- RAMMENTIAMO: Sia X spazio topologico, Z, Y tali che $~~\exists~~$ $Z \subseteq Y \subseteq X$, e siano Z, Y dotati delle topologie indotte da X. Se B è aperto di Y ($B \subseteq Y$ aperto di Y) allora $B \cap Z$ è aperto di Z.

$\downarrow$

B è aperto di Y, allora esiste $A \subseteq X$ aperto di X tale che $B = A \cap Y$. Allora $B \cap Z = A \cap \underbrace{Y \cap Z}_{= Z} = A \cap Z$, che è aperto di Z. $\square$

- PROPOSIZIONE: Sia $~~\exists~~$ $\mathcal{B} = \{B_i\}$ ricoprimento di uno spazio topologico X. Se $\mathcal{B}^\circ = \{B_i^\circ\}$, dove B_i° è la parte interna di B_i, ricopre X allora $\mathcal{B}$ è ricoprimento fondamentale.

$\downarrow$

Sia $U \subseteq X$ e supponiamo che per ogni B_i $U \cap B_i$ ~~è~~ sia aperto in B_i per ogni B_i. Allora $(U \cap B_i) \cap B_i^\circ$ è aperto in B_i°. Ma $U \cap B_i \cap B_i^\circ = U \cap B_i^\circ$, e noi sappiamo che ~~è~~ $\mathcal{B}^\circ$ è un ricoprimento fondamentale, quindi U è aperto.

• PROPOSIZIONE: Sia $f: X \to Y$ continua, Y T_2 e localmente compatto.

f è propria $\iff$ è chiusa e $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ è compatto.

$\Downarrow$

$\Leftarrow$) Dobbiamo dimostrare che per ogni $K \subseteq Y$ compatto $f^{-1}(K)$ è compatto.

Sia dunque $K \subseteq Y$ compatto, e sia $y \in K$. Sappiamo che $f^{-1}(y)$ è compatto.

Sia dato un ricoprimento aperto $\mathcal{A} = \{A_i\}$ di $f^{-1}(K)$.

Sappiamo che esistono $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ t.c. $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} A_{i_k}$.

Questa unione è un aperto, allora $\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_{i_k}\right)^c$ è un chiuso.

Ma $f((\cup A_{i_k})^c)$ è un chiuso, e y non gli appartiene.

~~Quindi esiste un aperto $\bar{V}_y \ni y$ tale che $\bar{V}_y \subseteq [f((\cup A_{i_k})^c)]^c$.~~

~~Ma allora $f^{-1}(\bar{V}_y) \subseteq \cup A_{i_k}$, infatti $\forall v \in \bar{V}_y$~~

~~ora~~ Esiste quindi un aperto $\bar{V}_y \ni y$ tale che per ogni $v \in \bar{V}_y$ $v \notin f((\cup A_{i_k})^c)$.

Questo vuol dire che $\nexists x \in (\cup A_{i_k})^c$ tale che $f(x) = v$, dunque $f^{-1}(\bar{V}_y) \subseteq \cup A_{i_k}$.

Prendiamo allora un ricoprimento $\{\bar{V}_y\}_{y \in K}$ di K: poiché K è compatto allora esistono $\bar{V}_{y_1}, \dots, \bar{V}_{y_m}$ tali che $K \subseteq \bar{V}_{y_j}$, $j = 1, \dots, m$.

Allora $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{m} \bar{V}_{y_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(\bar{V}_{y_j})$.

Sappiamo che per ogni $j = 1, \dots, m$ $f^{-1}(\bar{V}_{y_j})$ è ricoperto da un ~~un~~ numero finito di aperti di $\mathcal{A}$, quindi anche $f^{-1}(K)$ lo è, quindi $f^{-1}(K)$ è compatto.

$\Rightarrow)$

È ovvio per ipotesi che $f^{-1}(y)$ è compatto, $\forall y \in Y$.

Sappiamo che Y è localmente compatto, quindi esiste per ogni $y \in Y$ un intorno compatto $\bar{U}_y$. Sia $\mathcal{U} = \{\bar{U}_y\}_{y \in Y}$ è un ricoprimento fatto di questi intorni: sappiamo per la proposizione precedente che è un ricoprimento fondamentale.

Sia $F \subseteq X$ chiuso di X. ~~Prendiamo K compatto su Y.~~

Per ogni $y \in Y$ $f^{-1}(\bar{U}_y)$ è compatto in X (per ipotesi).

Inoltre $f^{-1}(\bar{U}_y)$ è chiuso in X, perché $\bar{U}_y$ è chiuso in Y (è compatto e Y è T_2).

Allora $F \cap f^{-1}(\bar{U}_y)$ è chiuso in X, inoltre è chiuso anche in $f^{-1}(\bar{U}_y)$, ~~che è contenuto in un compatto~~ che è un compatto, quindi $F \cap f^{-1}(\bar{U}_y)$ è compatto in X.

Ora, $f(F \cap f^{-1}(\bar{U}_y)) \boxed{=} \cancel{\subseteq} f(F) \cap \bar{U}_y$ (VERIFICARLO).

Per continuità $f(F) \cap \bar{U}_y$ è compatto, ed è chiuso sia in Y che in $\bar{U}_y$ (in $\bar{U}_y$ ci interessa maggiormente).

Sapendo che $\mathcal{U}$ è ricoprimento fondamentale sappiamo che F è chiuso in Y, quindi $\cancel{\Rightarrow}$ f è chiusa. □