Note su esistenza di trascendenti su $\mathbb{Q}$ e criteri di irrazionalità

Guglielmo Nocera

7 luglio 2015

Sommario

Con il fondamentale apporto di Luca Minutillo, Gioacchino Antonelli e Fabio Ferri per la segnalazione di errori e la discussione di numerose questioni.

1 Esistenza di numeri trascendenti

1.1 Prima dimostrazione: trascendenti di Liouville

Teorema 1.1 (Liouville)**.** *Sia α un numero algebrico di grado d. Esiste un numero $c_1 = c_1(\alpha) > 0$ t.c. se $\frac{p}{q} \neq \alpha$ è un numero razionale si ha*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c_1}{q^d}.$$

Dim. Sia $f \in \mathbb{Z}[t]$ di grado $d > 0$ e t.c. $f(\alpha) = 0$. Poiché f è un polinomio (se vogliamo, è lipschitziano sui compatti) esiste $c_2(\alpha) > 0$ t.c.

$$\big|f(x) - f(\alpha)\big| \leq c_2(\alpha)|x - \alpha| \qquad \text{se } |x - \alpha| \leq 1.$$

Ponendo $x = \frac{p}{q}, f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a}{q^d}$ si ottiene

$$\frac{a}{q^d} = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq c_2\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|.$$

Se $a = 0$ esiste un numero finito di possibilità per $\frac{p}{q}$ (in realtà nessuna, se f è irriducibile su $\mathbb{Q}$ ovvero su $\mathbb{Z}$), e quindi si troverà certamente $c_0 > 0$ t.c.

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c_0}{q^d} \qquad \forall\ \frac{p}{q} \in f^{-1}(0).$$

Se $a \neq 0$ lo è anche c_2 e quindi si ottiene

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{c_2 q^d}$$

che ci porta a concludere ponendo $c_1 = \frac{1}{2}\min\{c_0, \frac{1}{c_2}\}$. $\square$

Corollario 1.2. *Se per infiniti n esiste $\dfrac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ t.c.*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}$$

allora a è trascendente.

<u>*Dim.*</u> Osserviamo anzitutto che i q_n devono tendere a $+\infty$. Infatti se fossero limitati da una costante M avremmo, passando all'inf, a destra 0, e a sinistra una differenza della forma $\left|\alpha - \dfrac{P}{M}\right|$ (infatti l'inf del modulo della differenza è realizzato da un certo P, perché il denominatore è limitato). Quindi α sarebbe razionale della forma $\frac{a_n}{q_n}$ (prendendo il minimo comune multiplo per ogni n). Quindi

$$|a_n - p_n| < \frac{1}{q_{n-1}}$$

assurdo perché $0 < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$.
Se α fosse algebrico di grado δ, il teorema di Liouville porterebbe a contraddire la disuguaglianza dell'ipotesi con un n abbastanza grande, cioè t.c.

$$\frac{c_1}{q_n^d} \geq \frac{1}{q_n^n}.$$

Tale n esiste perché i q_n tendono a infinito e la condizione equivale a

$$q_n^{n-d} \geq \frac{1}{c_1}.$$

$\square$

Osservazione 1.1 (Trascendenti di Liouville)**.** Definendo

$$\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \sum_{n=1}^{m} 10^{-n!} + R_m = \frac{a_m}{10^{m!}} + R_m$$

$$\text{con} \qquad 0 < R_m < \frac{2}{10^{(m+1)!}}$$

rientra nelle ipotesi del *Corollario 1.2*, dato che per ogni m esistono $p_m = a_m, q_m = 10^{m!} \geq 1$ t.c.

$$\left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| = R_m < \frac{2}{10^{(m+1)!}} = \frac{2}{q_m^{m+1}} < \frac{1}{q_m^m}.$$

Dunque esistono numeri trascendenti.

Nota 1.3. I trascendenti di Liouville sono più che numerabili ma di misura 0.

Nota 1.4. Non è noto ad oggi se $\pi + e$ sia razionale o meno.

Nota 1.5. $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,999999999992\ldots$ è un esempio di un numero che potrebbe essere ritenuto intero (con sviluppo periodico) fino alla dodicesima cifra decimale.

