mathbb{R}^n$, il sottodifferenziale di f in x è

$$\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, f(y) \geq f(x) + p \cdot (y - x)\}$$

Se si considerano solo due punti nella definizione di monotonia si trova

$$(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0$$

Definizione (Sottodifferenziale)

Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa lsc e $x \in \mathbb{R}^n$, il sottodifferenziale di f in x è

$$\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, f(y) \geq f(x) + p \cdot (y - x)\}$$

- Se $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ e $y_i \in \partial f(x_i)$, allora sommando

$$y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

si ottiene la ciclica monotonia del grafico di ∂f

Il Teorema di Rockafellar

Teorema (Rockafellar)

Se $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *è ciclicamente monotono, allora esiste una funzione convessa* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tale che* $\Gamma \subset \mathrm{graph}(\partial f)$.

TEOREMA (ROCKAFELLAR)

Se $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *è ciclicamente monotono, allora esiste una funzione convessa* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tale che* $\Gamma \subset \mathrm{graph}(\partial f)$.

DIMOSTRAZIONE.

- Se f soddisfa la tesi, allora dati $x_0 \in \Gamma, x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \geq f(x_0) + \sum_{0}^{k} y_i \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad x_{k+1} = x, (x_i, y_i) \in \Gamma \tag{2}$$

$\square$

Il Teorema di Rockafellar

Teorema (Rockafellar)

Se $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *è ciclicamente monotono, allora esiste una funzione convessa* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tale che* $\Gamma \subset \mathrm{graph}(\partial f)$.

Dimostrazione.

- Se f soddisfa la tesi, allora dati $x_0 \in \Gamma, x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) \geq f(x_0) + \sum_{0}^{k} y_i \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad x_{k+1} = x, (x_i, y_i) \in \Gamma \tag{2}$$

- Fissato x_0, se definiamo f come l'estremo superiore delle somme in (2) con $f(x_0) = 0$ tale f soddisfa la tesi

$\square$

Ricapitolando

- Esistono piani ottimali
- Ogni piano ottimale ha supporto ciclicamente monotono
- Per Rockafellar ogni piano ottimale è concentrato nel grafico del sottodifferenziale di una funzione convessa f

Ricapitolando

- Esistono piani ottimali
- Ogni piano ottimale ha supporto ciclicamente monotono
- Per Rockafellar ogni piano ottimale è concentrato nel grafico del sottodifferenziale di una funzione convessa f

Quando il grafico di ∂f coincide *pi*-quasi ovunque con il grafico di ∇f?

- $\partial f(x)$ è singoletto se e solo se $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

Teorema (Rademacher)

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è Lipschitz allora è differenziabile $\mathscr{L}^n$-quasi ovunque

- Una funzione convessa reale è localmente Lipschitziana

- $\partial f(x)$ è singoletto se e solo se $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

Teorema (Rademacher)

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è Lipschitz allora è differenziabile $\mathscr{L}^n$-quasi ovunque

- Una funzione convessa reale è localmente Lipschitziana

Teorema (Brenier)

Siano μ, ν probabilità con $\int |\cdot|^2 \, d\mu, \int |\cdot|^2 \, d\nu < \infty$ e $\mu \ll \mathscr{L}^n$, allora esiste un'unica mappa ottimale per il costo quadratico, che è il gradiente di una funzione convessa

Esistenza per piani anche per costi $c \geq 0$ lsc:

Cenni al Caso Generale

Esistenza per piani anche per costi $c \geq 0$ lsc:

- se c è continuo, $\int c \, d\pi$ è continuo debole
- sup di funzioni continue è lsc

Cenni al Caso Generale

Esistenza per piani anche per costi $c \geq 0$ lsc:

- se c è continuo, $\int c \, d\pi$ è continuo debole
- sup di funzioni continue è lsc

Lemma

Data $c \geq 0$ lsc, esistono delle funzioni Lipschitz $0 \leq c_k \leq c_{k+1} \leq c$ tali che $c_k \to c$ puntualmente

Cenni al Caso Generale

Esistenza per piani anche per costi $c \geq 0$ lsc:

- se c è continuo, $\int c\, d\pi$ è continuo debole
- sup di funzioni continue è lsc

Lemma

Data $c \geq 0$ lsc, esistono delle funzioni Lipschitz $0 \leq c_k \leq c_{k+1} \leq c$ tali che $c_k \to c$ puntualmente

Dimostrazione.

