Appunti del corso di Istituzioni di Algebra 2015/2016

Teoria della Dimensione

12 gennaio 2016

Indice

Capitolo 1

Teoria della dimensione per le $\mathbb{K}$-algebre

1.1 Dimensione di un anello e $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate

Definizione 1.1. La *dimensione di Krull* di A è

$$\dim(A) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste una catena di ideali primi } p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n\}$$

Esempio 1. Se A è un campo ha dimensione zero. $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ha dimensione n.

In termini di dimensione, i risultati sulle estensioni intere si traducono così:

Proposizione 1.1. Sia $A \subseteq B$ un'estensione intera di anelli. Allora

$$\dim(A) = \dim(B)$$

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\dim(A) \geq \dim(B)$. Consideriamo una catena di primi che realizza la dimensione di B:

$$q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n$$

Contraendo gli ideali, otteniamo una catena di primi in A e i contenimenti rimangono stretti per il Corollario **??**, da cui $\dim(A) \geq n = \dim(B)$. L'altra disuguaglianza è una conseguenza diretta del Teorema del Going Up. □

Chiaramente la dimensione di un anello può anche essere infinita. Questo può succedere anche nel caso noetheriano: anche se non esistono catene di lunghezza infinita può accadere che non ci sia un limite superiore alla lunghezza delle catene.
Non è nemmeno vero in generale che catene massimali tra due ideali abbiano la stessa lunghezza, gli anelli che godono di questo particolare proprietà rientrano nella seguente classe:

Definizione 1.2. Un anello è detto *catenario* se per ogni coppia di ideali primi p, q le catene massimali della forma

$$p = q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n = q$$

hanno tutte la stessa lunghezza.

Mostreremo più avanti che sia le $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate sia gli anelli noetheriani locali sono catenari. Tuttavia Questa classe è non banale, esistono esempi di anelli non catenari, seguono due controesempi.
Inserire

È interessante studiare la dimensione in relazioni agli ideali.

Definizione 1.3. Sia p un ideale primo di un anello A.
Definiamo *altezza* di p

$$\operatorname{ht} p := \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste catena di ideali primi } p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n = p\}$$

e *coaltezza* di p

$$\operatorname{coht} p := \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste catena di ideali primi } p = p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n\}$$

Osservazione 1. La coaltezza non è altro che la dimensione di A/p e l'altezza di A_p .

Un risultato estremamente importante in algebra commutativa e in geometria algebrica è il Lemma di Normalizzazione di Noether. Grazie a questo saremo in grado di studiare la dimensione per gli anelli che sono $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate.

Teorema 1.1 (Lemma di Normalizzazione di Noether)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. Allora esistono $x_1, \ldots, x_r$ elementi algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$ tali che A è intero su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$.

Dimostrazione. Per ipotesi $A = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$. Se $y_1, \ldots, y_m$ algebricamente indipendenti abbiamo finto. Altrimenti, supponiamo che esista una relazione

$$0 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m} \tag{1.1}$$

dove $a_\alpha \neq 0$ per ogni α e compare almeno una volta y_m. Vogliamo mostrare che A è intero su un anello $\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_{m-1}]$. Una volta fatto ciò avremmo che se gli z_j sono indipendenti avremmo finito, altrimenti basterà iterare il procedimento fino a ridurci al caso base.

Per fare ciò consideriamo il morfismo seguente

$$\begin{aligned} y_1 &\mapsto z_1 + z_m^{b_1} \\ y_2 &\mapsto z_2 + z_m^{b_2} \\ &\vdots \\ y_{m-1} &\mapsto z_{m-1} + z_m^{b_{m-1}} \\ y_m &\mapsto z_m \end{aligned}$$

Se possiamo scegliere i b_j in modo che y_m sia intero su $\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_{m-1}]$, abbiamo finito.
Sostituiamo nell'equazione (1.1) y_i con $z_i + z_m^{b_i}$; usando le proprietà del multindice, otteniamo

$$\sum_\alpha c_\alpha y_m^{\alpha+(b_1,\ldots,b_m)} + \underbrace{\phi(z_1, \ldots, z_{m-1}, y_m)}_{\text{senza potenze pure in } y_m} = 0$$

Dobbiamo far vedere che esiste una scelta di $b_1, \ldots, b_m$ tale che l'insieme

$$\{\alpha + (b_1, \ldots, b_m) \mid \text{per } c_\alpha \neq 0\}$$

sia fatto di elementi tutti distinti. Indichiamo con $N = \sup \alpha_j + 1$ e poniamo $(b_1, \ldots, b_m) = (N, N^2, \ldots, N^{m-1}, 1)$; allora $\alpha + (b_1, \ldots, b_m)$ non è altro che la scrittura in base N di α che chiaramente è unica. □

Osservazione 2. Sia $\mathbb{K}$ infinito e $z_i = y_i + \lambda y_m$. $[z_1, \ldots, z_{m-1}]/I$ mhhh

Corollario 1.1. Ogni A $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata è intera su un dominio isomorfo ad un anelli di polinomi.

Proposizione 1.2.

i. $\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = n$.

ii. Se $f \neq 0$ allora $\dim(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_f) = n$

Dimostrazione. i. In $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ esiste una catena di ideali primi

$$0 \subsetneq (x_1) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1, \ldots, x_n)$$

allora $\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \geq n$. Per induzione su n dimostriamo che vale la disuguaglianza opposta. Per $n = 0, 1$ perché abbiamo rispettivamente un campo e un PID. Se $n > 1$ consideriamo una catena di primi

$$0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_m$$

e dimostriamo che $m \leq n$. Esiste $g \in p_1$ irriducibile, possiamo quindi definire $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(g)$. Le classi $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ non sono linearmente indipendenti, allora per il Teorema 1.1 A è intero su un certo $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ con $s < n$. Allora per ipotesi induttiva $\dim A \leq s < n$, ma nel quoziente ho una catena di primi

$$0 \subsetneq {p_1}/{(g)} \subsetneq \cdots \subsetneq {p_m}/{(g)}$$

Nuovamente per ipotesi induttiva allora $m \leq n$.

ii. Sia $f \neq 0$. Usando la corrispondenza degli ideali abbiamo

$$\dim(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_f) \leq n.$$

Consideriamo adesso due casi distinti. Se $\mathbb{K}$ è infinito allora esiste $\alpha \in \mathbb{K}^n$ tale che $f(\alpha) \neq 0$. Esiste quindi la catena di primi

$$0 \subsetneq (x_1 - \alpha_1) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$$

Allora $\dim(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_f) = n$. Se $\mathbb{K}$ è un campo finito l'estensione $\bar{\mathbb{K}}[x_1, \ldots, x_n] \supset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, dove $\bar{\mathbb{K}}$ è la chiusura algebrica[1] di $\mathbb{K}$, è intera e quindi grazie alla Proposizione 1.1 ci riconduciamo al caso precedente.

□

1.2 Gradi di trascendenza di una $\mathbb{K}$-algebra

Definizione 1.4. Sia A una $\mathbb{K}$-algebra e $\{x_i\}_{i \in I}$ un suo sottoinsieme. Diremo che gli x_i sono una *base di trascendenza* di A su $\mathbb{K}$ se

- sono algebricamente indipendenti,
- formano un sottoinsieme massimale con questa proprietà.

Definizione 1.5. Il *grado di trascendenza* di A su $\mathbb{K}$ è la minima cardinalità di una base di trascendenza e lo indicheremo col simbolo $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} A$.

Alla luce del teorema Noether il grado di trascendenza (che può essere anche infinito) quantifica, in un certo senso, quanto non l'algebra non è intera su $\mathbb{K}$. Di tutte le k algebre sono particolarmente interessanti quelle che sono anche domini:

Proposizione 1.3. Sia A un dominio e una $\mathbb{K}$-algebra, indichiamo con L il campo delle frazioni di A. Preso un insieme $\{x_i\}_{i \in I}$ di elementi algebricamente indipendenti di A, i seguenti fatti sono equivalenti:

[1] Ha cardinalità infinita.

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ è una base di trascendenza di A su $\mathbb{K}$;

(ii) $\{x_i\}_{i\in I}$ è una base di trascendenza di L su $\mathbb{K}$;

(iii) $L/\mathbb{K}(\{x_i\})$ è un estensione algebrica.

Dimostrazione. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Indichiamo $E = \mathbb{K}(\{x_i\})$. Gli $\{x_i\}$ sono una base di trascendenza se e solo se ogni $y \in L$ è algebrico su E.
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Se $\{x_i\}_{i\in I}$ è una base di trascendenza di L su $\mathbb{K}$ lo è anche di A. Viceversa, si y in L dobbiamo mostrare che è algebricamente dipendente dagli x_i. Ma $y = \frac{a}{b}$ con $a, b \in A$ è quindi algebricamente dipendente dagli x_i; allora esistono $f, g \in \mathbb{K}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}][t]$ tali che $f(a) = g(b) = 0$. perciò a, b sono algebrici su $\mathbb{K}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$ e quindi y è algebricamente dipendente su $\mathbb{K}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Dunque dato che $\mathbb{K}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \subseteq L$ abbiamo la tesi. $\square$

Corollario 1.2. Sia A un dominio e una $\mathbb{K}$-algebra, indichiamo con L il suo campo delle frazioni. Allora

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} A = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} L.$$

Questa proposizione ci permette di dimostrare il seguente teorema, grazie al quale saremo in grado di caratterizzare la dimensione delle $\mathbb{K}$-algebra che sono domini in termini di grado di trascendenza.

Teorema 1.2. Sia L un campo che contiene $\mathbb{K}$ tale che $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} L = n$ è finito. Allora tutte basi di trascendenza hanno tutte cardinalità n.

Dimostrazione. Consideriamo una base di trascendenza di cardinalità minima $y_1, \ldots, y_n$ di L su $\mathbb{K}$ ed un'altra eventualmente infinita $z_1, \ldots, z_m$. Per la proposizione precedente ogni y_i è algebrico su $\mathbb{K}(\{z_j\})$, in particolare a meno di riordinare gli indici $\{y_1, \ldots, y_n\}$ è algebrico $\mathbb{K}(z_1, \ldots, z_N)$ con N finito. Ma dato che $L/\mathbb{K}(\{y_i\})$ e $\mathbb{K}(\{y_i\})/\mathbb{K}(z_1, \ldots, z_N)$ sono estensioni algebriche, allora $L/\mathbb{K}(z_1, \ldots, z_N)$ è algebrica e quindi per la Proposizione 1.3 $z_1, \ldots, z_N$ sono una base di trascendenza e quindi $m = N$.
Facciamo vedere intanto che $N \leq n$. Indichiamo con $A = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$; ogni z_j è algebrico su A, per definizione di base di trascendenza. Allora esiste $a \in A$ tale che z_j è intero su A_a: infatti esiste presa la relazione algebrica minimale

$$\sum_{\alpha \in N^n} c_\alpha y^\alpha z_j^{i_\alpha}$$

con $c_\alpha \in \mathbb{K}$ basta scegliere a come prodotto degli $a_j = c_\alpha y^\alpha$, per α che massimizza i_α, prendere a come prodotto degli a_j.
Dunque l'estensione $A_a \subseteq A_a[z_1, \ldots, z_N]$ è intera e ha dimensione $\dim A_a = n$ per Proposizione 1.2ii.. Infatti consideriamo

$$B = \mathbb{K}[z_1, \ldots, z_N] \subseteq A_a[z_1, \ldots, z_N] = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n, \frac{1}{a}, z_1, \ldots, z_N]$$

Gli y_i e $\frac{1}{a}$ sono algebrici su $\mathbb{K}(z_1, \dots, z_N)$, allora con lo stesso trucco usato prima possiamo trovare $b \in B$ tale che y_i e $\frac{1}{a}$ siano interi su B_b. $B_b \subseteq A_a[z_1, \dots, z_N]_b$ è intera, perciò usando a Proposizione 1.2ii. si ha

$$N = \dim B_b = \dim(A_a[z_1, \dots, z_N]_b) \leq \dim(A_a[z_1, \dots, z_N]) = n.$$

' Per concludere basta osservare che per minimalità deve valere l'uguaglianza. □

Corollario 1.3. Sia A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. Se A è un dominio allora

$$\dim A = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} A < \infty.$$

Dimostrazione. Per il Lemma di normalizzazione di Noether A intera su un anello $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con indeterminate algebricamente indipendenti. Allora $x_1, \dots, x_n$ sono una base di trascendenza di A e per la proposizione 1.1

$$\dim A = \dim B = n = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} A$$

□

Alla luce di quanto appena dimostrato, siamo in grado di dimostrare che le $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate sono catenarie. Prima però dimostriamo il seguente lemma:

Lemma 1.1. Sia A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata e $p \in \operatorname{Spec} A$ tale che $\operatorname{ht} p = 1$. Se A è un dominio, allora

$$\dim A/p = \dim A - 1.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un anello di polinomi. Dato che p è primo, esiste $f \in p$ un polinomio irriducibile e visto che $\operatorname{ht} p$ allora $p = (f)$, altrimenti $(0) \subsetneq (f) \subsetneq p$. A meno di riordinare le variabili, esisteranno $f_s, \dots, f_0 \in \mathbb{K}[x_2, \dots, x_n]$ tali che

$$f = f_s(x_2, \dots, x_n)x_1^s + \dots + f_0(x_2, \dots, x_n)$$

Ma dato che $(f) \cap \mathbb{K}[x_2, \dots, x_n] = \{0\}$, l'omomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & \mathbb{K}[x_2, \dots, x_n] & \to & A/(f) \\ & g & \mapsto & \bar{g} \end{array}$$