Problema. A discriminante fissato esiste un numero finito di classi di proporzionalità di forme quadratiche. Ad esempio per $\Delta = -163$ esiste solo $[x^2 + xy + 41y^2]$, e per $|\Delta| > 163$ sono tutte classi vuote. Viceversa, anche il numero di discriminanti con un dato numero di classi è finito.

1.2 Seconda dimostrazione: per cardinalità (Cantor)

Teorema 1.6 (Cantor)**.** *I numeri algebrici su* $\mathbb{Q}$ *hanno cardinalità strettamente minore di* $c = |\mathbb{R}|$.

Dim. I numeri algebrici hanno cardinalità al più pari a quella delle radici di tutti i possibili polinomi a coefficienti razionali. Ma la cardinalità di $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[x]$ è numerabile, e ogni polinomio ha un numero finito di radici, da cui la tesi. □

Corollario 1.7. *Esistono numeri reali non algebrici su* $\mathbb{Q}$.

2 Irrazionalità

2.1 Criterio di irrazionalità per l'esponenziale

Lemma 2.1. $\alpha \in \mathbb{R}$ *è irrazionale se e solo se* $\forall\varepsilon > 0\ \exists p, q$ *interi t.c.*

$$0 < |q\alpha - p| < \varepsilon.$$

Dim.

($\Longleftarrow$) È il caso $d = 1$ del teorema di Liouville. Se $\alpha = \frac{r}{s}, s > 0$,

$$q\alpha - p = \frac{N}{s}$$

per un certo intero N. Prendendo $\varepsilon = \frac{1}{2s}$ si ottiene l'assurdo.

($\Longrightarrow$) Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Consideriamo il sottogruppo di $(\mathbb{R}, +)$ generato da 1 e da α:

$$G = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha.$$

Se G fosse discreto sarebbe ciclico e quindi sarebbe generato da $\beta \neq 0$. Ma siccome $1 \in G$ avremmo che $\beta \in \mathbb{Q}$ e quindi $\alpha \in \mathbb{Q}$, assurdo. Quindi G non è discreto e ha dei punti non isolati: sia $g \in G$ uno di questi punti di accumulazione

$$g = \lim_n x_n,$$

$x_n \in G$ distinti. Poiché siamo in un gruppo neppure 0 è isolato (basta traslare g in $g - g$), e quindi esistono combinazioni a coefficienti interi di 1 e α arbitrariamente vicine a 0, da cui la tesi.

□

Corollario 2.2. *e è irrazionale.*

<u>*Dim.*</u>

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{A_n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{A_n}{n!} + \rho_n$$

dove

$$0 < \rho_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots\right) < \frac{c}{(n+1)!}.$$

Prendendo $q = n!$ e $p = A_n$ si ottiene

$$0 < |qe - p| = n!\rho_n < \frac{c}{n+1} \longrightarrow 0.$$

□

Osservazione 2.1. Il criterio non si applica con la stessa facilità a π, dato che la velocità di convergenza sia di

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

che della serie di Eulero

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

è troppo bassa (nel primo caso è $\frac{c}{n}$).

Neppure nel caso di potenze intere di e il criterio è di facile applicazione: ad esempio in

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \dots = \frac{A_n}{n!} + \rho_n$$

il resto $n-$esimo è t.c.

$$0 < \rho_n < \frac{c2^n}{(n+1)!}$$

$$0 < |n!e^2 - A_n| < \frac{c2^n}{n+1} \longrightarrow +\infty.$$

Un raffinamento del ragionamento seguito può essere il seguente:

Teorema 2.3. *e^2 è irrazionale.*

<u>*Dim.*</u> Le potenze di 2 che compaiono in un generico fattoriale $n!$ sono

$$k_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots = n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \varepsilon_n = n - \varepsilon_n$$

Quindi ponendo

$$n! = 2^{k_n} d_n$$

si ha

$$d_{n-1} | d_n$$

e

$$e^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m-k_m}}{d_m} = \frac{A_n}{d_n} + \rho_n$$

dove

$$\rho_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2^{m-k_m}}{d_m}.$$

Ma poiché $k_m = m - \varepsilon_m$ si ha

$$\rho_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2^{\varepsilon_m}}{d_m}$$

e quindi

$$0 < |d_n e^2 - A_n| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2^{\varepsilon_m}}{d_m} d_n.$$