Basta porre

$$c_k(x) := \inf_y c(y) + k\,|x - y|$$

$\square$

Si può estendere la regolarità dei piani tramite la c-dualità:
$x \cdot y \longrightarrow c(x, y)$

- funzioni c-concave
- c-monotonia dei piani
- Rockafellar generalizzato

Cenni al Caso Generale

Si può estendere la regolarità dei piani tramite la c-dualità:
$x \cdot y \longrightarrow c(x, y)$

- funzioni c-concave
- c-monotonia dei piani
- Rockafellar generalizzato

Tramite la c-dualità si può dimostrare la dualità di Rubinstein:

$$\inf \int_{X \times X} c \, d\pi =$$

$$\sup \int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\nu, \quad \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y), \quad \varphi, \psi \in \text{Lip}$$

Problema Isoperimetrico

Determinare, tra tutti insiemi con volume fissato, quelli con perimetro minimo.

- Consideriamo per semplicità aperti limitati con bordo C^1

Problema Isoperimetrico

Determinare, tra tutti insiemi con volume fissato, quelli con perimetro minimo.

- Consideriamo per semplicità aperti limitati con bordo C^1

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato C^1, e sia $B \subset \mathbb{R}^n$ la palla centrata nell'origine tale che $\mathscr{L}^n(E) = \mathscr{L}^n(B)$. Allora

$$\sigma_{n-1}(\partial B) \leq \sigma_{n-1}(\partial E)$$

Dimostrazione.

Se T è la mappa di Brenier tra $\mathscr{L}^n \llcorner E$ e $\mathscr{L}^n \llcorner B$, allora

- per la formula di cambio di variabili $T_{\#}\mu = \nu$ implica $|\det \nabla T| = 1$

$\square$

Dimostrazione.

Se T è la mappa di Brenier tra $\mathscr{L}^n \llcorner E$ e $\mathscr{L}^n \llcorner B$, allora

- per la formula di cambio di variabili $T_{\#}\mu = \nu$ implica $|\det \nabla T| = 1$
- per la disuguaglianza tra medie sugli autovalori questo implica $n \leq \operatorname{div} T$

$\square$

Dimostrazione.

Se T è la mappa di Brenier tra $\mathscr{L}^n \llcorner E$ e $\mathscr{L}^n \llcorner B$, allora

- per la formula di cambio di variabili $T_{\#}\mu = \nu$ implica $|\det \nabla T| = 1$
- per la disuguaglianza tra medie sugli autovalori questo implica $n \leq \operatorname{div} T$
- vale inoltre $|T| \leq 1$

$$\sigma_{n-1}(\partial B) = n\,|E| \leq \int_E \operatorname{div} T = \int_{\partial E} T \cdot \nu_E \leq \sigma_{n-1}(\partial E)$$

$\square$

Problema della Dimostrazione

In generale T non è sufficientemente liscia

Criticità e Soluzioni Proposte

Problema della Dimostrazione

In generale T non è sufficientemente liscia

Idea: approssimare per convoluzione con funzioni T_ε

$$\int_E \operatorname{div} T_\varepsilon = \int_{\partial E} T_\varepsilon \cdot \nu_E \leq \sigma_{n-1}(\partial E)$$

Problema della Dimostrazione

In generale T non è sufficientemente liscia

Idea: approssimare per convoluzione con funzioni T_ε

$$n\,|E| \overset{?}{\leq} \int_E \operatorname{div} T_\varepsilon = \int_{\partial E} T_\varepsilon \cdot \nu_E \leq \sigma_{n-1}(\partial E)$$

Come si stima, al limite, div T_ε?