è iniettivo. Allora $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ sono algebricamente indipendenti su $B = A/(f)$ e lo generano come $\mathbb{K}$-algebra. $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ quindi per il Lemma di Normalizzazione esistono $y_1, \dots, y_{n-1}$ (qui stiamo usando i risultati sul grado di trascendenza) algebricamente indipendenti tali che B è intero su $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_{n-1}]$. Allora in questo caso vale la tesi

$$\dim A/p = \dim B = n - 1.$$

Sia adesso A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. Per il Lemma di normalizzazione di Noether, A è intero su un anello $B = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$ con $y_1, \ldots, y_n$ algebricamente indipendenti. Vogliamo mostrare che è possibile ridurci al caso precedente. Sia $p \in \mathrm{Spec}A$ di altezza uno,esiste $q = p \cap B$:

$$\begin{array}{ccccc} (0) & \subset & p & \subset & A \\ \cup & & \cup & & \cup \\ (0) & \subset & q & \subset & B \end{array}$$

Anche $\mathrm{ht}_B\, q = 1$: se fosse maggiore infatti per il Teorema del Going Down avrei una catena anche in A

$$\begin{array}{ccccccccccc} (0) & \subset & p_1 & \subset & p_2 & \ldots & \subset & p & \subset & A \\ \cup & & \cup & & \cup & & & \cup & & \cup \\ (0) & \subset & q_1 & \subset & q_2 & \ldots & \subset & q & \subset & B \end{array}$$

che è assurdo poiché $\mathrm{ht}_A\, p = 1$; non può nemmeno avere altezza zero poiché in tal caso $q = (0)$ e quindi $p = 0$, assurdo. Allora $\dim {}^{B}\!/_{q} = \dim B - 1 = \dim A - 1$ e dato che ${}^{B}\!/_{q} \subseteq {}^{A}\!/_{p}$ è intera

$$\dim {}^{A}\!/_{p} = \dim {}^{B}\!/_{q} = \dim A - 1.$$

□

Teorema 1.3. Sia adesso A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata $p, q \in \mathrm{Spec}A$ tali che $p \subset q$. Allora ogni catena massimale di primi

$$p = q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n = q$$

ha lunghezza $n = \dim {}^{A}\!/_{p} - \dim {}^{A}\!/_{q}$.

Dimostrazione. Consideriamo una catena massimale di primi

$$p = q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n = q$$

Allora abbiamo la catena di domini

$${}^{A}\!/_{p} = {}^{A}\!/_{q_0} \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{q_1} \twoheadrightarrow \ldots {}^{A}\!/_{q_{n-1}} \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{q}$$

Ma per ogni i

$${}^{\left({}^{A}\!/_{q_i}\right)}\!/_{\left({}^{q_{i+1}}\!/_{q_i}\right)} = {}^{A}\!/_{q_{i+1}}$$

e $\mathrm{ht}\, {}^{q_{i+1}}\!/_{q_i} = 1$. Per il Lemma 1.1

$${}^{A}\!/_{q_{i+1}} = \dim {}^{A}\!/_{q_i} - 1$$

dunque $n = \dim {}^{A}\!/_{q} - \dim {}^{A}\!/_{p}$. □

Teorema 1.4. Sia A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. Se A è un dominio, allora per ogni $p \in \mathrm{Spec}A$

$$\dim A = \operatorname{ht} p + \operatorname{coht} p.$$

Dimostrazione. Sia $p \in \mathrm{Spec}A$ e $p \subseteq \mathfrak{m}$ un massimale. Osserviamo che ogni catena massimale tra (0) $\mathfrak{m}$ per il Teorema 1.3 deve avere lunghezza

$$A\big/_{(0)} - \dim A\big/_{\mathfrak{m}} = \dim A - 0 = \dim A.$$

Allora dato che $(0) \subset p \subseteq \mathfrak{m}$, $\dim A \geq \operatorname{ht} p + \operatorname{coht} p$. Se prendiamo una catena massimale tra (0) $\mathfrak{m}$ che contenga p

$$(0) \subsetneq \cdots \subseteq q_i = p \subsetneq \cdots \subsetneq q_{i+j} = \mathfrak{m}$$

abbiamo che $i + j = \dim A$ e che per definizione $i \leq \operatorname{ht} p$ e $j \leq \operatorname{coht} p$, ossia deve valere anche che $\dim A \leq \operatorname{ht} p + \operatorname{coht} p$. $\square$

1.3 Anelli di dimensione zero

Definizione 1.6. Sia A un anello. A è artiniano se se ogni famiglia di ideali (ordinata per inclusione) ha un elemento minimale.

Teorema 1.5. *A è un anello artiniano se e solo se è noetheriano e ha dimensione zero.*

Per dimostrare questo teorema servono alcuni risultati, alcuni dei quali sono indipendentemente interessanti, a proposito degli artiniani.

Lemma 1.2. Se A è un anello artiniano allora ha dimensione zero. In particolare ogni primo è massimale.

Dimostrazione. Sia $p \in \mathrm{Spec}A$, $B = A/p$ è un dominio artiniano. Vogliamo mostrare che allora è una campo. Prendiamo un elemento $x \in B \setminus \{0\}$. La catena $(x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^3) \supseteq \dots$ è stazionaria perciò esiste n tale che $(x^n) = (x^{n+1})$, ossia esiste $b \in B$ tale che $x^n = bx^{n+1}$. Allora $x^n(1 - bx) = 0$ e visto che B è un dominio $bx = 1$. Abbiamo quindi mostrato che ogni elemento eccetto zero è invertibile, cioè B è un campo. $\square$

Lemma 1.3. Sia A un anello in cui esistono $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k$ massimali (non necessariamente distinti) tali che $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k = 0$. Allora è artiniano se e solo se è noetheriano.

Dimostrazione. Sia $A_j = \prod_{i=1}^{j} \mathfrak{m}_i$, allora è ben definita la catena

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k = (0).$$

I quozienti $A_j\big/_{A_{j+1}} = A_j\big/_{\mathfrak{m}_j A_j} = A_j \otimes A\big/_{\mathfrak{m}_j}$ sono degli $A\big/_{\mathfrak{m}_j}$ moduli, in particolare sono degli spazi vettoriali. Per K spazio vettoriale le seguenti tre condizioni sono equivalenti:

- le catene discendenti hanno minimo, ossia essere artiniano;
- ogni sottospazio è finitamento generato, cioè avere dimensione finito;
- le catene scendenti hanno massimo, ossia essere noetheriano;

Tuttavia i sottospazi di ogni $A/_{\mathfrak{m}_j}$ spazio corrispondono proprio agli A moduli. Perciò vale che $A_j/_{A_{j+1}}$ noetheriano se e solo se artiniano.
Mostriamo che questo basta per ottenere la tesi. Innanzi tutto osserviamo che per ogni j la seguente successione è esatta:

$$0 \to A_{j+1} \to A_j \to A_j/_{A_{j+1}} \to 0$$

Sappiamo che i moduli ai lati sono rispettivamente noetheriani o artiniani se e solo se lo quello al centro è noetheriano o artiniano. Partendo da A_k che è chiaramente artiniano e noetheriano, risalendo attraverso la catena abbiamo che

$$A \text{ noetheriano } \Leftrightarrow \forall j \; A_j/_{A_{j+1}} \text{ noetheriano } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall j \; A_j/_{A_{j+1}} \text{ artinano } \Leftrightarrow A \text{ artiniano}$$

□

Lemma 1.4. Sia A un anello noetheriano e $\mathcal{N}$ il suo nilradicale. Allora esiste k tale che $\mathcal{N}^k = 0$.

Dimostrazione. A un anello noetheriano, così $\mathcal{N}$ è finitamente generato. Allora basta scegliere k come il minimo comune multiplo dell'ordine di nilpotenza dei generatori. □

Lemma 1.5. Se A è un anello artiniano allora ha un numero finito di massimali.

Dimostrazione. Prendiamo la famiglia $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di massimali di A. Dato che esiste sempre un massimale $\mathcal{B} \neq \varnothing$ e le catene discendenti hanno sempre minimo, perché A è artiniano, possiamo usare il lemma di Zorn e trovare un elemento minimale $\cap_{i=1}^t \mathfrak{m}_i$. Diciamo che $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t$ sono tutti e soli gli elementi dello spettro. Se ce ne fosse una altro $\mathfrak{m}$ avremmo che $\mathfrak{m} \cap_{i=1}^t \mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m} \cap_{i=1}^t \mathfrak{m}_i$, ma per minimalità $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m} \cap_{i=1}^t \mathfrak{m}_i$. Per il lemma di scansamento $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_i$, allora deve valere l'uguale perché sono ideali massimali. □

Lemma 1.6. Sia A è un anello artinano e $\mathcal{N}$ il suo nilradicale. Allora esiste k tale che $\mathcal{N}^k = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo la catena discendente

$$\mathcal{N} \supseteq \mathcal{N}^1 \supseteq \mathcal{N}^2 \supseteq \dots .$$

per artinianità esiste $s \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{N}^t = \mathcal{N}^s$ per ogni $t \geq s$. Per praticità, poniamo $I = \mathcal{N}^s$, il nostro scopo è provare che $k = s$. Supponiamo che $I \neq 0$, allora l'insieme

$$\mathcal{C} \coloneqq \{J \subset A \ \mid \ JI \neq 0\}$$

è non vuoto e dato che A è artiniano allora $\mathcal{C}$ ha un elemento minimale L per Zorn.
Sia $x \in L$ tale che $xI \neq 0$ per minimalità $L = (x)$. Inoltre abbiamo che $LI = L$; infatti $LI \cdot I = L\mathcal{N}^{2s} = L\mathcal{N}^s = LI \neq 0$ e quindi ci dice che $LI \in \mathcal{C}$, allora per minimalità $LI \supseteq L$, l'altra inclusione è ovvia.
L è un ideale principale e dunque un A modulo finitamente generato. Osserviamo poi che $\mathcal{N} = \mathcal{J}$ il jacobson di A e $I \subseteq \mathcal{N}$: per il lemma di Nakayama $L = 0$, che implica $LI = 0$. Abbiamo raggiunto un assurdo. □

Possiamo dimostrare il Teorema **??**:

Dimostrazione. Supponiamo che A sia artinano. Per il Lemma 1.2 ha dimensione zero. Per il Lemma 1.5 Spec$A = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k\}$, chiaramente essi sono a due a due comassimali e quindi $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_k = \mathcal{N}$. Per il Lemma 1.6 allora esiste s tale che $(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k)^s = 0$; siamo nelle ipotesi del Lemma 1.3 e quindi A è anche noetheriano.
Viceversa, usando la decomposizione primaria (siamo in una anello noetheriano) abbiamo che ogni ideale si scrive come intersezione finita dei sui primi minimali, cosicché $\mathcal{N} = \cap_1^t P_j$. La dimensione di A è zero, allora tali primi sono anche massimali. Per il Lemma 1.4 esiste k tale che $(\cap_1^t P_j)^s = (\prod_1^t P_j)^s = 0$; siamo ancora una volta nelle ipotesi del Lemma 1.3 e quindi A è anche artinano. □

Capitolo 2

Moduli Graduati e Serie di Hilbert

2.1 Lunghezza di un Modulo

Definizione 2.1. Sia M un A-modulo. Esso si dice *semplice* o *irriducibile* se $M \neq 0$ e gli unici sottomoduli di M sono 0 ed M.

Definizione 2.2. Dato M, una successione di sottomoduli $0 = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ si dice una *serie di Jordan Holder (J.H.)* se é massimale, ovvero se ${M_i}/{M_{i-1}}$ é semplice per ogni i.

Definizione 2.3. Se M ammette serie di J.H. finita si dice che M ha *lunghezza finita*. Definiamo allora

$$l(M) \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste una serie di J.H. di n+1 termini}\}$$

In analogia a quanto fatto per calcolare la dimensione di un anello, è lecito chiedersi come si relazionino le lunghezze di un modulo e dei suoi sottomoduli. In generale non si può dire niente, tuttavia se il modulo ha lunghezza finita valgono dei risultati interessanti.

Osservazione 3. Sia M un A-modulo con di lunghezza finita n. Allora esiste un serie di J.H. di lunghezza n

$$0 = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

Indichiamo con $N = M_{n-1}$, allora $l(N) = n - 1$. Infatti chiaramente è minore uguale di $n - 1$, ma se fosse strettamente minore usando la serie di J.H. minimale di N potrei trovare un serie di lunghezza minore anche per M.

Lemma 2.1. Sia M un A-modulo con di lunghezza finita. Tutte le serie di J.H. di M hanno lunghezza $l(M)$.

Dimostrazione. Sia $n = l(M)$. Siano

$$0 = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

$$0 = T_0 \subsetneq \cdots \subsetneq T_m = M$$

due serie di J.H. Vogliamo mostrare che $m \leq n$ per induzione su n, in tal modo per minimalità avremmo la tesi.
Se $n = 0$ allora $M = 0$ e quindi la tesi è ovvia. Sia ora $n > 0$ ed $N = M_{n-1}$. Dall'osservazione precedente, $l(N) = n-1$ e che $0 = M_0 \subsetneq .... \subsetneq M_{n-1} = N$ é una serie di J.H. per N di lunghezza minima. Sia allora $T'_i = T_i \cap N$ e

$$0 = T'_0 \subsetneq .... \subsetneq T'_m = N$$

Osservo che ${T'_i}/{T'_{i-1}} \subset {T_i}/{T_{i-1}}$ e, visto che i T_i sono semplici, ci sono due possibilità: ${T'_i}/{T'_{i-1}} = 0$ oppure ${T'_i}/{T'_{i-1}} = {T_i}/{T_{i-1}}$. Se estraggo dalla successione dei T'_i i termini distinti, ottengo una successione di J.H. per N i cui termini distinti sono esattamente $n-1$ per ipotesi induttiva.

