VARIETÀ E SOTTOVARIETÀ

Def: Un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ si dice ~~VA~~ SOTTOVARIETÀ DIFFERENZIALE d-dimensionale di $\mathbb{R}^k$ se $\forall m \in M$ esistono:

- Un aperto $U_M \subseteq M$ (di M), con $m \in \overline{U}_M$
- Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^d$
- Un $\boxed{\text{diffeomorfismo}}$ $\varphi: \overline{U}_M \to A$.

Si verifica che sotto queste ipotesi è come dire:

Sia $\mathbb{R}^d_0 = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^d\} \subseteq \mathbb{R}^k$.

Per ogni $m \in M$ esistono:

- $\overline{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto con $m \in \overline{U}$
- $\overline{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto
- $\varphi: \overline{U} \to \overline{V}$ diffeomorfismo tale che

$$\varphi(\overline{U} \cap M) = \overline{V} \cap \mathbb{R}^d_0 = \{x \in \overline{V} : x_i = 0,\ d+1 \leq i \leq k\}.$$

È una definizione equivalente di sottovarietà differenziale.

Osserviamo che nella definizione di sottovarietà le carte sono DIFFEOMORFISMI. Nella definizione di varietà differenziale le carte sono OMEOMORFISMI, con cambi di carte che sono DIFFEOMORFISMI.

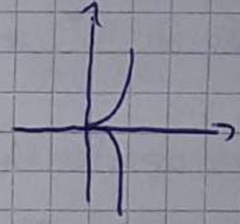
Sotto questa osservazione diciamo che esistono spazi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ che non sono sottovarietà di essa, non ereditano la sua struttura, ma ciò non vieta che abbiano una struttura di varietà differenziale.

↓

ESEMPIO:

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ e consideriamo $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \{(t^2,t^3) : t \in \mathbb{R}\}$, la cuspide.

Dunque, per definizione di sottovarietà data prima, ~~ex perché~~ ~~ex~~ Γ dovrebbe essere localmente luogo di zeri di una funzione $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile (C^1 in realtà) con gradiente non nullo. ~~Infatti~~



Infatti, φ è diffeomorfismo, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ e φ_2 è proprio la F cercata. φ è t.c. J_φ è invertibile, e dunque, $e_2 J_\varphi$ (seconda riga) è non nulla, ma essa è proprio $\nabla \varphi_2$, cioè ∇F. (Questa è un'altra definizione equivalente, si verifica usando il teorema del Dini).

Sia dunque $f(x,y)$ ~~differenziabile~~ C^1, valutata su Γ, e tale che $f|_\Gamma = 0$.

$f|_\Gamma = f(t^2,t^3)$, e $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3)\cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3)\cdot 3t^2$ (derivata totale).

Valutiamo ~~x~~ ∇f in $(0,0)$. Poiché $f|_\Gamma \equiv 0 \Rightarrow$ ~~df/d~~ $\frac{df}{dt} \equiv 0$, e questo per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Sia allora $t \neq 0$. Allora varrà che $2\frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3)t = 0$, e per $t=0$ otteniamo che il limite fa 0, e quindi, per continuità delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Resta il dubbio però su $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Noi abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x(t),y(t+h)) - f(x(t),y(t))}{h}$$

e poiché $\forall t$ vale $0 \Rightarrow$ vale che $\forall t$ $3\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3)t = 0 \to$ se $t \neq 0$ vale $\frac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3) = 0$ e per continuità è proprio ~~≠~~ 0. Dunque (∄ almeno un f) $\nabla f \equiv 0$. Noi volevamo che $\nabla f \neq 0$ per ogni $(x,y) \in U$ intorno di $(0,0)$ per ciò che abbiamo detto sopra, cioè che J_φ deve essere invertibile.

Abbiamo dunque potuto constatare che Γ non è sottovarietà di $\mathbb{R}^2$.

È varietà? Costruisco l'applicazione $t \mapsto (t^2, t^3)$. ~~Questa~~
È un'applicazione continua, iniettiva, suriettiva.
Sia $\varphi(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\varphi(x,y) = \sqrt[3]{y}$. Questa è un'applicazione continua, e ristretta a Γ è proprio l'inversa della mappa di sopra.
Quindi otteniamo un omeomorfismo.
È inoltre varietà C^∞, perché abbiamo un atlante fatto da una sola carta.