Problema della Dimostrazione

In generale T non è sufficientemente liscia

Idea: approssimare per convoluzione con funzioni T_ε

$$(n + o(1)\,|E| \leq \int_E \operatorname{div} T_\varepsilon = \int_{\partial E} T_\varepsilon \cdot \nu_E \leq \sigma_{n-1}(\partial E)$$

Come si stima, al limite, div T_ε?

Claim: div $T_\varepsilon \geq n + o(1)$

Teorema

Se T è la mappa di Brenier tra $\mathscr{L}^n \llcorner E$ e $\mathscr{L}^n \llcorner B$, allora T è differenziabile quasi ovunque e

$$\det \nabla T = 1 \quad \mathscr{L}^n - q.o. \ su \ E \tag{MA}$$

Teorema

Se T è la mappa di Brenier tra $\mathscr{L}^n \llcorner E$ e $\mathscr{L}^n \llcorner B$, allora T è differenziabile quasi ovunque e

$$\det \nabla T = 1 \quad \mathscr{L}^n - q.o. \ su \ E \tag{MA}$$

- Resta vero che $\operatorname{div} T \geq n$

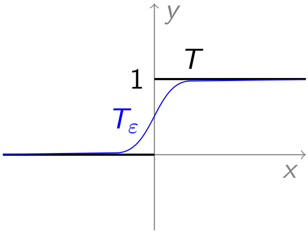
Teorema

Se T è la mappa di Brenier tra $\mathscr{L}^n \llcorner E$ e $\mathscr{L}^n \llcorner B$, allora T è differenziabile quasi ovunque e

$$\det \nabla T = 1 \quad \mathscr{L}^n - q.o.\ su\ E \tag{MA}$$

- Resta vero che $\operatorname{div} T \geq n$

Non è vero che $\operatorname{div} T_\varepsilon \to \operatorname{div} T$ in L^1



Derivate Deboli

Se $\varphi_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ lisce tali che $\varphi_n \to u$ e $\varphi_n' \to v$ in L^1 allora

$$u(t) - u(s) = \int_s^t v(\sigma)\, d\sigma \quad \text{per quasi ogni } s < t \in [a, b] \tag{3}$$

Derivate Deboli

Se $\varphi_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ lisce tali che $\varphi_n \to u$ e $\varphi_n' \to v$ in L^1 allora

$$u(t) - u(s) = \int_s^t v(\sigma)\, d\sigma \quad \text{per quasi ogni } s < t \in [a, b] \tag{3}$$

Definizione (Derivata Debole)

Una funzione $u \in L^1(a, b)$ ha derivata debole $v \in L^1(a, b)$ se vale (3)

Se $\varphi_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ lisce tali che $\varphi_n \to u$ e $\varphi_n' \to v$ in L^1 allora

$$u(t) - u(s) = \int_s^t v(\sigma)\, d\sigma \quad \text{per quasi ogni } s < t \in [a,b] \tag{3}$$

Definizione (Derivata Debole)

Una funzione $u \in L^1(a,b)$ ha derivata debole $v \in L^1(a,b)$ se vale (3)

T è solo monotona, mentre una funzione che ammette derivata debole è continua!

Derivate Deboli

Se $\varphi_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ lisce tali che $\varphi_n \to u$ e $\varphi_n' \to v$ in L^1 allora

$$u(t) - u(s) = \int_s^t v(\sigma)\, d\sigma \quad \text{per quasi ogni } s < t \in [a, b] \tag{3}$$

Definizione (Derivata Debole)

Una funzione $u \in L^1(a, b)$ ha derivata debole $v \in L^1(a, b)$ se vale (3)

T è solo monotona, mentre una funzione che ammette derivata debole è continua!