Affermiamo che ho al piú un indice i per il quale $T'_i = T'_{i+1}$. In tal caso avendo $m - 1 = n - 1$, ossia $m = n$, avremmo la tesi. Supponiamo per assurdo che esistano $i < j$ tali che $T'_i = T'_{i+1}$ e $T'_j = T'_{j+1}$. Per ogni k è ben definita le successione esatta

$$0 \longrightarrow T'_k \longrightarrow T_k \longrightarrow {T_k}/{T'_k} \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

con ${T_k}/{T'_k} \subseteq {M}/{N} = {M_n}/{M_{n-1}}$.
Quindi abbiamo, ancora per la semplicità, due possibilitá: $T'_k = T_k$, ossia $T_k \subseteq N$, oppure ${T_k}/{T'_k} = {M}/{N}$, ossia $T_k \nsubseteq N$. Visto che $T'_i = T'_{i+1}$ l'equazione 2.1 per $k = i$ e $k = i+1$ diventano rispettivamente

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T'_i & \longrightarrow & T_i & \longrightarrow & {T_i}/{T'_i} \\ 0 & \longrightarrow & T'_i & \longrightarrow & T_{i+1} & \longrightarrow & {T_{i+1}}/{T'_i} \end{array}$$

con $T_i \subsetneq T_{i+1}$ e quindi anche ${T_i}/{T'_i} \subsetneq {T_{i+1}}/{T'_i}$. Ma allora deve essere $T_i \subset N$ e $T_{i+1} \not\subset N$. Lo stesso possiamo dire per j. Tuttavia, avendo $T_j \supseteq T_{i+1}$, se $T_{i+1} \nsubseteq N$ allora avremmo anche che $T_j \not\subset N$, assurdo. □

Lemma 2.2. Sia

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

una successione esatta di A moduli. Allora valgono i seguenti fatti:

1. $l(N) < +\infty \iff l(M), l(P) < +\infty$;

2. $l(N) = l(M) + l(P)$;

3. $l(M) < +\infty$ se e solo se Mè Artiniano e Noetheriano;

Dimostrazione.

1. Usando 3. e che la successione è esatta:

$$l(N) < +\infty \Leftrightarrow \ N \text{ è Artiniano e Noetheriano } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M, P \text{ Artiniani e Noetheriani } \Leftrightarrow l(M), l(P) < +\infty.$$

2. Chiaramente per il punto precedente possiamo ridurci a considerare il caso finito. Osserviamo che presa un serie di J.H.

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

per iniettività abbiamo che la serie

$$0 \subsetneq f(M_1) \subsetneq \cdots \subsetneq F(M_n) = f(M)$$

è massimale in N. Inoltre usando che g è suriettiva, presa

$$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P$$

è definita
$$g^{-1}(P_0) \subsetneq g^{-1}(P_1) \subsetneq \cdots \subsetneq g^{-1}(P_n) = N$$
e se la prima è di J.H. lo è anche la seconda è massimale, per la corrispondenza dei quozienti. Per esattezza $g^{-1}P_0 = f(M)$ e dunque

$$0 \subsetneq f(M_1) \subsetneq \cdots \subsetneq f(M_n) = g^{-1}(P_0) \subsetneq g^{-1}(P_1) \subsetneq \cdots \subsetneq N$$

è una serie di J.H. di M, allora grazie al Lemma 2.1 $l(N) = l(M)+l(P)$.

3. Supponiamo che M abbia lunghezza n finita. Proviamo che è artiniano e noetheriano per induzione su n.
Per $n = 0 \Rightarrow M = 0$, ovvio.
Per $n > 0$ consideriamo la serie di J.H.

$$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

In particolare abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}\!/\!_{M_{n-1}} \longrightarrow 0$$

Dato che M_{n-1} ${}^{M}\!/\!_{M_{n-1}}$ sono artiniani e noetheriani, rispettivamente per ipotesi induttiva più l'osservazione 3 e perché un modulo semplice ha lunghezza zero, allora M_n è artiniano e noetheriano.
Viceversa, costruisco una serie di J.H. di M. Prendiamo $M_0 = M$. Sia poi M_1 un sottomodulo proprio massimale di M (che esiste poiché

Noetheriano e quindi finitamente generato). Se $M_1 = 0$ abbiamo finito. Altrimenti $M_2 \subsetneq M_1$ sottomodulo massimale, che ancora una volta esiste poiché M_1 è finitamente generato. Iterando questo procedimento troviamo una serie di J.H., per Artinianitá di M prima o poi questa costruzione diventa stazionaria. Allora esiste n tale che $M_n = 0$. Per la scelta di massimalità abbiamo quindi una serie

$$0 = M_n \subsetneq M_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq M_0 = M$$

con ${M_i}/{M_{i+1}}$ semplice per ogni i.

□

Corollario 2.1. Sia A un anello artiniano. Se M è un A modulo finitamente generato allora ha lunghezza finita.

Dimostrazione. Grazie al Teorema 1.5 sappiamo che A è anche noeteriano. Inoltre poiché M è finitamente generato allora è anch'esso sia noeteriano che artiniano. Per il Lemma 2.2 3. allora si ha la tesi. □

2.2 Moduli graduati e Serie di Hilbert

Definizione 2.4. Un anello A è detto *graduato* se è del tipo

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

dove ogni $A_n < A$ è un gruppo abeliano e per ogni m, n $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$. Gli elementi di A_n sono detti *omogenei di grado n.*

Lemma 2.3. Sia A un anello graduato. Allora A è noetheriano se e solo se A_0 è noetheriano e A è una A_0 algebra finitamente generata.

Dimostrazione. Se A è una A_0 algebra finitamente generata allora è quoziente di un anello di polinomi $A_0[x_1, ..., x_n]$, che però é Noetheriano per il teorema della base di Hilbert.
Viceversa, indichiamo sia

$$A_+ := \bigoplus_{n \geq 1} A_n.$$

A_+ è un ideale di A e $A_0 = {A}/{A_+}$, perciò dato che A è noetheriano lo è anche A_0. Inoltre esistono $x_1, ..., x_n$ tali che $A_+ = (x_1, ..., x_n)_A$ come ideale di A e possiamo assumere x_i omogenei. Infatti, preso $x_i \in A_+$

$$x_i = y_1^i + ... + y_j^i$$

con $y_k^i \in A_i$. Allora

$$A_+ = (x_1, ..., x_n) \subseteq (y_1^j, ..., y_i^j)_{j=1,...,n} \subseteq A_+.$$

Dimostriamo quindi che $x_1, ..., x_n$ omogenei generano A come A_0-algebra. Sia $B = A_0[x_1, ..., x_n] \subseteq A$. Dire che $A = B$ è equivalente a dire che $A_m \subseteq B$ per ogni m. Mostriamo che questo è vero per ogni m. Ovviamente $A_0 \subset B$. Sia $m > 0$ ed $x \in A_m \subset A_+$. Si ha che $x = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ con x_i omogeneo di grado d_i ed $f_i \in A$. Si ha quindi che $\deg f_i = m - d_i < m$ allora per ipotesi induttiva $f_i \in B \Rightarrow x \in B$ □

Definizione 2.5. Se A è un anello graduato, un A-modulo M è detto *graduato* se è del tipo

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

dove ogni M_n è un gruppo abeliano e vale $A_n M_m \subseteq M_{n+m}$.

In maniera naturale siamo interessati anche al fatto che le applicazioni tra moduli graduati conservino altro oltre che la struttura di modulo:

Definizione 2.6. Se M e N sono A-moduli graduati, un *omomorfismo di moduli graduati* è un omomorfismo di moduli $f : M \to N$ tale che $f(M_n) \subseteq N_n$ per ogni n.

Consideriamo A è una anello graduato e M un A modulo graduato. Dalla definizione abbiamo che $A_0 M_n \subseteq M_n$ per ognu m, perciò ogni M_n è un A_0 modulo. Un applicazione molto potente della teoria sui moduli graduati è lo studio della dimensione, a tal fine è utile definire la seguente nozione:

Definizione 2.7. Sia A un anello graduato noetheriano, con A_0 Artiniano e sia M un A-modulo graduato finitamente generato. La *Serie di Hilbert* è la serie formale

$$\mathcal{P}(M, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} l(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$$

Osservazione 4 (Buona definizione)**.** Siamo nelle ipotesi della definizione. Dobbiamo mostrare che ogni M_n ha lunghezza finita, ma dato che A_0 è artiniano per il Corollario 2.1 ci basta provare che è finitamente generato. Siano $x_1 \dots, x_s$ sono generatori omogenei di M, che per ipotesi è finitamente generato, tali che $d_i = \deg(x_i)$; allora

$$M_n \subseteq \sum_{i=1}^{s} A_{n-d_i} x_i$$

quindi basta far vedere che ogni A_n è finitamente generato come A_0-modulo, che si deduce dal Lemma 2.3 usando che sono sottomoduli di modulo noeteriano.

Lemma 2.4. Sia una successione esatta di A moduli graduati

$$0 \to M \to N \to R \to 0$$

una successione esatta di A moduli graduati (con omomorfismi di moduli graduati. Allora

$$\mathcal{P}(N,t) = \mathcal{P}(M,t) + \mathcal{P}(R,t)$$

Dimostrazione. Per ogni n abbiamo la successione esatta di A_0-moduli

$$0 \to M_n \to N_n \to R_n \to 0$$

Per il Lemma 2.2 $l(N_n) = l(M_n) + l(R_n)$, da cui segue immediatamente la tesi. □

Teorema 2.1 (Hilbert-Serre)**.** Sia A un anello graduato noetheriano, con A_0 artiniano, A sia generato come A_0-algebra da elementi omogenei $a_1, \ldots, a_k$; sia $d_i = \deg(x_i)$. Dato un A-modulo M graduato finitamente generato, esiste un polinomio $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tale che

$$\mathcal{P}(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=i}^{k}(1-t^{d_i})}$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su k.
Per $k = 0$ abbiamo $A = A_0$, ed M è un A_0-modulo finitamente generato da $y_1, \ldots, y_r$. Sia N il massimo dei gradi di $y_1, \ldots, y_r$. Allora, poiché l'azione di A_0 non aumenta il grado, per ogni $n > N$ si ha $M_n = 0$, per cui $P(M,t)$ è un polinomio.

Per il passo induttivo scriviamo $A = A_0[a_1, \ldots, a_k]$ e consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'omomorfismo di A_0-moduli "moltiplicazione per a_k"

$$M_n \xrightarrow{a_k \cdot} M_{n+d_k}$$

e la successione esatta da lui indotta

$$0 \to \underbrace{ker(a_k \cdot)}_{K_n} \to M_n \xrightarrow{a_k \cdot} M_{n+d_k} \to \underbrace{M_{n+d_k}/Im(a_k \cdot)}_{L_{n+d_k}} \to 0$$

In particolare se definiamo $N := \bigoplus_{n=0}^{\infty} a_k \cdot M_n$, abbiamo che $a_k \cdot M_n = N \cap M_{n+d_k} = N_{n+d_k}$. Poniamo $K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n$ e $L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n$, per l'osservazione appena fatta $L = M/N$. Notiamo che sono A-moduli finitamente generati perché K è un sottomodulo di M ed L è un quoziente di M.
Dalla successione su scritta, definendo

$$M' = \begin{cases} M_{n-d_k} & \text{se } n > d_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

otteniamo una successione esatta di moduli graduati[1]:

$$0 \to K \to M' \xrightarrow{a_k \cdot} M \to M/n \to 0$$

[1]dove con K intendiamo lo stesso nucleo con la nuova gradazione.

Allora utilizzando l'esattezza abbiamo

$$\mathcal{P}(K,t) - \mathcal{P}(M',t) + \mathcal{P}(M,t) - \mathcal{P}({}^{M}\!/\!_{N},t) = 0$$

Vorremmo poter applicare l'ipotesi induttiva e K e M/N; per far ciò ci servirebbe che fossero B moduli, con B una A_0 algebra con al più $s-1$ generatori. Questo in effetti è verificato per $B = {}^{A}\!/\!_{(a_k)}$: dato che $a_k K = 0 \subseteq K$ e che $M/N = M \otimes A/(a_k)$ sono anche $B = A_0[a_1, \dots, a_{s-1}]$-moduli finitamente generati. Allora esistono $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tali che

$$\mathcal{P}(K,t) = \frac{\alpha(t)}{\prod_{i=1}^{k-1}(1-t^{d_i})}$$

$$\mathcal{P}({}^{M}\!/\!_{N},t) = \frac{\beta(t)}{\prod_{i=1}^{k-1}(1-t^{d_i})}$$

Indichiamo con $g(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, l'equazione di prima allora diventa

$$\mathcal{P}(M,t) - \mathcal{P}(M',t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{d-1}(1-t^{d_i})}$$

Ci ricordiamo adesso chi è M', ovviamente $\mathcal{P}(M,t) = t^{d_k}\mathcal{P}(M',t)$. Allora

$$(1-t^{d_k})\mathcal{P}(M,t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})}$$

e dunque

$$\mathcal{P}(M,t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{k}(1-t^{k_i})}$$

□

È ben definito, grazie a questo teorema, per ogni M modulo graduato finitamente generato su un A anello graduato, nelle ipotesi, l'*ordine di polo* in $t=1$ di $\mathcal{P}(M,t)$ che indicheremo con $d(M)$. Naturalmente, se k è il numero di generatori di A come A_0 algebra, $d(M) \le k$.

da fare

Osservazione 5. Siano M, N due moduli graduati finitamente generati e sia $T = M \otimes N = \bigoplus T_n$, dove $T_n = \bigoplus_{k=0}^{n} M_k \otimes N_{n-k}$ allora

$$\mathcal{P}(T,t) = \mathcal{P}(M,t)\mathcal{P}(N,t)$$

Esempio 2. Sia $M = A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$ con la gradazione standard. Allora

$$l(A_n) = \dim_K A_n = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Se $k=1$, otteniamo

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}[x],t) = \frac{1}{(1-t)}.$$

Applicando l'esercizio precedente, usando il fatto che $\mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[y] = \mathbb{K}[x, y]$, si ottiene

$$\mathcal{P}(A, t) = \frac{1}{(1-t)^k}$$

Teorema 2.2. Sia A un anello graduato noetheriano, con A_0 artiniano, generato come A_0-algebra da elementi omogenei $a_1, \ldots, a_k$ di grado $d_i = 1$, cioè $a_i \in A_1$. Dato un A-modulo M graduato e finitamente generato, allora esiste un polinomio $\varphi_M \in \mathbb{Z}[t]$ tale che definitivamente $l(M_n) = \varphi_M(n)$ e $\deg(\varphi_M) = d(M) - 1$.

