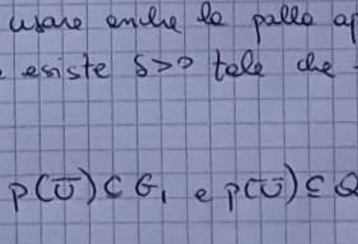
- UN ESEMPIO DI SPAZIO CONNESSO MA NON CONNESSO PER ARCHI:

Consideriamo lo spazio $X := \underbrace{\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,\infty)\}}_{G} \cup \underbrace{\{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}}_{I}$

Poiché G è banalmente connesso e $X \subseteq \bar{G}$ allora anche X è connesso. Ciò che vogliamo dimostrare è che non è connesso per archi. Dimostriamo ciò verificando che non esiste arco p ~~t.c.~~, $p: [0,1] \to X$ t.c. $p(0) \in G$, $p(1) \in I$.
Supponiamo per assurdo che tale arco esista. Poiché p è continua, e I è chiuso anche $p^{-1}(I) \subset [0,1]$ è chiuso e non vuoto.
Poiché $[0,1]$ è chiuso allora $p^{-1}(I)$ è chiuso in $\mathbb{R}$, allora esiste $\inf p^{-1}(I)$ che appartiene a $p^{-1}(I)$. Esiste t_0 tale che $\underbrace{p(t_0)}_{p_0} \in I$ e per ogni $t \in [0, t_0)$ $p(t) \in G$.
Per la definizione di continuità sia $Q_\varepsilon(p_0)$ il quadrato aperto di lato 2ε centrato in p_0 (si potrebbe usare anche la palla aperta, ma preferisco il quadrato), con $\varepsilon > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(t) \in Q_\varepsilon(p_0)$ per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Sia ora $U = (t_0 - \delta, t_0)$: sappiamo che $p(U) \subset G$, e $p(U) \subseteq Q_\varepsilon(p_0)$, allora $p(U) \subseteq G \cap Q_\varepsilon(p_0)$.
Poiché U è connesso anche $p(U)$ è ~~connesso~~ un sottoinsieme connesso di $G \cap Q_\varepsilon(p_0)$.
Arriviamo all'assurdo. Se ε è sufficientemente piccolo l'insieme $G \cap Q_\varepsilon(p_0)$ avrà infinite componenti connesse.



* Come si verifica che ha infinite componenti connesse? Dato $\varepsilon > 0$ $\exists\, x < \varepsilon$ t.c. $\sin\frac{1}{x} = 1$. Se $p_0 = (0, y_0)$ e $|y_0| \neq 1$ possiamo prendere ε t.c. $y_0 + \varepsilon < 1$ e $y_0 - \varepsilon > -1$. Dato x t.c. $\sin\frac{1}{x} = 1$, che ~~sono~~ sarà della forma $\cancel{(2k+1)}\ \frac{2}{(4k+1)\pi}$ $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$, mentre gli x t.c. $\sin\frac{1}{x} = -1$ saranno della forma $\frac{2}{(4k+3)\pi}$, $k \geq 0$. Osserviamo che ce ne sono infinite, ed è facile vedere che le componenti connesse si trovano negli intervalli $\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}, \frac{2}{(4k+1)\pi}\right)$ e sono infinite.

Sicuramente va formalizzato meglio, ma come dimostrazione va bene.*

~~Detto questo, poiché~~ (Si può fare lo stesso ragionamento anche con $|\gamma_0|=1$).

Detto questo possiamo concludere, perché per ogni componente connessa C esiste chiaramente un $\gamma_C > 0$ t.c. $\forall p \in C$, la distanza $d(p, p_0) > \gamma_C$.
$p(\bar{U})$ essendo connesso chiaramente è contenuto in una di queste componenti connesse, sia essa C_0.
Sia $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \gamma_{C_0}$. Allora $Q_{\varepsilon_1}(p_0) \cap p(\bar{U}) = \emptyset$.
Poiché p è continua però esiste un δ_1 tale che per ogni $t \in \underbrace{(t_0 - \delta_1, t_0)}_{\bar{U}_1}$,
$p(t) \in \cancel{\emptyset}\, Q_{\varepsilon_1}(p_0)$. Ovviamente $\bar{U}_1 \subseteq \bar{U}$.

~~Quindi $B_{\varepsilon_1}(p_0) \cap p(\bar{U}) \supset$~~

Quindi $\cancel{\emptyset}\ Q_{\varepsilon_1}(p_0) \cap p(\bar{U}) \supset p(\bar{U}_1) \cap Q_{\varepsilon_1}(p_0) \neq \emptyset$.

Questo ci porta all'assurdo. $\square$