Ma poiché per $m > n$

$$\frac{d_n}{d_m} = \frac{n!}{m!} 2^{k_m - k_n} = \frac{n!}{m!} 2^{(m-\varepsilon_m)-(n-\varepsilon_n)}$$

si ha che

$$2^{\varepsilon_m} \frac{d_n}{d_m} = \frac{n!}{m!} 2^{(m-n)+\varepsilon_n}.$$

Scegliamo ora n potenza di 2. Evidentemente $\varepsilon_n = 0$, cosicché il termine $m-$esimo della serie è

$$\frac{n!}{m!} 2^{(m-n)} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{m!} 2^{(m-n)} \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{(m-n-1)!} 2^{(m-n-1)} \cdot 2$$

e quindi

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2^{\varepsilon_m}}{d_m} d_n \leq \frac{1}{n+1} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m-n-1)!} 2^{(m-n-1)} \cdot 2 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k)!} = \frac{2e^2}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Teorema 2.4. *Tutte le potenze razionali* $e^{\frac{r}{s}}, r \neq 0$, *sono irrazionali.*

Dim. Basta dimostrarlo per $s = 1, r > 0$, dato che se $e^{\frac{r}{s}}$ è razionale lo è anche e^r. La dimostrazione è di Hermite, il quale pensa di approssimare e^x mediante funzioni razionali, che vanno sotto il nome di *approssimanti di Padé*. "Approssimare nel senso della molteplicità" significa chiedere che la differenza

$$R(x) = Q(x)e^x - P(x) \tag{1}$$

abbia uno zero di molteplicità molto alta nell'origine, per certi $Q_n(x), P_n(x) \in \mathbb{Q}_n[x]$ non entrambi nulli. Vogliamo dunque richiedere che

$$ord_{x=0} R(x) \geq 2n + 1$$

imponendo condizioni sui coefficienti in modo da ottenere un sistema omogeneo di $2n+1$ equazioni in $2n + 2$ incognite: tale sistema ha certamente soluzione, per cui possiamo dire, a priori, che tali approssimanti esistono. Vogliamo dimostrare che sono unici a meno di una costante, e darne in definitiva un'espressione esplicita. Nelle prossime righe compiremo una serie di passaggi che identificheranno univocamente Q_n a meno di una costante, e subito dopo ricaveremo univocamente anche P_n. Osserviamo sin d'ora che i passaggi saranno tutti invertibili, ma non lo mostreremo esplicitamente, anche perché l'esistenza di (P_n, Q_n), come si è detto, ci è assicurata a priori.
Partiamo dunque dalla condizione $R_n(x) = c_n x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$ per un certo c_n.
Ora, poiché $D^{(n+1)} P_n = 0$, deve essere

$$D^{(n+1)} R_n = D^{(n+1)} Q_n e^x = c_n \frac{(2n+1)!}{n!} x^n + \dots$$

(d'ora innanzi, come consuetudine, l'espressione $D^k \dots$ indicherà che viene derivata k volte tutta l'espressione che segue il simbolo di derivazione). In particolare, poiché formalmente $e^x (D + I)^{(n+1)} e^{-x} = D^{(n+1)}$ (si prova per induzione),

$$e^x (D + I)^{(n+1)} Q_n = c_n \frac{(2n+1)!}{n!} x^n + \dots$$

Possiamo del resto normalizzare $c_n = \frac{n!}{(2n+1)!}$ (vale a dire, cercheremo R_n t.c. $c_n =$

$\frac{n!}{(2n+1)!}$).
Moltiplicando l'ultima equazione per e^{-x} si ottiene, visto che e^{-x} come serie formale comincia con 1,

$$(D+I)^{(n+1)}Q_n(x) = x^n + 0$$

(non compaiono più i termini di grado superiore perché Q_n ha grado al più n). Moltiplicando per $(I+D)^{-n-1}$ (intesa come serie formale, come si vedrà subito) si ottiene

$$Q_n(x) = (I+D)^{-n-1}x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n-1}{m} D^{(m)}x^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{-n-1}{m} D^{(m)}x^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{-n-1}{m} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}.$$

ovvero

$$Q_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{-n-1}{m} x^{n-m} \frac{n!}{(n-m)!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!} \binom{n+m}{m} x^{n-m}$$

dato che

$$\binom{-n-1}{m} = \frac{(-n-1)\dots(-n-m)}{n!} = (-1)^m \binom{n+m}{m}.$$

Abbiamo dunque trovato Q_n come richiesto. Inoltre $D^{(n+1)}R_n(x) = x^n e^x$ dato che, come detto sopra,

