Il quoziente di un prodotto non è prodotto di quozienti

Dati due spazi topologici X e Y siano definite su di essi due relazioni di equivalenza $\sim_1$,$\sim_2$. Siano $\pi_1 : X \to X/\sim_1$, $\pi_2 : Y \to Y/\sim_2$ le proiezioni.
Definiamo l'applicazione $\pi : X \times Y \to X/\sim_1 \times Y/\sim_2$ data da $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. Sia data su $X \times Y$ la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $(x, y) \sim (x_2, y_2)$ se $\pi((x, y)) = \pi((x_2, y_2))$. Ci chiediamo se π induce un omeomorfismo tra $X \times Y/\sim$ e $X/\sim_1 \times Y/\sim_2$.

La risposta è no.

Vediamo un esempio: sia dato lo spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.
Definiamo su $\mathbb{R}$ la relazione $\sim_1$ tale che $x \sim y$ se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}_+$, mentre su $\mathbb{Q}$ definiamo la relazione $\sim_2$ tale che $x \sim_2 y$ se $x = y$.
Sia $Z = \mathbb{R}/\mathbb{Z}_+$, se dimostriamo che $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to Z \times \mathbb{Q}$ non è identificazione abbiamo finito. Per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ definiamo $c_n = \sqrt{2}/n$ e l'insieme

$$F_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| \vee y \leq -|x|\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1/4 \leq x \leq 1/4\} + \overrightarrow{(n, c_n)}.$$

Sia $U_n = F_n^\circ$, e sia $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$: U è un aperto di $\mathbb{R}^2$, dunque $U^\mathbb{Q} = U \cap \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ è un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ $\{n\} \times \mathbb{Q}$ è contenuto in U_n, e quindi $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Q}$ è contenuto in U, e chiaramente in $U^\mathbb{Q}$. Dunque $U^\mathbb{Q}$ è un aperto π-saturo. Se dimostriamo che $\pi(U^\mathbb{Q})$ non è aperto allora abbiamo finito.
Se $\pi(U^\mathbb{Q})$ fosse aperto, allora sarebbe intorno di $([1], 0)$, dunque esiste $W \times I_\gamma^\mathbb{Q} \ni ([1], 0)$ contenuto in $\pi(U^\mathbb{Q})$ dove W è aperto di Z, $I_\gamma^\mathbb{Q} = (-\gamma, \gamma) \cap \mathbb{Q}$ è un intervallo aperto di $\mathbb{Q}$.

Osserviamo che $\pi_1^{-1}(W) \times \pi_2^{-1}(I_\gamma^\mathbb{Q}) \subseteq \pi^{-1}(W \times I_\gamma^\mathbb{Q}) \subseteq \pi^{-1}(\pi(U^\mathbb{Q})) = U^\mathbb{Q}$ perché $U^\mathbb{Q}$ è π-saturo, e ricordiamo che $\pi_2^{-1}(I_\gamma^\mathbb{Q}) = I_\gamma^\mathbb{Q}$. Chiaramente $\pi_1^{-1}(W)$ è un intorno di $\mathbb{Z}_+$, quindi per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ possiamo prendere un intervallo $I_n = (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)$ contenuto in $\pi_1^{-1}(W)$ e inoltre posso prendere questi ε_n in modo che tali intervalli siano disgiunti.
Sia dunque $I_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} I_n$, allora l'insieme $I_\infty \times I_\gamma^\mathbb{Q}$ è contenuto in $U^\mathbb{Q}$.
Questo implica che l'insieme $I_\infty \times I_\gamma$ è contenuto in U, dove $I_\gamma = (-\gamma, \gamma)$, (ora siamo in $\mathbb{R}^2$). Un modo per dimostrare questo è il seguente:
$\overline{I_\infty \times I_\gamma^\mathbb{Q}} = \overline{I_\infty} \times \overline{I_\gamma^\mathbb{Q}} \subseteq \overline{U^\mathbb{Q}} \subseteq \overline{U}$. È facile vedere che $\overline{U} = \bigcup F_n$. Inoltre $I_\infty \times I_\gamma \subseteq (\overline{I_\infty} \times \overline{I_\gamma^\mathbb{Q}})^\circ \subseteq (\overline{U})^\circ$. È facile anche vedere che $(\overline{U})^\circ$ è proprio U, dunque $I_\infty \times I_\gamma$ è contenuto in U.

Osserviamo inoltre che per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ $(n, c_n) \notin U$, dunque $(n, c_n) \notin I_\infty \times I_\gamma$, ma ogni n appartiene all'intervallo I_n, dunque $c_n \notin I_\gamma$. Questo ci dà un assurdo perché $0 \in I_\gamma$ e $0 = \lim_{n \to \infty} c_n$ dunque definitivamente c_n deve appartenere a I_γ.
Dunque π non è identificazione.