Dimostrazione. Sia $d = d(M)$, allora per il 2.1 esiste un polinomio $f(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i t^i$ tale che $f(1) \neq 0$ e

$$\mathcal{P}(M, t) = \frac{f(t)}{(1-t)^d}$$

Inoltre l'Esempio 2 ci dice che

$$\frac{1}{(1-t)^d} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+d-1}{d-1} t^n.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} l(M_n) t^n &= \left(\sum_{i=0}^{N} c_i t^i \right) \left(\sum_{n \geq 0} \binom{n+d-1}{d-1} t^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{\min\{n,N\}} c_i \binom{n-i+d-1}{d-1} \right) t^{N+m} \end{aligned}$$

Quindi per $n \geq N$, il coefficiente di t^n è $l(M_n) = \sum_{i=1}^{N} c_i \binom{n-i+d-1}{d-1}$, che è il valore del polinomio

$$\varphi_M(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \binom{t-i+d-1}{d-1}$$

calcolato in n. Infine osserviamo che $\deg(\varphi_M) = d - 1$, infatti il termine di testa è $\sum c_i/(d-1)!t^{d-1}$ e si era supposto $\sum c_i = f(1) \neq 0$. $\square$

Definizione 2.8. La funzione $n \mapsto l(M_n)$ è detta *Funzione di Hilbert* e φ_M è detto *polinomio di Hilbert*.

Capitolo 3

Teoria della dimensione per anelli noetheriani

3.1 Anello graduato associato e scoppiamento di un'algebra e di un modulo

Sia A un anello e sia $I \subseteq A$ un ideale. Definiamo l'*anello graduato associato ad I* come

$$Gr_I(A) := \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}}$$

Se $x \in A$, possiamo definire $\overline{x}$ come l'immagine di x in I^n/I^{n+1}, dove $n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid x \notin I^n\}$. Se $x \in \bigcap I^n$ pongo $\overline{x} = 0$. $Gr_I(A)$ è un anello con la somma usuale dalla somma diretta di gruppo. Inoltre il prodotto in $Gr_I(A)$ può essere definito da $\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{xy}$. È bene osservare, tuttavia, che $x \mapsto \overline{x}$ non è una mappa di anelli.
Definiamo anche lo *scoppiamento* di A rispetto a I come

$$Bl_I(A) := A \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus \cdots$$

Il prodotto usuale lo rende un anello graduato, infatti se $x \in I^h t^h$ e $y \in I^k t^k$, allora $xy \in I^{h+k} t^{h+k}$.

Vorremmo poter estendere queste definizioni ai moduli, in modo da ottenere dei moduli graduati su questi anelli.

Definizione 3.1. Una *filtrazione* di un A modulo M è una successione di sottomoduli

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$$

Dato un ideale I di A, diciamo che è una *I-filtrazione* se $IM_n \subseteq M_{n+1}$ per ogni n. Inoltre si è detta *stabile* se esiste n_0 tale che per $n \geq n_0$ si ha $M_n = I^{n-n_0} M_{n_0}$.

Esempio 3. Se $M_n = I^n M$, allora $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$ è una I-filtrazione stabile.

Se $\mathcal{F} : M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$ è una I-filtrazione di M, possiamo definire

$$Gr_{\mathcal{F}}(M) := \frac{M_0}{M_1} \oplus \frac{M_1}{M_2} \oplus \cdots$$

che è un $Gr_I(A)$-modulo graduato e

$$Bl_{\mathcal{F}}(M) := M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots$$

che è un $Bl_I(A)$-modulo graduato.

Lemma 3.1. Siano A, M noetheriani, $I \subseteq A$ un ideale e $\mathcal{F}$ una I-filtrazione. Allora

(1) $Gr_I(A)$ e $Bl_I(A)$ sono anelli noetheriani.

(2) Se $\mathcal{F}$ è I-stabile, allora $Gr_{\mathcal{F}}(M)$ è noetheriano.

(3) $Bl_{\mathcal{F}}(M)$ è noetheriano se e solo se $\mathcal{F}$ è I-stabile.

Dimostrazione. (1) Sia $\tilde{A} = Gr_I(A)$, $\tilde{A} = \bigoplus \tilde{A}_n$, dove $\tilde{A}_n = I^n/I^{n+1}$. Per dire che $\tilde{A}$ è noetheriano mi basta mostrare che $\tilde{A}_0$ è noetheriano e che se $x_1, \ldots, x_n$ sono generatori di I come ideale, allora $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ generano $\tilde{A}$ come $\tilde{A}_0$-algebra. È ovvio che $\tilde{A}_0 = A/I$ è noetheriano. Sia $B := \tilde{A}_0[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n] \subseteq \tilde{A}$. Vogliamo mostrare che $B \supseteq \tilde{A}$. Osserviamo che I^m è generato come ideale da $\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \sum \alpha_i = m\}$, quindi I^m/I^{m+1} è generato da $\{\bar{x}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{x}_n^{\alpha_n} \mid \sum \alpha_i = m\}$ come $\tilde{A}_0$-modulo. Ma allora $B \supseteq \tilde{A}_m$ per ogni m, cioè $B \supseteq \tilde{A}$, da cui l'uguaglianza. Ragionando analogamente per $Bl_I(A)$, si mostra che è generato da $x_1 t, \ldots, x_n t$, e con le medesime considerazioni si deduce che è noetheriano.

(2) Se $\mathcal{F} : M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$ è una I-filtrazione anche abbiamo che $M_n \supset I^{n-n_0} M_{n_0}$. Allora

$$Gr_{\mathcal{F}}(M) = \bigoplus_{i=0}^{n_0} \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

Notiamo ogni $G_i = {}^{M_i}\!/\!_{M_{i+1}}$ è noeteriano, visto che M è noetheriano, e $I \subseteq \mathrm{Ann}(G_i)$ perciò è finitamente generato come ${}^{A}\!/\!_{I}$, dunque $Gr_{\mathcal{F}}(M)$ è finitamente generato su $Gr_I(A)$. Per il punto precedente $Gr_I(A)$ è noeteriano, abbiamo quindi la tesi.

(3) Supponiamo che $\tilde{M} = Bl_{\mathcal{F}}(M)$ sia noetheriano; allora ogni $= \tilde{M}_n = M_n$ è finitamente generato (possiamo scegliere generatori omogenei). Perciò esiste n_0 tale che $X = \bigoplus_{i=0}^{n_0} M_i$ genera $\tilde{M}$. Diciamo che per $n \geq n_0$ $I^{n-n_0}M_{n_0} = M_n$, e dunque $\mathcal{F}$ è I stabile. Infatti, posto $\tilde{A} = Bl_I(A)$, $\tilde{M}_n \subseteq \tilde{A}X$ in particolare

$$\tilde{M}_n = \bigoplus_{i=0}^{n_0} \tilde{A}_{n-i} M_i$$

Ma $A_{n-i} = I^{n-i}$, quindi $M_n = \bigoplus_{i=0}^{n_0} I^{n-i} M_i \subseteq I^{n-n_0} M_{n_0}$.(?) Per definizione di I-filtrazione anche abbiamo che $M_n \supset I^{n-n_0} M_{n_0}$.
Viceversa, sia $\mathcal{F}$ una filtrazione I stabile, allora

$$Bl_{\mathcal{F}}(M) \supseteq \bigoplus_{i=0}^{n_0} M_i$$

Questi in effetti lo generano da come $Bl_I(A)$ modulo, infatti M è noeteriano e quindi ogni M_i è finitamente generato.

□

Una facile, ma importante, conseguenza di questi fatti è Lemma di Artin Rees:

Teorema 3.1 (Lemma di Artin Rees)**.** Siano A un anello noetheriano e $I \subseteq A$ un ideale. Sia M è un A modulo noetheriano e

$$\mathcal{F} : M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$$

una filtrazione I-stabile di M. Allora, preso un sottomodulo $N \subseteq M$ e posto per ogni $i \in \mathbb{N}$ $N_i = M_i \cap N$, anche

$$\mathcal{F}' : N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots$$

è I-stabile.

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{F}$ è I-stabile, sappiamo dal Lemma 3.1 che $Bl_{\mathcal{F}}(M)$ è noetheriano, dunque anche $Bl_{\mathcal{F}'}(N)$ è noeteriano, poiché è in maniera naturale sottomodulo. Allora sempre per il Lemma 3.1 abbiamo che $\mathcal{F}'$ è I-stabile. □

Proposizione 3.1. Siano A un anello noetheriano, $I \subseteq A$ un ideale e M un A-modulo noetheriano. Date duefiltrazioni I-stabili

$$\begin{cases} \mathcal{F} : M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \\ \mathcal{F}' : M = M'_0 \supseteq M'_1 \supseteq \dots . \end{cases}$$

Allora esiste un intero $k \geq 0$ tale che $M_{n+k} \subseteq M'_n$ e $M'_{n+k} \subseteq M_n$.

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sono I-stabili, esiste un intero $n_0 \geq 0$ tale che

$$\begin{cases} M_{n+n_0} = I^n M_{n_0} \\ M'_{n+n_0} = I^n M'_{n_0}. \end{cases}$$

per ogni $n \geq 0$. Allora

$$M_{n+n_0} = I^n M_{n_0} \subseteq I^n M = I^n M'_0 \subseteq M'_n,$$

dove l'ultima inclusione segue dal fatto che $\mathcal{F}'$ è una I-filtrazione. □

3.2 Anelli noetheriani locali

Vogliamo adattare la teoria generale sviluppata per moduli graduati ad un caso particolare. Assumiamo le seguenti ipotesi:

Ipotesi 3.1.

- $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano,
- I un ideale $\mathfrak{m}$-primario di A,
- M un A-modulo noetheriano

Proposizione 3.2. $\tilde{A} = Gr_I(A)$ è noeteriano e generato in grado 1.

Dimostrazione. Per il punto (1) del Lemma 3.1 $\tilde{A}$ noetherianoc, quindi finitamente generato. Per dire che è generato in grado 1 dobbiamo mostrare che è possibile scegliere dei generatori $x_1, \ldots, x_n \in I \setminus I^2$. Per far ciò, consideriamo ${}^{I}\!/_{I^2}$ con la struttura naturale di $\tilde{A}_0 = {}^{A}\!/_{I}$ modulo (rispetto alla quale è ancora noetheriano e quindi finitamente generato). Detta

$$\pi : I \longrightarrow {}^{I}\!/_{I^2}$$

vogliamo mostrare che se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono dei generatori di ${}^{I}\!/_{I^2}$, allora

$$x_1 = \pi^{-1}(\alpha_1), \ldots, x_n = \pi^{-1}(\alpha_n)$$

generano I come A modulo. Indichiamo $J = (x_1, \ldots, x_n) \subseteq I$. Osserviamo tuttavia che

$$I \cdot {}^{I}\!/_{J} = {}^{I}\!/_{J}$$

dato che $\subseteq$ è ovvia, mentre preso $f \in I$ $f = \sum_i f_i x_i + y$ con $y \in I^2$ allora $f - y \in J$ e passando a quoziente $\bar{f} = \bar{y}$, che implica $\bar{f} \in I^2/J$.
${}^{I}\!/_{J}$ è un A modulo finitamente generato e $I \subset \mathfrak{m}$, siamo nelle ipotesi del lemma di Nakayama:

$${}^{I}\!/_{J} = 0$$

cosicché $I = (x_1, \ldots, x_n)$. □

Osservazione 6. In effetti $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in \tilde{A}_0$ sono generatori proprio di $\tilde{A}$ come $\tilde{A}_0$-algebra.

Proposizione 3.3. $\tilde{A}_0$ è artiniano.

Dimostrazione. $\tilde{A}_0 = A/I$ e quindi è noetheriano perché lo è A. Per il Teorema 1.5 ci basta quini dimostrare che ha dimensione zero. Dato che I è $\mathfrak{m}$ primario e $\tilde{A}_0$ noeteriano, esiste k tale che $\mathfrak{m}^k \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$, quindi $\bar{\mathfrak{m}}^k = 0$ e $\bar{\mathfrak{m}} = \mathcal{N}$ quindi è l'unico primo. In altri termini, $\mathrm{Spec} A/I \cong \mathrm{Spec} A/\sqrt{I} = \mathrm{Spec} A/\mathfrak{m} = \{\mathfrak{m}\}$ è un punto. □

Queste due proposizione ci permettono di applicare la teoria sviluppata per gli anelli graduati. A partire da I e da M (nelle Ipotesi 3.1) possiamo considerare

$$\mathcal{F} : M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots$$

una filtrazione I-stabile di M. Allora è ben definito

$$\tilde{M} := Gr_{\mathcal{F}}(M) = \oplus_{n \geq 0} \tilde{M}_n$$

che è un $\tilde{A}$-modulo graduato noetheriano.
Le Proposizioni 3.2 e 3.3 ci assucurano inoltre che è ben definita la serie di Hilbert per $\tilde{M}$. Inoltre visto che $\tilde{A}$ è generato in grado 1 da elementi $x_1, \ldots, x_s$ per il Teorema 2.2, indicando con $d = d(\tilde{M})$, per n sufficientemente grande, $l(\tilde{M}_n)$ è una funzione polinomiale data da un polinomio di grado al più $s-1$, dove s è il minimo numero di generatori dell'ideale I. Infatti per sappiamo che definitivamente $l(\tilde{M}_n)$ è polinomiale di grado $d-1$, dove d è l'ordine di polo in 1 nella serie di Hilbert, ma il polo si controlla con s (il denominatore è infatti un divisore di $(1-t)^s$) e quindi il grado è minore o uguale ad $s-1$.