$$D^{(n+1)}R_n(x) = D^{(n+1)}Q_n(x)e^x = e^x(D+I)^{(n+1)}Q_n(x) = e^x x^n.$$

Ora, si può ricavare univocamente P_n da Q_n: cambiando segno a x e moltiplicando per e^x (scriviamo solo il primo termine dello sviluppo, che è quello rilevante, come si vedrà subito) si ottiene

$$(Q_n(-x)e^{-x} - P_n(-x))e^x = Q_n(-x) - P_n(-x)e^x = R_n(-x)e^x = -c_n x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$P_n(-x)e^x - Q_n(-x) = c_n x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

e poiché l'equazione soddisfatta da $P_n(-x)$ è la stessa di quella soddisfatta da $Q_n(x)$, otteniamo che

$$P_n(x) = Q_n(-x).$$

Abbiamo dunque trovato univocamente l'approssimante (P_n, Q_n) di ordine n. Non solo, i polinomi trovati sono a coefficienti interi: questo ci sarà utile per applicare il criterio di irrazionalità fra poco. Per concludere, calcoliamo una formula significativa per $R_n(x)$:

$$D^n R_n(x) = \int_0^x t^n e^t \, dt$$

$$D^{n-1} R_n(x) = \int_0^x \int_0^u t^n e^t \, dt \, du = \int \int I_{0 \leq t \leq u \leq x} t^n e^t \, dt \, du =$$

$$= \int \int I_{t \leq u \leq x} I_{0 \leq t \leq x} t^n e^t \, dt \, du$$

e invertendo l'ordine di integrazione si ottiene:

$$\int t^n e^t \int I_{t \leq u \leq x} I_{0 \leq t \leq x} \, dt \, du = \int I_{0 \leq t \leq x} t^n e^t \int_t^x \, du \, dt = \int_0^x t^n e^t (x - t) \, dt.$$

Iterando gli stessi passaggi (e ricordando che l'ordine in 0 è $2n+1$ e quindi non ci sono costanti di integrazione):

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x - t)^n t^n e^t \, dt$$

Ma poiché il massimo per l'espressione $(x - t)t$ è raggiunto per $t = \frac{x}{2}$ otteniamo, maggiorando e^t con e^x,

$$0 < |R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} x \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} e^x \longrightarrow^{n \to \infty} 0$$

per ogni x intero non nullo (si verifica con il criterio del rapporto). Si può quindi applicare il criterio di irrazionalità, sempre a patto che x sia intero, dato che anche $P(x)$ e $Q(x)$ saranno interi, e concludere che e^x è irrazionale.

2.2 Irrazionalità di π

$e^{\pi i}$ è razionale. Dimostriamo che $e^{\alpha i} \notin \mathbb{Q}(i)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Basta dimostrare che $e^{si} \notin \mathbb{Q}(i)$ per ogni $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Come sopra, consideriamo

$$R_n(si) = Q_n(si) e^{si} - P_n(si).$$

Sia per assurdo

$$e^{si} = \frac{\alpha}{d}, \ \alpha \in \mathbb{Z}[i], d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Allora $R_n(si)$ starebbe in $\frac{\mathbb{Z}[i]}{d}$ (ricordiamo ancora una volta che P e Q sono a coefficienti interi).
Delle due l'una:

$$(1) \quad R_n(si) = 0$$

$$(2) \quad |R_n(si)| \geq \frac{1}{d}.$$

Escludiamo la seconda:

$$D^{(n+1)} R_n(x) = x^n e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n+m}}{m!}$$

integrando e ricordando che $ord_{x=0} R_n(x) \geq 2n+1$:

$$R_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n+m+n+1}}{(n+m+1)\dots(2n+m+1) \ m!} = x^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!(n+m+1)\dots(2n+m+1)} =$$

$$= \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \frac{1}{n+m+1} \frac{2}{n+m+2} \cdots \frac{n+1}{2n+m+1}.$$

Quindi, maggiorando con 1 tutte le frazioni, si ottiene che

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \longrightarrow^{n \to \infty} 0$$

per ogni x, il che esclude (2) per ogni n abbastanza grande. Premesso che

$$R_n'(x) = (Q_n(x) + Q_n'(x))e^x - P_n'(x) = O(x^{2n})$$

$$Q_n e^x - P_n = O(x^{2n+1})$$

consideriamo il determinante polinomiale (cioè funzione polinomiale di x)

