• SFERA S^2.

Scelgo le carte $U_1 = S^2 - (0,0,1)$ & $U_2 = S^2 - (0,0,-1)$.

Facendo la proiezione stereografica ho:

La mappa $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\varphi_1((x,y,z)) = \Big(\underbrace{-\frac{x}{z-1}}_{=\frac{x}{1-z}}, \underbrace{-\frac{y}{z-1}}_{=\frac{y}{1-z}}\Big), \qquad (u,v) \longrightarrow \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

è omeomorfismo.

Per quanto riguarda l'altra carta si ha che:

Poiché la retta deve passare per i punti $(u,v,0)$ e $(0,0,-1)$ allora la retta assume la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(1-t)$$

cioè, se $s = 1-t$

~~si ha~~

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}(1-s) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} s$$

SI RISCRIVE COSÌ.

Quindi come prima si ha

$$(1-s)^2(u^2+v^2) + s^2 = 1 \quad \text{da} \quad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

$\Rightarrow$ si ha alla fine

$$x_0 = \frac{2u}{u^2+v^2+1}$$

$$y_0 = \frac{2u}{u^2+v^2+1}$$

$$z_0 = -\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$

Quindi, detto questo, noi abbiamo che l'applicazione

$$\varphi_2 : S^2 - \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1} \right)$$

è l'inversa della mappa $(u,v) \to (x_0, y_0, z_0)$

Ora: il cambio di carte fa sì che

$$(u,v) \longrightarrow \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2} \right).$$

È ben definita la mappa ~~poiché~~ stiamo considerando $S^2 - \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$.

Quindi, facendo la proiezione stereografica da $(0,0,1)$ avrei che
$(0,0,-1) \to (0,0)$

Quindi lo $\vec{0}$ viene escluso, allora $(u,v) \neq (0,0)$.

Questo garantisce la differenziabilità del cambio di carte.

- Ora: In $\mathbb{C}$ diventa più pericoloso. Infatti, se noi volessimo per esempio che il cambio di carte sia olomorfo, non possiamo procedere così, perché avremmo che, se $(u,v) = z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$$z \longrightarrow \frac{1}{\bar{z}} \text{ è il cambio di carte.}$$

Ma questa non è un'applicazione olomorfa.

Come ovviare a questo problema?

Sia $\bar{\varphi}_2 : S^2 - \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{x}{z+1}, -\frac{y}{z+1} \right).$$

$\bar{\varphi}_2 = \psi \circ \varphi_2$ dove $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $\psi((x,y)) = (x,-y)$.

ψ è omeomorfismo,

allora $\bar{\varphi}_2 = \psi \circ \varphi_2$ è o

Quindi $(\bar{U}_2, \bar{\varphi}_2)$

Possiamo vedere però che

$(u,v) \longrightarrow \left(\frac{u}{u^2+v^2} \right.$

$(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$

Ma in $\mathbb{C}$ ~~con~~ vuol dire

Questa è olomorfa. È

ψ è omeomorfismo, φ_2 è omeomorfismo per come abbiamo visto, allora $\bar{\varphi}_2 = \psi \circ \varphi_2$ è omeomorfismo.

Quindi $(\bar{U}_2, \bar{\varphi}_2)$ è una carta.

Possiamo vedere però che questo vuol dire che

$$\underset{\mathbb{R}^2 - \{0\}}{(u,v)} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^2 - \{0\}}{\left(\frac{u}{u^2+v^2}, -\frac{v}{u^2+v^2} \right)}$$

Ma in $\mathbb{C}$ ~~con~~ vuol dire $z \longrightarrow \frac{1}{z}$.

Questa è olomorfa. È il cambio di carte che cercavamo.