Osservazione 7. Anche $l(M/M_n)$ è definitivamente polinomiale in n, con grado al più s. Infatti

$$0 \to \tilde{M}_{n-1} = M_{n-1}/M_n \to M/M_n \to M/M_{n-1} \to 0,$$

dunque ragionando induttivamente le lunghezze sono tutte finite e vale

$$\begin{aligned} l(M/M_n) =& l(\tilde{M}_{n-1}) + l(M/M_{n-1}) \\ =& l(\tilde{M}_{n-1}) + l(\tilde{M}_{n-2}) + \ldots l(\tilde{M}_0) \\ =& \varphi_{\tilde{M}}(n-1) + \varphi_{\tilde{M}}(n-2) + \ldots \varphi_{\tilde{M}}(n_0) + c \end{aligned}$$

dove c è una costante intera e n_0 è l'indice al partire dal quale $\varphi_{\tilde{M}}$ è polinomiale di grado $d-1$. Dall'ultima uguaglianza segue immediatamente che $l(M/M_n)$ è polinomiale di grado d.

Allora come abbiamo fatto per il polinomio di Hilbert possiamo definire la seguente funzione:

Definizione 3.2. Siano $(A, \mathfrak{m})$ noetheriano locale, $I \subseteq A$ un ideale $\mathfrak{m}$-primario, M un A-modulo noetheriano, $\mathcal{F} : M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$ una filtrazione I-stabile. Definiamo $\chi^I_{M,\mathcal{F}}$ come il polinomio a coefficienti interi tale per cui

$$\chi^I_{M,\mathcal{F}}(n) = l(M/M_n)$$

per n sufficientemente grande.

Lemma 3.2. Nelle ipotesi precedenti, grado e coefficiente direttivo di $\chi^I_{M,\mathcal{F}}$ non dipendono dalla filtrazione $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Siano

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \\ \mathcal{F}' &: M = M'_0 \supseteq M'_1 \supseteq \dots \end{aligned}$$

due filtrazioni I-stabili e siano f, f' i polinomi costruiti a partire da $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ rispettivamente. Abbiamo visto che esiste n_0 tale che $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ e $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$. Quozientando otteniamo $l(M/M_{n+n_0}) \geq l(M/M'_n)$ e $l(M'/M'_{n+n_0}) \geq l(M'/M_n)$. In particolare, per n sufficientemente grande $f(n+n_0) \geq f'(n)$ e $f'(n+n_0) \geq f(n)$, dunque $lt(f) = lt(f')$. Infatti deve essere $\deg g = \deg \tilde{f}'$ e posto L il rapporto fra i coefficienti direttori, devono valere

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+n_0)}{f'(n)} \geq 1 \qquad \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n+n_0)}{f(n)} \geq 1$$

per cui $L = 1$. □

Abbiamo visto che il leading term del polinomio

$$\chi^I_M : n \longmapsto l(M/M_n)$$

non dipende dalla filtrazione. In realtà possiamo dire qualcosa di più:

Lemma 3.3. Il grado di χ^I_M non dipende dalla scelta dell'ideale I $\mathfrak{m}$ primario.

Dimostrazione. Facciamo vedere che per ogni ideale $\mathfrak{m}$-primario, il grado coincide con quello dato da una filtrazione $\mathfrak{m}$-stabile, cosicché per transitività tutte coincidano. Consideriamo allora le due filtrazioni, che per il Lemma precedente posso prendere in questa forma:

$$\begin{aligned} M = M_0 \supset M_1 = \mathfrak{m}M \supset M_2 = \mathfrak{m}^2 M \supset \dots \\ M = M_0 \supset \tilde{M}_1 = IM \supset \tilde{M}_2 = I^2 M \supset \dots \end{aligned}$$

Poiché A è noetheriano e I è $\mathfrak{m}$ primario, esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{\mathfrak{m}}^k = 0$ in A/I, quindi in particolare $\mathfrak{m} \supset I \supset \mathfrak{m}^k$. Ma allora $M_i \supset \tilde{M}_i \supset M_{i+k}$ per ogni i e vale

$$l\left({}^{M}\!/\!_{M_n}\right) \leq l\left({}^{M}\!/\!_{\tilde{M}_n}\right) \leq l\left({}^{M}\!/\!_{M_{n+k}}\right).$$

Per n abbastanza grande abbiamo che $g(n) \leq f(n) \leq g(nk)$, per cui i due polinomi f e g avranno necessariamente lo stesso grado. □

Definizione 3.3. Indicheremo $\deg \chi_M$ con $d(M)$.

Osservazione 8. Per quanto visto nell'Osservazione 7 $d(M)$ coincide esattamente con l'ordine di polo di $Gr_{\mathcal{F}}(M)$ come $Gr_I(A)$-modulo, dove $\mathcal{F}$ è una I-filtrazione stabile e I è un ideale $\mathfrak{m}$-primario. Quanto appena dimostrato ci dice che per calcolare $d(M)$ ci basta calcolare l'ordine di polo in $t = 1$ di $\mathcal{P}(Gr_{\mathcal{F}}(M), t)$ con

$$\mathcal{F}: \ M = M_0 \supset M_1 = \mathfrak{m}M \supset M_2 = \mathfrak{m}^2 M \supset \dots$$

Poiché $Gr_I(A)$ è generato in grado 1, abbiamo che $d(M) \leq s$ dove s è il minimo numero di generatori di I; sempre alla luce di quanto appena dimostro è $d(M)$ controllato dal numero di generatori di ${}^{\mathfrak{m}}\!/\!_{\mathfrak{m}^2}$, che per Nakayama è proprio $\dim_k {}^{\mathfrak{m}}\!/\!_{\mathfrak{m}^2}$.

Osservazione 9. È bene porre l'accento, perché è quello che ci servirà per studio la dimensione, sul fatto che dell'osservazione precedente segue direttamente (prendendo A modulo come su se stesso) che $d(A)$ è proprio l'ordine di polo in $t = 1$ della serie di Hilbert di $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$.

Prima di enunciare e dimostrare il Teorema della Dimensione per anelli noetheriani locali, vediamo un lemma che utilizzeremo più avanti ma che si dimostra abbastanza facilmente grazie a quanto detto fin ora:

Lemma 3.4. Siano $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano, M un A-modulo noetheriano e I un ideale $\mathfrak{m}$-primario. Se x non è divisore di zero (ossia $xm = 0 \Rightarrow m = 0$), allora

$$d(M/xM) \leq d(M) - 1.$$

Dimostrazione. Sia $N = xM$. Poiché x non è divisore di zero, si ha $N \simeq M$ come A-moduli. Inoltre per il lemma di Artin-Rees, poiché

$$M = M_0 \supset M_1 = IM \supset M_2 = I^2 M \supset \dots$$

è una filtrazione I-stabile, lo è anche

$$M \simeq xM = N = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$$

dove $N_i = M_i \cap N$ e questa, tramite l'isomorfismo fra N e M, individua una filtrazione I-stabile su M. Sappiamo però che in queste ipotesi i due polinomi $n \mapsto l(M/M_n)$ e $n \mapsto l(N/N_n)$ hanno lo stesso grado e lo stesso coefficiente direttore, perché indotti da due filtrazioni I-stabili su M.
Sia $Q = M/N$ e sia

$$Q_n = I^n Q = {}^{(I^n M + N)}\!/\!_{N} = {}^{I^n M}\!/\!_{(N \cap I^n M)}.$$

Allora la seguente successione è esatta

$$0 \longrightarrow N/N_n \longrightarrow M/I^n M \longrightarrow Q/Q_n \longrightarrow 0$$

e quindi $l(Q/Q_n) = l(M/M_n) - l(N/N_n)$ è un polinomio di grado strettamente minore di $d(M)$ perché i leading term si semplificano. $\square$

3.2.1 Teorema della dimensione

Gli ideali sono i sottomoduli degli anelli, ha senso quindi pensare che quanto detto fino ad adesso a proposito della lunghezza dei moduli sia correlato con la dimensione di Krull di un anello.
Prima di dimostra il teorema definiamo una terza nozione:

Definizione 3.4. Dato $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano, chiamiamo $\delta(A) = \min\{s \mid \exists$ un ideale $\mathfrak{m}$-primario generato da s generatori$\}$.

Ricordando che

Teorema 3.2. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano. Allora vale

$$\delta(A) = d(A) = \dim(A)$$

Dimostrazione. Per passi, facciamo vedere che $\delta(A) \geq d(A) \geq \dim(A) \geq \delta(A)$.

Passo (1)**.** $\delta(A) \geq d(A)$

Dimostrazione. Se I è un ideale $\mathfrak{m}$-primario e s è il numero minimo dei suoi generatori, abbiamo visto nell'Osservazione 8 che $d(A) \leq s$. In particolare avremo quindi che $d(A) \leq \delta(A)$. ☐

Passo (2)**.** $d(A) \geq \dim(A)$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $d = d(A)$.

$d = 0$. Abbiamo che $l(A/\mathfrak{m}^n)$ definivamente è una costante, dunque $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ per n sufficientemente grande. Per Nakayama, poiché $\mathfrak{m}$ è finitamente generato (per noetherianità di A), quindi $\mathfrak{m}^n = 0$ per un certo n. Ma allora $\mathfrak{m} = \sqrt{0}$, da cui $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale primo di A ,ossia $\dim(A) = 0$.

$d > 0$. Consideriamo una catena

$$A \supsetneq \mathfrak{m} = P_N \supsetneq P_{N-1} \supsetneq \cdots \supsetneq P_0$$

dove i P_i sono primi di A. Facciamo vedere che $N \leq d$. Possiamo innanzi tutto ridurci al caso in cui A è un dominio.
Consideriamo infatti l'anello $B = A/P_0$: questo è ancora un anello noetheriano e quozientando gli elementi della catena di A per P_0, otteniamo la catena

$$B = A/P_0 \supsetneq P_N/P_0 \supsetneq \cdots \supsetneq P_1/P_0 \supsetneq (0)$$

i cui elementi sono primi di B. Inoltre vale $d(B) \leq d(A)$, infatti:

$$I^n B = I^n(A/P_0) = (I^n + P_0)/P_0 \Longrightarrow B/I^n B = A/(I^n + P_0)$$

e quindi $l(B/I^nB) \leq l(A/I^nA)$ per ogni n.
Possiamo dunque assumere che A sia un dominio e che $P_0 = (0)$. Sia $x \in P_1$, $x \neq 0$. Sicuramente x non è divisore di zero, quindi per il Lemma 3.4

$$d(A/(x)) \leq d(A) - 1.$$

Allora abbiamo:

$$A/(x) \supsetneq P_N/(x) \supsetneq \cdots \supsetneq P_2/(x) \supsetneq P_1/(x).$$

una catena di primi e per ipotesi induttiva $N - 1 \leq d(A/(x)) \leq d - 1$. $\square$

Passo (3)**.** $\dim(A) \geq \delta(A)$

Dimostrazione. Sia $\dim(A) = n$ ed esibiamo un ideale $\mathfrak{m}$-primario generato da n elementi. Studiamo prima i casi per $n = 0$ e $n = 1$.
Se $n = 0$, allora A ha come unico ideale primo $\mathfrak{m}$ che quindi sarà uguale a $\sqrt{0}$. Ma allora (0) è $\mathfrak{m}$-primario (per convenzione l'ideale (0) è generato da 0 elementi).
Se $n = 1$ allora $\mathfrak{m} \supset P_1, P_2, \ldots,$ ma i P_i distinti non sono confrontabili. Infatti se avessimo $P_i \subsetneq P_j$, avremmo una catena di lunghezza 2. Ma allora i P_i sono minimali e sono in numero finito $P_1, \ldots P_k$, per decomposizione primaria. Abbiamo dunque che

$$\bigcup_{i=1}^{k} P_i \subsetneq \mathfrak{m}.$$

Se infatti valesse l'uguaglianza, avremmo che $P_i = \mathfrak{m}$ per un certo i per scansamento. Consideriamo ora $x \in \mathfrak{m} \setminus (\bigcup P_i)$: l'ideale da lui generato è tale che $0 \subsetneq (x) \subsetneq \mathfrak{m}$ e vale

$$\sqrt{(x)} = \bigcap_{P \supseteq (x)} P = \mathfrak{m}.$$

Consideriamo ora un n generico e costruiamo $x_1, \ldots, x_n$ tali che se $P \supset \{x_1, \ldots, x_k\}$, allora $\mathrm{ht}(P) \geq k$. Per induzione su k:
$k = 1$. Poiché A è noetheriano, possiamo prendere $P_1, \ldots, P_s$ primi minimali che contengono l'ideale (0), ossia

$$\sqrt{0} = \bigcap_{i=1}^{s} P_i.$$

Consideriamo l'ideale (x) come nel caso $n = 1$: se P è un primo di A tale che $x \in P$, allora $P \supsetneq P_i$ per un certo i (per costruzione x non appartiene a nessun P_i, per cui $P \neq P_i$ per ogni i). Ma allora $\mathrm{ht}(P) > \mathrm{ht}(P_i) \geq 0$, ossia $\mathrm{ht}(P) \geq 1$.