Definizione

Una funzione $u \in L^1(a, b)$ ammette derivata debole μ misura con segno se

$$u(t) - u(s) = \mu((s, t]) \quad \text{per quasi ogni } s < t \in [a, b]$$

Idea: la generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo in dimensione maggiore di 1 è l'integrazione per parti

DEFINIZIONE

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione $u \in L^1(\Omega)$ ammette derivata $i - esima$ debole μ_i misura con segno se

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = - \int_\Omega \varphi \, d\mu_i$$

Derivate Deboli in Dimensione Maggiore di 1

Idea: la generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo in dimensione maggiore di 1 è l'integrazione per parti

Definizione

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione $u \in L^1(\Omega)$ ammette derivata $i - esima$ debole μ_i misura con segno se

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = - \int_\Omega \varphi \, d\mu_i$$

- Nel caso $n = 1$ è equivalente alla definizione precedente

Derivate Deboli in Dimensione Maggiore di 1

Idea: la generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo in dimensione maggiore di 1 è l'integrazione per parti

Definizione

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione $u \in L^1(\Omega)$ ammette derivata $i-esima$ debole μ_i misura con segno se

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = - \int_\Omega \varphi \, d\mu_i$$

- Nel caso $n = 1$ è equivalente alla definizione precedente
- Si ha

$$D_i(u * \rho) = (D_i u) * \rho$$

Idea: la generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo in dimensione maggiore di 1 è l'integrazione per parti

Definizione

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione $u \in L^1(\Omega)$ ammette derivata $i-esima$ debole μ_i misura con segno se

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = -\int_\Omega \varphi \, d\mu_i$$

- Nel caso $n = 1$ è equivalente alla definizione precedente
- Si ha
$$D_i(u * \rho) = (D_i u) * \rho$$
- se $T_\varepsilon \to T$ sono approssimanti per convoluzione, anche $D_i T_\varepsilon \to D_i T$

Proprietà Fini di Funzioni Convesse

In dimensione 1:

- una funzione convessa è derivabile quasi ovunque con derivata monotona
- le funzioni monotone sono differenziabili quasi ovunque
- ogni funzione monotona ha una misura positiva come derivata debole

Proprietà Fini di Funzioni Convesse

In dimensione 1:

- una funzione convessa è derivabile quasi ovunque con derivata monotona
- le funzioni monotone sono differenziabili quasi ovunque
- ogni funzione monotona ha una misura positiva come derivata debole

Teorema (Aleksandrov)

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa, allora:

- *per quasi ogni punto x esiste una matrice* ***simmetrica semidefinita positiva*** $\nabla^2 f(x)$ *tale che*

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) + 1/2(y - x) \cdot \nabla^2 f(x)(y - x) + o(y - x)$$

- *per ogni i la derivata debole $D_i^2 f$ è una misura* ***positiva*** *localmente finita, e la parte assolutamente continua rispetto a Lebesgue è data da $\partial_i^2 f$*

Dimostrazione della Disuguaglianza Isoperimetrica

Dimostrazione.

- Basta $\operatorname{div} T_\varepsilon \geq n + o(1)$

$\square$

Dimostrazione della Disuguaglianza Isoperimetrica

Dimostrazione.

- Basta $\operatorname{div} T_\varepsilon \geq n + o(1)$
- $\operatorname{div} T_\varepsilon \to \operatorname{Div} T$

$\square$

Dimostrazione della Disuguaglianza Isoperimetrica

Dimostrazione.

- Basta $\operatorname{div} T_\varepsilon \geq n + o(1)$
- $\operatorname{div} T_\varepsilon \to \operatorname{Div} T$
- $\operatorname{Div} T = \operatorname{div} T \mathscr{L}^n + \lambda$, $\lambda \geq 0$

$\square$

Dimostrazione della Disuguaglianza Isoperimetrica

Dimostrazione.

- Basta $\operatorname{div} T_\varepsilon \geq n + o(1)$
- $\operatorname{div} T_\varepsilon \to \operatorname{Div} T$
- $\operatorname{Div} T = \operatorname{div} T \mathscr{L}^n + \lambda$, $\lambda \geq 0$
- $\operatorname{div} T_\varepsilon = \operatorname{div} T \mathscr{L}^n + \lambda + o(1) \geq n + o(1)$

$\square$

- L. Ambrosio, E. Brué, D. Semola, *Lectures on Optimal Transport*
- L. C. Evans, R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*
- A. Figalli, F. Maggi, A. Pratelli, *A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities*