• DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$

Dimostriamo la densità di $\mathbb{Q}$.
Tanto per cominciare enunciamo l'assioma di completezza.

• ASSIOMA DI COMPLETEZZA:
Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$, A, B entrambi non vuoti, ~~esis~~ con $A \le B$, esiste $\xi \in \mathbb{R}$ t.c. $A \le \xi \le B$.

• LA COMPLETEZZA IMPLICA L'ARCHIMEDEITÀ.
Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_0 x > y$.

• PROPOSIZIONE: (PARTE INTERA)
Per ogni reale x esiste un unico intero $m \in \mathbb{Z}$ t.c. sia
$$m \le x \le m+1.$$

$\Downarrow$

Sia $B = \{q \in \mathbb{Z} : q > x\}$. Tale insieme non è vuoto.
Infatti esiste n t.c. $n > |x|$. Quindi in generale vale $-n < -|x| \le x \le |x| < n$.
Come già visto, esistono anche interi p minori di x.
Ogni tale intero è minorante di B.
Considero allora $S = \{q - p : q \in B\}$.
$S \subseteq \mathbb{N}$. (Perché?)
~~Si può dire così a meno di traslare per~~
È vero perché $q > x > p \Rightarrow q > p \Rightarrow q - p > 0$.
Quindi S ha un minimo.
Sia esso $\bar{q} - p$.
Allora $\bar{q}$ è il minimo di B.
Ne segue allora che $m = \bar{q} - 1 \le x$ (perché $\bar{q}$ è il minimo).
Quindi si ha che $m \le x < \underbrace{m+1}_{\bar{q}}$.

Dimostriamo dunque che tale m è anche unico.
Se n è t.c. $n \le x < n+1 \Rightarrow$ se $n \neq m$ $n > m \vee n < m$.
Se $n > m$ $n \ge m+1 > x$.
Se $n < m$ $n < n+1 \le m \le x$.

□

• Tale m si chiamerà PARTE INTERA e ~~sarà~~ verrà indicata con $[x]$.

- **COROLLARIO**: Sia $\delta > 0$ un numero reale. Per ogni reale x esiste un unico intero $m \in \mathbb{Z}$ t.c. sia

$$m\delta \le x < (m+1)\delta$$

↓

Essendo $\delta > 0$ allora posso considerare $\frac{x}{\delta}$.

Quindi esiste m t.c. $m \le \frac{x}{\delta} < m+1$, cioè $m\delta \le x < (m+1)\delta$.

- **PROPOSIZIONE**: Sia $\delta > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Se $\delta < y - x$ allora esiste un intero $n \in \mathbb{Z}$ t.c. $x < n\delta < y$

↓

Sappiamo che esiste $m \in \mathbb{Z}$ t.c. $m\delta \le x < (m+1)\delta$

Allora $n = m+1$ è uno degli interi cercati.

Infatti:

deve valere $(m+1)\delta < y$.

Se così non fosse allora $(m+1)\delta \ge y$.

Quindi, poiché

$m\delta \le x \Rightarrow -m\delta \ge -x$

Allora ~~$y - x \ge (m+1)\delta - m$~~ $y - x \le (m+1)\delta - m\delta = \delta$, che va contro l'ipotesi.

(NON È DETTO CHE SIA UNICO!!!)

- **COROLLARIO**: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

↓

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $a < b$. $\Rightarrow b - a > 0$.

Allora $\frac{1}{b-a} > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{1}{b-a}$, di conseguenza $\frac{1}{n} < b - a$.

Per la proposizione allora esiste $m \in \mathbb{Z}$ t.c. $a < \frac{m}{n} < b$. □

- OSS. Tra due reali si p

↓

Sia $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\theta > 0$ (ta

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ esiste n
$a < b$

l'archimedeità.

Ma allora esiste un intero

Se $m \neq 0$ allora $\frac{m}{n}\theta$ è

Se $m = 0$ vorrà dire che

Quindi si può prendere

• OSS. Tra due reali si ~~possono tro~~ può trovare un irrazionale.

Sia $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\theta > 0$ (tanto dall'altra parte è la stessa cosa)

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ esiste n t.c. $\frac{\theta}{n} < \cancel{a-b}\ b-a$, sempre per l'archimedeità.

Ma allora esiste un intero $m \in \mathbb{Z}$ t.c. $a < \frac{m}{n}\theta < b$.

Se $m \neq 0$ allora $\frac{m}{n}\theta$ è irrazionale.

Se $m = 0$ vorrà dire che $a < 0 < b$.

Quindi si può prendere un irrazionale tale che $0 < \frac{\theta}{n} < b$.