$k > 1$. Supponiamo di aver trovato $x_1, \dots, x_{k-1}$ e cerchiamo x_k. Consideriamo $(x_1, \dots, x_{k-1})$ e i primi minimali che lo contengono. Prendiamo fra questi solo quelli di altezza $k-1$. Se esisono, sono di numero finito $P_1, \dots P_r$. Poiché $\dim(A) = n$ e A è locale, abbiamo $A = A_\mathfrak{m}$ e quindi $k - 1 < n = \dim(A_\mathfrak{m}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. Ma allora $P_i \neq \mathfrak{m}$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Vale dunque:

$$\bigcup_{i=1}^{r} P_i \subsetneq \mathfrak{m}.$$

Sia $x_k \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup P_i$ (se non ci sono primi di altezza $k-1$ che contengono $(x_1, \dots, x_{k-1})$, prendiamo $x_k \in \mathfrak{m} \setminus (x_1, \dots, x_{k-1})$). Sicuramente $x_k \in \mathfrak{m} \setminus (x_1, \dots, x_{k-1})$ e quindi $x_k \neq x_i$ per ogni $i = 1, \dots (k-1)$. Facciamo vedere che $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ verifica la proprietà che cercavamo: sia P ideale primo di A che contiene X. In particolare $P \supset (x_1, \dots, x_{k-1})$ e quindi $P \supseteq P_i$ per un certo i e per costruzione $P \neq P_i$. Per ipotesi induttiva $\mathrm{ht}(P) > \mathrm{ht}(P_i) \geq k - 1$, da cui $\mathrm{ht}(P) \geq k$ (se non ci sono P_i di altezza $k-1$ che contengono $(x_1, \dots, x_{k-1})$ vuol dire che P conterrà dei primi di altezza maggiore e quindi $\mathrm{ht}(P) \geq k$).
Facciamo vedere ora che l'ideale $I = (x_1, \dots, x_n)$ è $\mathfrak{m}$-primario. Se $P \supset I$ è un primo di A, allora $\mathrm{ht}(P) \geq n$, quindi $P = \mathfrak{m}$ che è l'unico massimale di A. Quindi $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale primo che contiene I, ossia $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. □

□

Corollario 3.1. Sia A un anello noetheriano, allora:

(*i*) $(A, \mathfrak{m})$ locale $\Longrightarrow \dim(A) < +\infty$

(*ii*) $\dim(A_p) < +\infty \ \forall p \in Spec(A)$

(*iii*) $\mathrm{Spec}(A)$ soddisfa la condizione della catena discendente.

Dimostrazione. (*i*) L'ideale $\mathfrak{m}$ è $\mathfrak{m}$-primario ed è finitamente generato, poiché A è noetheriano, quindi $\dim(A) = \delta(A) < +\infty$.

(*ii*) Si applica il punto (*i*) all'anello locale noetheriano A_P per ogni $P \in Spec(A)$.

(*iii*) Sia $P \supsetneq p_1 \supsetneq p_2 \supsetneq \dots$ è una catena discendente di primi di A. Se consideriamo la rispettiva catena in A_p

$$p_p \supsetneq {p_1}_p \supsetneq {p_2}_p \supsetneq \cdots$$

questa deve essere stazionaria, poiché A_p è un anello locale noetheriano e quindi per il punto (*ii*) ha dimensione finita.

□

Corollario 3.2 (Krull Hauptidealsatz)**.** Sia A anello noetheriano e $x \in A$ un non divisore di zero. Se $p \supseteq (x)$ minimale, allora $ht(p) = 1$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathrm{ht}(p) \neq 0$. Infatti se $\mathrm{ht}(p) = 0$, allora p sarebbe uno dei primi minimali che contengono (0). Ma sappiamo che l'unione di questi primi minimali corrisponde all'insieme dei divisori di zero di A, da cui avremmo che x è un divisore di zero, contro le ipotesi.
Escludiamo ora che $ht(p) > 1$: consideriamo A_p e $I = (x)_p \subset A_p$. Per ipotesi, sappiamo che p_p è l'unico ideale primo di A_p che contiene I. Quindi I è p_p-primario, ossia $(\sqrt{(x)})_p = \sqrt{(x)_p} = p_p$. Ma allora per quanto visto in Teorema 3.2

$$ht(p) = dim(A_p) = \delta(A_p) \leq 1.$$

□

Corollario 3.3. Se A è noetheriano, $x_1, \dots, x_n \in A$ e $p \supset (x_1, \dots, x_n)$ minimale, allora $ht(p) \leq n$.

Da questo fatto otteniamo un'utile lemma per gli anelli quozienti:

Lemma 3.5. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noeteriano locale. Dato $x \in \mathfrak{m}$, allora

$$\dim A/(x) \geq \dim A - 1$$

Inoltre se x è un non divisore di zero vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. Detta $d = dimA/(x)$, mostriamo che in A esiste un ideale $\mathfrak{m}$ primario con $d + 1$ generatori. Consideriamo $x_1, \dots, x_d \in A$ tali che $(x_1, \dots, x_d)/(x)$ sia un ideale $\mathfrak{m}/(x)$ primario. Allora $(x_1, \dots, x_d, x)$ sono un ideale $\mathfrak{m}$ primario di A e quindi

$$\dim A = \delta(A) \leq d + 1.$$

Il Lemma 3.4, usando il Teorema della dimensione, ci dice che se x è un non divisore di zero vale anche la disuguaglianza opposta. □

3.3 Anelli regolari

Consideriamo un anello $(A, \mathfrak{m})$ locale noetheriano e sia $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$. Allora $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è un $A/\mathfrak{m}$-modulo, infatti $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è un A-modulo e $\mathfrak{m} \subset Ann(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2))$, perciò è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base per $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, allora $x_1, \dots, x_n$ generano $\mathfrak{m}$ come ideale. Chiaramente $\mathfrak{m}$ è un ideale $\mathfrak{m}$-primario, quindi abbiamo che

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \delta(A) = \dim(A).$$

Definizione 3.5.
Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano. Se vale $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim(A)$, A si dice *regolare*.

Teorema 3.3. Sia $(A, \mathfrak{m})$ locale noetheriano e sia $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d \rangle$. Allora A è regolare se e solo se $Gr_{\mathfrak{m}}(A) \simeq \mathbb{K}[u_1, \dots, u_d]$ come anelli graduati.

Dimostrazione.

$\Leftarrow$ Sia $S_n = l(A/\mathfrak{m}^n A)$. Sappiamo che

$$l(A/\mathfrak{m}^n A) = l(A/\mathfrak{m}) + l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + \dots + l(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n A).$$

Chiaramente vale che $l(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$. Per ipotesi abbiamo che $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ è isomorfo ai polinomi omogenei di grado i e quindi[1] $l(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1})$ è un polinomio di grado $d-1$. Ma allora S_n è un polinomio di grado d e quindi $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d(A) = \dim(A)$.

($\Rightarrow$) Sia $B = \mathbb{K}[u_1, \dots, u_d]$. Sappiamo che se $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d\}$ è una base per $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, allora $(x_1, \dots, x_d) = \mathfrak{m}$ come ideale e $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d\}$ generano $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$ come $\mathbb{K}$-algebra.[2] Allora la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : B &\longrightarrow Gr_{\mathfrak{m}}(A) \\ f &\longmapsto f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \end{aligned}$$

è un omomorfismo di anelli graduati surgettivo.
Facciamo vedere che è anche iniettivo. Supponiamo per assurdo che $\ker(\Phi) \neq (0)$. Allora esiste $f \neq 0$ (che possiamo assumere essere omogeneo) di grado s tale che $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) = 0$. Questo vuol dire che $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in \mathfrak{m}^{s+1}$, perché Φ è un omomorfismo di anelli graduati e dunque l'immagine di f appartiene a $\mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$. Ma allora deve valere $f \in \mathfrak{m}[u_1, \dots, u_d]$; infatti, se per assurdo non fosse vero, f non sarebbe un divisore di zero, allora quozientando, visto la mappa

$$\tilde{\Phi} : {}^{B}\!\big/\!_{(f)} \longrightarrow Gr_{\mathfrak{m}}(A),$$

ancora surgettiva, otterremmo[3] quindi che

$$d - 1 = d(B) - 1 \geq d(B/(f)) \geq d(Gr_{\mathfrak{m}}(A)) = d(A) = \dim A = d$$

e questo è un assurdo. Ma allora f è a coefficienti in $\mathfrak{m}$ (ossia $f = 0$), da cui $\ker(\Phi) = (0)$.

[1] Vedi Esempio 2.
[2] È quello che dimostriamo nella Proposizione 3.2.
[3] Oltre al Teorema 3.2, usa per le relazioni da sinistra verso destra: Proposizione 1.2,Lemma 3.4, suriettività, la definizione di $d(A)$ e la regolarità.

□

Lemma 3.6. Se $Gr_I(A)$ dominio allora A dominio.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $a, b \in A$ tali che $a, b \neq 0$ e $ab = 0$. Se $a, b \in A \setminus I$ (ossia se sono elementi di grado 0), allora abbiamo che anche $0 = ab \in A/I$, ma $Gr_I(A)$ è un dominio. Studiamo adesso il caso generale: siano k, h tali che

$$a \notin I^{k+1} \wedge a \in I^k$$
$$b \notin I^{h+1} \wedge b \in I^h.$$

Se consideriamo $n = \min\{k, h\}$, allora in I^n/I^{n+1} avremmo $\bar{a}\bar{b} = 0$ contro le ipotesi. □

Corollario 3.4. Sia $(A, \mathfrak{m})$ locale noetheriano regolare. Allora A è un dominio.

Dimostrazione. Ovvio per Teorema 3.3 e Lemma 3.6. □

Capitolo 4

Dimensione della fibra e dell'anello dei polinomi

Un'applicazione interessante dello studio della dimensione per anelli noetheriani locali è la dimostrazione dal Teorema della fibra e la possibiltà che ne deriva di calcolare la dimensione dell'anello dei polinomi a coefficienti un anello noetheriano.
Innanzi tutto cerchiamo di capire che cosa intendiamo quando parliamo di fibra. Consideriamo due anelli A e B, abbiamo già visto che dato un'omomorfismo d'anelli $f : A \to B$ questo induce una mappa $f^* : X = \mathrm{Spec}B \to Y = \mathrm{Spec}A$ continua rispetto alla topoligia di Zariski. Preso un $y \in Y$ l'insieme che andremo a studiare è $X_y \coloneqq \{x \in X \colon f^*(x) = y\}$, cioè la fibra della mappa f^*. Ricordando che i punti di Y non sono altro che i primi di A e che $f^*(y) = f^{-1}(y)$; preso un $p \in \mathrm{Spec}A$ si ha perciò che l'insieme in questione è

$$X_p = \{q \in \mathrm{Spec}B \colon f^{-1}(q) = p\}.$$

Visto che X e Y sono spazi topoligici è interessante caratterizzare la fibra anche anche in termini di Spec. In effetti abbiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra ogni fibra e un particolare spettro.

Definizione 4.1. Sia A un anello e p un suo ideale primo. Posto $S = A \setminus p$, il *campo residuo* di A in p è $k(P) \coloneqq S^{-1}(A/p) = (A/p)_p$.

L'esistenza di un omomorfismo d'anelli ci dice che B può essere visto come A-algebra, in particolare abbiamo che è ben definito l'anello $B \otimes k(p)$, che è un'estensione di scalari per B. Detti $S = A \setminus p$ e $T = f(S)$, sfruttando le proprietà del prodotto tensore otteniamo che

$$B \otimes k(p) = B \otimes \left({}^{A}\!/\!{}_{p}\right)_p = B \otimes {}^{A_p}\!/\!{}_{pA_p} = {}^{T^{-1}B}\!/\!{}_{T^{-1}(p^e)}.$$

Indicheremo perciò con $\left({}^{B}\!/\!{}_{p^e}\right)_p$ l'anello $B \otimes k(p)$.

Lemma 4.1. Sia $p \in \mathrm{Spec}A$, vale la seguente corrispondenza insiemistica

$$X_p \longleftrightarrow \mathrm{Spec}\left({}^{B}\!\big/_{p^e} \right)_p$$

Dimostrazione. Se $q \in X_p$ allora $q \supseteq f(p) = p^e$. Perciò possiamo ridurci a studiare

$$f : {}^{A}\!\big/_{p} \longrightarrow {}^{B}\!\big/_{p^e}$$

Gli ideali che ci interessano sono dunque i primi di B/p^e che contratti sono contenuti in p, che equivale a dire che dobbiamo scegliere tali ideali tra quelli che non contengono elementi in $A \setminus p$ una volta contratti. Preso dunque $S = A \setminus p$ e detto $T = f(S)$, i primi della fibra sono di $T^{-1}(B/p^e)$, ossia $\mathrm{Spec}\,(B/p^e)_p$. L'altra inclusione è ovvia. $\square$

Abbiamo perciò che la seguente è una buona definizione:

Definizione 4.2. Siano $f : A \to B$ omomorfismo d'anelli e $f^* : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ la mappa indotta. Se p è un ideale di A chiameremo *fibra* di f^* in p l'insieme $\mathrm{Spec}\,(B/p^e)_p$.

Sull'insieme X_p è indotta la topoligia di sottospazio e anche l'insieme $\mathrm{Spec}\left({}^{B}\!\big/_{p^e} \right)_p$ è uno spazio topoligico con i chiusi di Zariski. Abbiamo che la corrispondenza vale anche a livello topoligico:

Lemma 4.2. X_p e $\mathrm{Spec}\left({}^{B}\!\big/_{p^e} \right)_p$ sono omeomorfi.

Dimostrazione. Indichiamo con $\tilde{B}$ l'anello $\left({}^{B}\!\big/_{p^e} \right)_p$.
Abbiamo mostrato nel lemma 4.1 che l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi\colon \quad X_p &\longrightarrow \quad \mathrm{Spec}\tilde{B} \\ q &\longmapsto \quad T^{-1}\left({}^{q}\!\big/_{p^e} \right) \end{aligned}$$

è biunivoca; se Φ è continua e chiusa, allora è un omeomorfismo.
Gli insiemi della forma $V(I) := \{\tilde{p} \in \mathrm{Spec}\tilde{B} \colon \tilde{p} \supseteq I\}$ sono una base di chiusi di $\mathrm{Spec}\tilde{B}$, per la continuità dell'applicazione ci basterà mostrare che $\Phi^{-1}(V(I))$ è chiuso per ogni ideale $I \subseteq \tilde{B}$. Ricordiamo gli ideali di $\tilde{B}$ sono gli ideali di B che contengono p^e e che non intersecano T, ossia per ogni $I \subseteq \tilde{B}$ esiste $J \subseteq B$ tale che $p^e \subseteq J$ e $J \cap T = \varnothing$

$$I = T^{-1}\left(J/p^e\right).$$

Grazie a questa identità possiamo scrivere la controimmagine di un chiuso come chiuso di X_p:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(V(I)) &= \{q \in X_p \colon \Phi(q) \in V(I)\} \\ &= \{q \in X_p \colon T^{-1}\left(q/p^e\right) \supseteq I\} \\ &= \{q \in X_p \colon T^{-1}\left(q/p^e\right) \supseteq T^{-1}\left(J/p^e\right)\} \\ &= V_B(J) \cap X_p. \end{aligned}$$

E quindi Φ è continua. Sia Y un chiuso di X_p, allora è della forma $V_B(J) \cap X_p$; con le stesse considerazioni otteniamo che

$$\Phi(Y) = V(T^{-1}(J/p^e)),$$

e quindi Φ è chiusa. □

Osservazione 10. Si potrebbe anche parlare di dimensione topologica della fibra.

Enunciamo dunque il *Teorema sulla dimensione della fibra*:

Teorema 4.1. Siano $(A, \mathfrak{m})$ e $(B, \mathfrak{n})$ due anelli locali noetheriani e $f : A \to B$ omomorfismo d'anelli tale che $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$. Allora

$$\dim B \leq \dim A + \dim {}^{B}\!/\!_{\mathfrak{m}^e}.$$

Inoltre se f è piatta, cioè B è un $f(A)$-modulo piatto, vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. Indichiamo con a e d la dimensione rispettivamente di A e $B/\mathfrak{m}^e$. Abbiamo mostrato che per anelli locali noetheriani possiamo esprimere in tre modi diversi la dimensione dell'anello, in particolare ci torna utile qui l'uguaglianza $\dim B = \delta(B)$. Alla luce di ciò, per mostrare la tesi infatti ci basta costruire un ideale in B che sia $\mathfrak{n}$-primario e che abbia $a + d$ generatori. Partiamo da un ideale $I = (x_1, \ldots, x_a)$ in A che sia $\mathfrak{m}$-primario (esiste perché la $\dim A = a$). Osserviamo B/I^e e $B/\mathfrak{m}^e$ hanno la stessa dimensione, infatti $\exists k$ tale che $\mathfrak{m}^k \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$ e dunque $(\mathfrak{m}^e)^k \subseteq (\mathfrak{m}^k)^e \subseteq I^e \subseteq \mathfrak{m}^e$. Questo ci dice che l'ideale $\mathfrak{m}^e/I^e$ è contenuto nel nilradicale di B/I^e e dunque in ogni primo. Questo ci dice che i primi di B/I^e e $B/\mathfrak{m}^e$ sono in corrispondenza uno ad uno e che

$$\dim {}^{B}\!/\!_{I^e} = \dim {}^{B}\!/\!_{\mathfrak{m}^e} = d.$$

B/I^e è un anello locale con $\tilde{\mathfrak{n}} := \mathfrak{n}/I^e$ ideale massimale. Per quanto appena detto sulla dimensione possiamo trovare $J = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_d)$ un suo ideale $\tilde{\mathfrak{n}}$-primario, con $y_1, \ldots, y_d \in B$. Sia $H = (f(x_1), \ldots, f(x_a), y_1, \ldots, y_d)$, diciamo che H è l'ideale che stavamo cercando. Chiaramente H ha $a + d$ generatori, mostriamo che $\mathfrak{n}$ è l'unico primo che lo contiene (che implica che è $\mathfrak{n}$-primario). Se $p \supseteq H$, allora $p \supseteq I^e$, cosicché $p/I^e \supseteq J$; ma l'unico primo che contiene J è $\tilde{\mathfrak{n}}$. Necessariamente $p/I^e = \tilde{\mathfrak{n}}$ e per massimalità $p = \mathfrak{n}$.
Consideriamo quindi per concludere il caso che f sia piatta. Per mostrare l'uguaglianza ci basta esibire una catena di ideali primi di B lunga almeno $a + d$. Prendiamo una catena

$$\bar{p}_0 \subsetneq \bar{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{p}_d \subseteq {}^{B}\!/\!_{\mathfrak{m}^e}$$

ma $\bar{p}_i = {}^{p_i}\!/\!_{\mathfrak{m}^e}$

$$\mathfrak{m}^e \subseteq p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_d \subseteq B.$$

$f^{-1}(p_0)$ è un ideale primo di A, ma $\mathfrak{m} \subseteq f^{-1}\mathfrak{n}$, allora per massimalità $f^*(p_0) = \mathfrak{m}$. Consideriamo adesso invece una catena massimale in A

$$q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_a = \mathfrak{m}.$$

Abbiamo visto che se f è piatta gode della proprietà del going down e quindi per ognuno dei q_j sappiamo che esiste un ideale $\tilde{q}_j$ tale che $f^{-1}(\tilde{q}_j) = f^*(\tilde{q}_j) = q_j$, in particolare possiamo induttivamente ricostruire una catena di primi in B a partire p_0:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{q}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \tilde{q}_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \tilde{q}_{a-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & p_0 \arrow[d, "f^*"] \\
q_0 \arrow[r, hook] & q_1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & q_{a-1} \arrow[r, hook] & \mathfrak{m}
\end{tikzcd}$$

Unendo le due catene otteniamo la catena lunga $a + d$ in B che stavamo cercando

$$\begin{tikzcd}
\tilde{q}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \tilde{q}_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \tilde{q}_{a-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & p_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & p_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & p_d \subseteq B \arrow[d, "f^*"] \\
q_0 \arrow[r, hook] & q_1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & q_{a-1} \arrow[r, hook] & \mathfrak{m} \arrow[r, hook] & \mathfrak{m} \arrow[r, hook] & \mathfrak{m} \arrow[r, hook] & \mathfrak{m} \subseteq A
\end{tikzcd}$$

□

Corollario 4.1. Le fibre di un'applicazione piatta hanno tutte la stessa dimensione.

Il Teorema 4.1 permette di dimostrare un risultato molto importante a proposito degli anelli di polinomi:

Teorema 4.2. Sia A un anello noetheriano. Allora

$$\dim A[x] = \dim A + 1$$

Dimostrazione. In generale è sempre vero che $\dim A[x] \geq \dim A + 1$. Infatti da una quasiasi una catena di primi di A $q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n$, otteniamo una catena di primi in $A[x]$ $q_0[x] \subsetneq q_1[x] \subsetneq \cdots \subsetneq q_n[x]$. Una catena di questo tipo può essere estesa tramite l'ideale $I = (q_n, x)$. Chiaramente $q_n[x] \subsetneq I \subsetneq A[x]$, quindi una volta mostrato che I è primo avremo finito (a quel punto sapremo che le catene massimali di $A[x]$ sono lunghe almeno $\dim A + 1$); ma questo diventa evidente osservando che

$$A[x]/_I \simeq A/_{q_n}$$

che è un dominio.
Prendiamo adesso una catena di ideali primi $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n \subseteq A[x]$.

Vogliamo mostrare che $n \leq \dim A + 1$. Osserviamo che possiamo supporre $q = p_n$ massimale a meno di estendere la catena.
Definiamo $p = A \cap q$ e consideriamo gli anelli $A_p \subseteq A_p[x]$. Sia $S = A \setminus p$, allora per costruzione $p_j \cap S = \varnothing$ e dunque

$$S^{-1}p_0 \subsetneq S^{-1}p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S^{-1}q \subseteq A_p[x].$$

Se $n \leq \dim A_p \leq \dim A$[1] abbiamo la tesi, altrimenti consideriamo l'anello locale $(A[x])_q$. Posto $T = A[x] \setminus q$, anche in questo caso abbiamo

$$T^{-1}p_0 \subsetneq T^{-1}p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq T^{-1}q \subseteq A[x]_q.$$

Grazie alla proprietà universale della localizzazione, possiamo ottenere un omomorfismo f tra gli anelli locali noetheriani $A[x]_q = T^{-1}A[x]$ e $A_p = S^{-1}A$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "s"'] & A[x] \arrow[r, "t"] & T^{-1}A[x] \\ S^{-1}A \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Inoltre, indicando con $\mathfrak{m} = S^{-1}p$ e $\mathfrak{n} = T^{-1}q$ rispettivamente i massimali di A e B, vale che $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ e dunque per il teorema della dimensione della fibra

$$n \leq \dim A[x]_q \leq \dim A + \dim {}^{A[x]_q}\!/\!_{\mathfrak{m}^e}.$$

Se facciamo vedere che $\dim(A[x]_q/\mathfrak{m}^e) \leq 1$ abbiamo finito. Ma $\mathfrak{m}^e = T^{-1}(\mathfrak{m}[x])$ e dunque ricordando che $p = q \cap A$ e che quoziente e localizzazione commutano si ha che

$${}^{A[x]_q}\!/\!_{\mathfrak{m}^e} = {}^{T^{-1}A[x]}\!/\!_{T^{-1}(\mathfrak{m}[x])} \simeq {}^{T^{-1}A_p[x]}\!/\!_{T^{-1}\mathfrak{m}[x]} \simeq T^{-1}\left({}^{A_p[x]}\!/\!_{\mathfrak{m}[x]}\right)$$

e passando alle dimensioni si ha le tesi

$$\dim {}^{A[x]_q}\!/\!_{\mathfrak{m}^e} \leq \dim {}^{A_p[x]}\!/\!_{\mathfrak{m}} = \dim k(p)[x] = 1.$$

□

[1]Gli ideali di A_p sono in corrispondenza con gli ideali di A che sono p, la lunghezza delle catene prime localizzando perciò può al più diminuire.

Capitolo 5

Esercitazioni

5.1 Esercitazione 16/10/2015

Esercizio 1 (Esercizio 20)**.** Sia $A \subseteq B$ un'estensione intera di domini con A normale. Chiamiamo $X = \mathrm{Spec}A$ e $Y = \mathrm{Spec}B$. Mostrare che $Y \to X$ è aperta.

Dimostrazione. Vediamo che $f^*(Y_b) \cup X_{a_i}$. Sia infatti $q \in \mathrm{Spec}B$ tale che $b \notin q$. Supponiamo per assurdo $a_i \in p := A \cap q$ per ogni i. Allora dall'equazione

$$b^n = -a_1 b^{n-1} - \cdots - a_n$$

ricaviamo $b^n \in pB$. Tuttavia $b^n \notin q$ perché q è primo e $pB \subseteq q$ (perché $p = A \cap q \subseteq q$ e q è un ideale di B, dunque contiene l'ideale generato da p in B), contraddizione.

Passiamo all'altra inclusione. Preso un a_i e un primo $p \in \mathrm{Spec}A$ non contenente a_i, vogliamo trovare un primo $q \in \mathrm{Spec}B$ non contenente b e tale che $q \cap A = p$. Possiamo spezzare l'estensione intera $A \subseteq B$ in $A \subseteq A[b] \subseteq B$ (ovviamente entrambe intere). Se troviamo un primo $r \in \mathrm{Spec}A[b]$ non contenente b e tale che $r \cap A = p$ allora abbiamo concluso: infatti per lying over troviamo $q \in \mathrm{Spec}B$ con $q \cap A[b] = r$, dunque non contenente b e tale che $q \cap A = r \cap A = p$.

Dimostriamo intanto che $b \notin \sqrt{pA[b]}$. Questo perché, se per assurdo $b \in \sqrt{pA[b]}$, allora per ogni m sufficientemente grande esisterebbero $c_i \in p$ (dipendenti da m) tali che $b^m + \sum_{i=0}^{m-1} c_i b^i = 0$. Chiamato $\mu_b(t)$ il polinomio minimo di b definito nel testo avremmo allora

$$\mu_b(t) \mid t^m + \sum c_i t^i$$

per ogni tale m (infatti $\mu_b(t)$ siffatto è proprio il polinomio minimo di b su K, perché abbiamo dimostrato in classe che è a coefficienti in A), dove la divisibilità è intesa in $A[t]$ (a priori in $K[t]$ ma il polinomio divisore è monico). Questo ci dà a maggior ragione una divisibilità in $(A/p)[t]$, che però è impossibile perché $\mu_b(t)$ non può dividere una potenza di t siccome ha almeno un $a_i \neq 0$ nel quoziente.

