Caratterizzazione dei compatti

Teorema. *Sia X uno spazio topologico. X è compatto $\Longleftrightarrow$ per ogni spazio topologico Y la proiezione $\pi : X \times Y \to Y$ è chiusa.*

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) X è compatto. Sia $C \subseteq X \times Y$ chiuso, e dimostriamo che $\pi(C)$ è chiuso in Y. Se C è chiuso allora $A = C^c$ è aperto in $X \times Y$, quindi $A = \bigcup U_i \times V_i$ dove U_i è aperto di X, V_i è aperto di Y. Sia ora $y \in [\pi(C)]^c$, noi vogliamo dimostrare che esiste un intorno $V \ni y$ che è contenuto in $[\pi(C)]^c$. Chiaramente per compattezza $X \times \{y\}$ è un compatto, e inoltre $C \subseteq \pi^{-1}(\pi(C))$, dunque $\pi^{-1}([\pi(C)]^c) \subseteq C^c = A$, quindi anche $X \times \{y\}$ è contenuto in A. Esistono quindi $i_1, \dots, i_n$ tali che $X \times \{y\} \subseteq U_{i_1} \times V_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \times V_{i_n}$.
Sia $V = V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_n}$: $y \in V$, perché possiamo supporre che y stia in tutti i V_{i_k},osserviamo che V è intorno aperto di y,e inoltre osserviamo che $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Possiamo allora concludere che $V = X \times V$ è contenuto in $[\pi(C)]^c$, infatti se così non fosse allora esiste $v \in V$ che appartiene a $\pi(C)$, cioè esiste $(x, v) \in C$ tale che $\pi((x, v)) = v$, ma questo è impossibile, perché abbiamo visto che $X \times V$ è contenuto in A, quindi non può esserci un elemento di quella forma appartenente a C.
Abbiamo dimostrato quindi che $[\pi(C)]^c$ è aperto, quindi $\pi(C)$ è chiuso.

$\Longleftarrow$) La proiezione è chiusa, vogliamo dimostrare che X è compatto. Supponiamo inizialmente che X sia T_2 e localmente compatto. Allora la sua compattificazione di Alexandrov $\hat{X}$ è T_2. Questo vuol dire che la sua diagonale $\Delta_{\hat{X}}$ è chiusa in $\hat{X} \times \hat{X}$. Ma allora Δ_X, che è anche uguale a $\Delta_{\hat{X}} \cap X \times \hat{X}$ è chiusa in $X \times \hat{X}$. Poiché per ipotesi la proiezione è chiusa allora $X = \pi(\Delta_X)$ è chiuso in $\hat{X}$, quindi poiché $\hat{X}$ è compatto allora X è compatto.

Passiamo ora al caso generale, in cui non sfrutteremo il caso precedente. Noi dimostreremo che una ogni famiglia di chiusi $\mathfrak{F}$ di X dalla proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota. Possiamo supporre che questa famiglia sia chiusa per intersezione. Questo ci è possibile perché possiamo costruire la famiglia $\mathfrak{F}'$ data da $\mathfrak{F} \cup \{\text{intersezioni dei chiusi di} \mathfrak{F}\}$. Questa famiglia ha ancora la proprietà dell'intersezione finita, è chiusa per intersezione, e se $\mathfrak{F}'$ ha intersezione non vuota chiaramente anche $\mathfrak{F}$ ha intersezione non vuota.
Introduciamo adesso l'insieme $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, dove ∞ è un punto aggiuntivo all'insieme X, che ovviamente non sta in X.
Sia ora la famiglia

$$\mathfrak{B} = \{\{x\} | x \in X\} \cup \{C \cup \{\infty\} | C \in \mathfrak{F}\}.$$

Si può verificare facilmente che esiste una topologia in $\hat{X}$ tale che $\mathfrak{B}$ ne sia una base (Basta ricordarsi che la famiglia $\mathfrak{F}$ è chiusa per intersezione).
Inseriamo allora in $\hat{X}$ tale topologia: con tale topologia la chiusura $\overline{X}$ di X in $\hat{X}$ è proprio $\hat{X}$. Se così non fosse allora $\{\infty\}$ dovrebbe essere aperto necessariamente, dunque deve essere unione di insiemi della forma $(C \cup \{\infty\}), C \in \mathfrak{F}$, e questo implica che necessariamente $\emptyset$ appartiene alla famiglia $\mathfrak{F}$, questo però per definizione di famiglia avente la proprietà dell'intersezione finita non è vero.
Prendiamo adesso lo spazio $X \times \hat{X}$ dotato della topologia prodotto (in X la topologia iniziale, in $\hat{X}$ la topologia generata dalla base $\mathfrak{B}$) e consideriamo la diagonale $\Delta_X \subseteq X \times \hat{X}$: allora $\pi(\overline{\Delta_X}) \subseteq \hat{X}$ è chiuso per ipotesi, dunque, poiché $X = \pi(\Delta_X) \subseteq \pi(\overline{\Delta_X})$ allora per ciò che abbiamo detto sopra $\infty \in \pi(\overline{\Delta_X})$, dunque esiste $(x, \infty) \in \overline{\Delta_X}$ tale che $\pi((x, \infty)) = \infty$. Questo vuol dire che il punto (x, ∞) è un punto aderente per l'insieme Δ_X, dunque ogni suo intorno interseca Δ_X. Questo implica allora che per ogni $C \in \mathfrak{F}$ $x \in C$: se esistesse C tale che $x \notin C$ allora $x \in C^c$, che è un aperto di X, quindi l'insieme $C^c \times (C \cup \{\infty\})$ è un intorno di (x, ∞), dunque interseca Δ_X,ma questo significa che esiste $x_0 \in X$ tale che $(x_0, x_0) \in C^c \times (C \cup \{\infty\})$,

che inevitabilmente significa $x_0 \in C^c, x_0 \in C$ allo stesso tempo, e questo ci dà un assurdo. Dunque abbiamo dimostrato che ogni famiglia di chiusi di X dalla proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota, il che implica che X è compatto. $\square$