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q_n & P_n \\ Q_n + Q_n' & P_n' \end{vmatrix}$$

$$\Delta e^x = \begin{vmatrix} Q_n e^x & P_n \\ (Q_n + Q_n')e^x & P_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_n & P_n \\ R_n' & P_n' \end{vmatrix}$$

che è un wronskiano.
Ora, se $\Delta = 0$ allora R_n e P_n sono dipendenti (Teorema di Wronski), cioè e^x dovrebbe

essere una funzione razionale (falso: basta mandare x a $\pm\infty$).[1] Altrimenti, $\deg\Delta \le 2n$. Inoltre Δe^x si annulla in 0 con ordine almeno $2n$, quindi, essendo Δ un polinomio, deve essere

$$\Delta = cx^{2n}$$

per una certa costante $c \neq 0$. Osserviamo ora che ancora una volta, per s intero,

$$(1) \quad R_n'(si) = 0$$

$$(2) \quad |R_n'(si)| \ge \frac{1}{d}.$$

Con calcoli analoghi a quelli fatti su R_n, del resto, si esclude la (2). Quindi abbiamo $R_n(si) = R_n'(si) = 0$ per s intero. Ma ciò è assurdo, perché darebbe $\Delta(si)e^{si} = 0$, ovvero $\Delta(si) = 0$, vale a dire $c\ (si)^{2n} = 0$ impossibile se $s \neq 0$.

2.2.1 Variante dimostrativa

Un altro modo di dimostrare che $R_n(si) \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ è scrivere una formula asintotica per $R_n(x)$. Riscriviamo la formula precedentemente ottenuta come:

$$R_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\frac{1}{n+m+1}\cdots\frac{n+1}{2n+m+1} = \frac{x^{2n+1}n!}{(2n+1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\frac{n+1}{n+m+1}\cdots\frac{2n+1}{2n+m+1}.$$

Detto

$$C_{m,n} = \frac{n+1}{n+m+1}\cdots\frac{2n+1}{2n+m+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} C_{m,n} = \lim_n \frac{(n+1)\dots(n+m)\cancel{(n+m+1)\dots\dots(2n+1)}}{\cancel{(n+m+1)\dots\dots(2n+1)}(2n+2)(2n+m+1)} = \lim_n \frac{n+1}{2n+2}\cdots\frac{n+m}{2n+m+1}$$

e ora il numero di termini è fissato m ed ogni rapporto tende a $\frac{1}{2}$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} C_{m,n} = \frac{1}{2^m}.$$

Si conclude che

$$\frac{R_n(x)(2n+1)!}{x^{2n+1}\ n!} = \sum_{m=0}^{M} C_{m,n}\frac{x^m}{m!} + \rho$$

dove

$$|\rho| \le \sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{|x|^m}{m!}.$$

[1] In realtà nel caso presente l'opzione $\Delta = 0$ si esclude anche più facilmente. Infatti

$$0 = \Delta = Q_nP_n' - P_nQ_n' + Q_nP_n$$

ma allora se Q_n e P_n hanno grado n anche Δ ha un termine non nullo di grado n, assurdo.

Per $x = si$ fissato prendo M t.c. $|\rho| < \varepsilon$ e concludo, dato che per n, M abbastanza grandi la quantità
$$\sum_{m=0}^{M} C_{m,n} \frac{x^m}{m!}$$
può essere portata arbitrariamente vicina a $e^{\frac{si}{2}}$, $|e^{\frac{si}{2}}| = 1 > 0$. Infatti ad n fissato le serie
$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{m,n} \frac{x^m}{m!} = e^{\frac{x}{2}}$$
convergono uniformemente su $\mathbb{C}$, dato che $|C_m| \leq 1$, e dunque
$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(x)(2n+1)!}{x^{2n+1}n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,n} \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} C_{m,n} \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{2^m m!} = e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{si}{2}}.$$
Quindi esiste n t.c. $\dfrac{R_n(si)(2n+1)!}{(si)^{2n+1}\, n!} \neq 0$ (perché vicino ad $e^{\frac{si}{2}} \neq 0$), ovvero $R_n(si) \neq 0$.