Dunque

$$b \notin \sqrt{pA[b]} = \bigcap_{\substack{p' \in \mathrm{Spec}A[b] \\ p' \supseteq pA[b]}} p',$$

ovvero esiste un primo $r' \in \mathrm{Spec}A[b]$ contenente $pA[b]$ ma non b. Questo vuol dire che $r' \cap A$ è un primo di A contenente p. Per going-down otteniamo quindi un primo $r \subseteq r'$ di $\mathrm{Spec}A[b]$ tale che $r \cap A = p$. A maggior ragione r non contiene b, quindi è il primo che cercavamo. □

Esercizio 2 (Esercizio 27)**.** $A \subseteq B$ estensione finita di anelli noetheriani. Se $p \in \mathrm{Spec}A$ allora la fibra di p $\{q \in \mathrm{Spec}B | q \cap A = p\}$ è finita.

Dimostrazione. Siccome $p^{ec} = p$ dall'estensione $A \subseteq B$ otteniamo l'estensione $A/p \subseteq B/pB$ e i primi che ci interessano sono in bigezione coi primi di B/pB che si contraggono a $(0) \subseteq A/p$. Dunque possiamo assumere A dominio e $p = (0)$. Sia $S = A \setminus \{0\}$. Allora localizzando a S otteniamo l'inclusione $\mathrm{Frac}A \subseteq S^{-1}B$ e i primi della tesi sono in bigezione con i primi di $S^{-1}B$. Questo ci permette di assumere A campo (e ancora $p = (0)$). In questo caso B è un anello noetheriano: è un modulo finito su A (il quale è noetheriano essendo un campo), dunque è un A-modulo noetheriano, e quindi a maggior ragione è un B-modulo noetheriano (stiamo ingrandendo l'insieme delle combinazioni lineari possibili). Inoltre B ha dimensione 0, infatti tutti i primi di B devono contrarsi a (0) ed essendo l'estensione intera questo vieta l'esistenza di inclusioni proprie tra di essi. □

Osservazione 11. Non sono necessarie ipotesi di noetherianità, nè per A nè per B.

Esercizio 3 (Esercizio 22)**.** Se M è un A-modulo, il supporto di M $\mathrm{Supp}M$ è l'insieme dei primi $p \in \mathrm{Spec}A$ per cui $M_p \neq 0$.

Se M è un A-modulo finitamente generato, vale $\mathrm{Supp}M = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}M)$.

Dimostrazione. Sia $M =< m_1, \dots, m_r >$. Allora se $p \in \mathrm{Spec}A$ per definizione $M_p = 0 \iff \forall m \in M \exists u \notin p : um = 0$. Questo equivale all'esistenza di $u \notin p$ tale che $um = 0$ per ogni $m \in M$, infatti preso per ogni i $u_i \notin p$ tale che $u_i m_i = 0$, basta scegliere $u = u_1 \dots u_r$. Dunque $M_p = 0$ se e solo se esiste $u \in \mathrm{Ann}M \setminus p$, ovvero se e solo se $p \notin \mathrm{Supp}M$. □

Esercizio 4 (Esercizio 24)**.** Se $A = B \times C$ allora $\mathrm{Spec}A$ è omeomorfo a $\mathrm{Spec}B \coprod \mathrm{Spec}C$.

Se invece $A = \prod_{i \geq 0} A_i$, dove $A_i \neq 0$ per ogni i, non tutti gli ideali primi sono della forma $\prod_{j<i} A_i \times p \times \prod_{j>i} A_i$ con $p \in \mathrm{Spec}A_i$.

Dimostrazione. Gli ideali di $B \times C$ sono tutti e soli quelli della forma $I_1 \times I_2$ con I_1, I_2 ideali di B, C rispettivamente. Infatti quelli descritti sono chiaramente ideali, mentre se I è un ideale di $B \times C$, posti $I_1 = \pi_B(I)$ e $I_2 = \pi_C(I)$ (che sono ideali, essendo le proiezioni omomorfismi), l'inclusione $I \subseteq I_1 \times I_2$ è vera per costruzione, mentre se $b = \pi_B(b, b')$ e $c = \pi_C(c', c)$ con $(b, b'), (c', c) \in I$, anche $(b, 0) = (1, 0)(b, b'), (0, c) = (0, 1)(c', c)$ stanno in I, dunque pure la somma (b, c), da cui l'altra inclusione. Chiaramente $(B \times C)/(I_1 \times I_2) \cong (B/I_1) \times (C/I_2)$ con la mappa naturale. In particolare, i primi di A sono esattamente gli ideali della forma $p = p_1 \times C$ o $p = B \times p_2$ dove $p_1 \in \mathrm{Spec}B$ e $p_2 \in \mathrm{Spec}C$.

Dunque abbiamo due mappe $\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ e $\mathrm{Spec}C \to \mathrm{Spec}A$ date da $p \mapsto p \times C$ e $p \mapsto B \times p$. Tali mappe sono certamente iniettive e inoltre sono continue e suriettive perché sono indotte dalle proiezioni $B \times C \to B$ e $B \times C \to C$, che sono continue e chiuse (perché le proiezioni sono suriettive). Di conseguenza anche $\mathrm{Spec}B \coprod \mathrm{Spec}C \to \mathrm{Spec}A$ è iniettiva, continua e chiusa e per i discorsi fatti in precedenza è anche suriettiva, dunque è un omeomorfismo.

Sia ora $A = \prod_{i \geq 0} A_i$. Consideriamo I l'ideale delle successioni definitivamente nulle. Allora I è un ideale proprio e non è contenuto in nessuno degli ideali della forma $\prod_{j<i} A_i \times p \times \prod_{j>i} A_i$ con $p \in \mathrm{Spec}A_i$ (l'elemento e_i uguale a 1 nell'i-esima entrata e nullo in tutte le altre dà un controesempio). Preso un qualunque primo contenente I, tale primo sarà diverso da quelli descritti nel testo. $\square$

5.2 Esercitazione 23/10/2015

Esercizio 5 (Esercizio 30)**.** Sia A un anello graduato e M un A modulo finitamente generato. Sia $A_+ = \bigoplus_{n>1} A_n$. Se $A_+M = M$ allora $M = 0$.

Osservazione 12. L'enunciato precedente può essere visto come l'equivalenti del Lemma di Nakayama per la teoria degli anelli graduati.

Dimostrazione. Supponiamo $M \neq 0$, poiché M è un A modulo graduato finitamente generato, esiste $N \in \mathbb{Z}$ tale che $M_N \neq 0$ e $M = \bigoplus_{n \leq N} M_n$. Per definizione di modulo graduato $A_i M_j \subseteq M_{j+i}$, perciò $M = A_+M \subset \bigoplus_{n \leq N+1} M_n$ e dunque $M_N = 0$, che è assurdo per la scelta di N. $\square$

Esercizio 6 (Esercizio 31)**.** Sia $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e sia f un polinomio omogeneo di grado N. Calcolare serie e polinomio di Hilbert di $A/(f)$.

Osservazione 13. Prima di calcolare serie e polinomio di Hilbert facciamo alcune considerazioni. A è un anello noetheriano graduato (col grado standard), sappiamo che gli ideali sono sottomoduli di A, se però prendiamo un ideale principale generato da un polinomio otteniamo qualcosa di più, cioè un sottomodulo graduato:

$$(f) = \bigoplus_d f \cdot A_d$$

In particolare se il grado di f è N, $f \cdot A_d = (f) \cap A_{d+N} = (f)_{d+N}$ che sono i polinomi di (f) di grado $d + N$.

Dimostrazione. Mimando quanto fatto nella dimostrazione del teorema di Hilbert-Serre, consideriamo la successione esatta di A moduli

$$0 \longrightarrow (f) \longrightarrow A \longrightarrow {}^{A}\!/_{(f)} \longrightarrow 0$$

Allora $\mathcal{P}(A,t) = \mathcal{P}((f),t) + \mathcal{P}(A/(f),t)$.
Abbiamo già visto che

$$\mathcal{P}(A,t) = \frac{1}{(1-t)^n}$$

e per l'osservazione abbiamo anche che

$$\mathcal{P}((f),t) = t^N \mathcal{P}(A,t) = \frac{t^N}{(1-t)^n}.$$

Sfuttando la realzione sopra possiamo facilmente calcolare la serie di Hilbert per $A/(f)$:

$$\mathcal{P}(A/(f),t) = \mathcal{P}(A,t) - \mathcal{P}((f),t) = \frac{1-t^N}{(1-t)^n}.$$

Indichiamo ${}^{A}\!/_{(f)}$ con M per compattezza. Con le stesse considerazioni otteniamo che

$$l(M_d) = l(A_d) - l((f)_d) = l(A_d) - l(A_{d-N})$$

e dunque il polinomio di Hilbert di M è

$$\phi_M(d) = \binom{d+n-1}{n-1} - \binom{d-N+n-1}{n-1}.$$

□

Esercizio 7 (Esercizio 33)**.** Sia A noetheriano, I un ideale di A e M un A modulo finitamente generato. Allora

$$\bigcap_{n \geq 0} I^n M = \{m \in M \colon \exists x \in I \text{ tale che } (1+x)m = 0\}.$$

Dimostrazione. Sia $N = \cap_{n\geq 0} I^n M$, vorremmo usare il teorema di Hamilton-Cayley, mostriamo perciò che $N = IN$. Consideriamo la filtrazione I-stabile

$$M \supseteq IM \supseteq \cdots \supseteq I^n M \supseteq \ldots$$

A partire da $N = \cap_{n\geq 0} I^n M$ otteniamo un'altra I-filtrazione

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \ldots$$

dove $N_n = I^n M \cap N$. Per il teorema di Artin-Rees tale filtrazione risulta I-stabile, cioè $\exists n_0$ tale che $N_{n+n_0} = I^n N_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$. Perciò

$$I^{n_0+1} M \cap N = I(I^{n_0} M \cap N)$$

e dunque $N = IN$. N è finitamente generato e l'applicazione identica

$$\varphi \colon N \longrightarrow N$$

è tale che $\varphi(N) \subseteq IN$ allora esistono $a_1, \ldots, a_s \in I$ tali che $\varphi^s + a_1\varphi^{s-1} + \cdots + a_s \equiv 0$. Ricordando che φ è l'identità otteniamo $(1+a_1+\cdots+a_s)N = 0$, ossia posto $x = a_1 + \cdots + a_s$ si ha che $(1+x)N = 0$. $\square$

Osservazione 14. La noeterianità di A in realtà è anche una condizione sufficiente; se consideriamo infatti l'anello delle funzioni $A = \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ (che non è noetheriano) e l'ideale $I = \{f \in A \colon f(0) = 0\}$, abbiamo che la tesi non è più vera. Poniamo $N := \bigcap_{n\geq 0} I^n$. Dimostriamo la seguente uguaglianza che ci sarà utile dopo:

$$N = \left\{ f \in A \colon D^{(k)} f(0) = 0 \ \forall k \geq 0 \right\}.$$

Indicheremo da qui in poi con Λ l'insieme $\left\{ f \in A \colon D^{(k)} f(0) = 0 \ \forall k \geq 0 \right\}$. Osserviamo che l'operatore D è lineare e dunque per studiare una funzione in I^n ci basterà considerare le funzioni della forma $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ dove $g_j \in I$ per $j = 1, \ldots, n$. Sia $f \in I^{h+1}$, diciamo che $D^{(h)} f(0) = 0$. Per induzione su h:

- $h = 0$. $D^{(0)} f(x) = f(x) \subseteq I$ e quindi $f(0) = 0$
- $h = 1$. Dato che $f \in I^2$ allora si può scrivere come $f = \sum_i f_{1i} f_{2i}$. Chiaramente $f(0) = 0$, inoltre $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$ e dunque $(f_1 f_2)'(0) = f_1'(0) f_2(0) + f_1(0) f_2'(0) = 0$ visto che $f_1, f_2 \in I$.
- $h > 2$. Sia $f(x) \in I^{h+1}$. Per l'osservazione posso supporre $f(x) = f_1 f_2 \cdots f_{h+1}$. usando la regola di Leibniz si ha che

$$D^{(h)}[f_1 \cdot (f_2 \cdots f_{h+1})] = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} D^{(i)} f_1 \cdot D^{(h-i)} (f_2 \cdots f_{h+1}).$$

Ma poiché $f_2 \cdots f_{h+1} \in I^h$ per ipotesi induttiva

$$\sum_{i=0}^{h-1} \binom{h}{i} D^{(i)} f_1(0) \cdot D^{(h-i)}(f_2 \cdots f_{h+1})(0) = 0$$

mentre poiché $f_1 \in I$ si ha che $f_1(0) \cdot D^{(h)}(f_2 \cdots f_{h+1})(0) = 0$.

Abbiamo quindi che $N \subseteq \Lambda$.
Viceversa, consideriamo $f \in \Lambda$ allora dato che $f(0) = 0$ allora $f \in I$ e inoltre

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial t} \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 x f'(tx) \mathrm{d}t = \\ &= x \int_0^1 f'(tx) \mathrm{d}t = \end{aligned}$$

Detto $g_1(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$, si ha che

$$g_1(0) = \int_0^1 f'(t0)\mathrm{d}t = f'(0) = 0$$

e perciò $f \in I^2$. Induttivamente, usando che $g_{k-1}(x) \in I$, otteniamo con gli stessi passaggi che $f = x^k g_k$. Ma dato che $f \in \Lambda$

$$\begin{aligned} 0 &= f^{(k)}(0) = \\ &= D^{(k)}[x^k g_k](0) = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{(i)}[x](0) D^{(k-i)}[g_k](0) = \\ &= k! g_k(0), \end{aligned}$$

e dunque $f \in I^{k+1}$ per ogni $k \geq 0$, cioè $N \supseteq \Lambda$.
Grazie a questa caratterizzazione è più facile vedere che non vale la proposizione. Presa ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

questa appartiene a N, ma non può esistere $g \in I$ è tale che $[(1+g)f](0) = 0$ altrimenti f dovrebbe annullarsi in tutto un intorno di zero.