Teorema di irriducibilità di Bertini

Un bound sulla dimensione del luogo eccezionale

Davide Gori

Scuola Normale Superiore

14 maggio 2020

Teorema di Bertini classico

Sia X una varietà proiettiva liscia di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Esiste H iperpiano di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ tale che $X \not\subset H$ e $H \cap X$ sia una varietà liscia.
Inoltre l'insieme di iperpiani che soddisfa tale proprietà è un aperto denso nella topologia di Zariski di $\hat{\mathbb{P}}^n_{\mathbb{C}}$.

Dove con $\hat{\mathbb{P}}^n_{\mathbb{C}}$ si intende lo spazio duale del proiettivo, i cui punti definiscono gli iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Teorema di Bertini classico

Teorema di Bertini classico

Sia X una varietà proiettiva liscia di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Esiste H iperpiano di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ tale che $X \not\subset H$ e $H \cap X$ sia una varietà liscia.
Inoltre l'insieme di iperpiani che soddisfa tale proprietà è un aperto denso nella topologia di Zariski di $\hat{\mathbb{P}}^n_{\mathbb{C}}$.

Dove con $\hat{\mathbb{P}}^n_{\mathbb{C}}$ si intende lo spazio duale del proiettivo, i cui punti definiscono gli iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Osservazione

Il teorema afferma che l'intersezione di una varietà proiettiva liscia con un iperpiano generico è liscia.

Varietà algebriche e topologia di Zarski

Diamo una idea di varietà algebrica, che non è corretta ma rende l'idea. Dati f_i con $1 \leq i \leq j$ polinomi di $k[x_1, \cdots, x_n]$, possiamo pensare alla varietà definita da questi come l'insieme dei punti che sono soluzione per tutti gli f_i.

Varietà algebriche e topologia di Zarski

Diamo una idea di varietà algebrica, che non è corretta ma rende l'idea. Dati f_i con $1 \leq i \leq j$ polinomi di $k[x_1, \cdots, x_n]$, possiamo pensare alla varietà definita da questi come l'insieme dei punti che sono soluzione per tutti gli f_i.
Si ha una bigezione:

$(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow$ ideali massimali della forma $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ di $\frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{(f_1,\ldots f_j)}$

Varietà algebriche e topologia di Zarski

Diamo una idea di varietà algebrica, che non è corretta ma rende l'idea. Dati f_i con $1 \leq i \leq j$ polinomi di $k[x_1, \cdots, x_n]$, possiamo pensare alla varietà definita da questi come l'insieme dei punti che sono soluzione per tutti gli f_i.
Si ha una bigezione:

$(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow$ ideali massimali della forma $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ di $\frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{(f_1, \ldots f_j)}$

In questo senso la varietà definita dagli f_i è determinata da $\frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{(f_1, \cdots f_j)}$.

Varietà algebriche e topologia di Zarski

Diamo una idea di varietà algebrica, che non è corretta ma rende l'idea. Dati f_i con $1 \leq i \leq j$ polinomi di $k[x_1, \cdots, x_n]$, possiamo pensare alla varietà definita da questi come l'insieme dei punti che sono soluzione per tutti gli f_i.
Si ha una bigezione:

$$(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow \text{ideali massimali della forma } (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \text{ di } \frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{(f_1,\ldots f_j)}$$

In questo senso la varietà definita dagli f_i è determinata da $\frac{k[x_1,\cdots,x_n]}{(f_1,\cdots f_j)}$.
Una varietà proiettiva è definita in modo analogo, con gli f_i omogenei, in questo caso possiamo pensare alle soluzioni nel proiettivo.

Varietà algebriche e topologia di Zarski

Diamo una idea di varietà algebrica, che non è corretta ma rende l'idea. Dati f_i con $1 \leq i \leq j$ polinomi di $k[x_1, \cdots, x_n]$, possiamo pensare alla varietà definita da questi come l'insieme dei punti che sono soluzione per tutti gli f_i.

Si ha una bigezione:

$(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow$ ideali massimali della forma $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ di $\frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{(f_1,\ldots f_j)}$

In questo senso la varietà definita dagli f_i è determinata da $\frac{k[x_1,\cdots,x_n]}{(f_1,\cdots f_j)}$.
Una varietà proiettiva è definita in modo analogo, con gli f_i omogenei, in questo caso possiamo pensare alle soluzioni nel proiettivo.

In questo senso possiamo definire la topologia di Zariski di $k[x_1, \cdots, x_n]$ come la topologia su k^n in cui i chiusi sono le varietà algebriche di $k[x_1, \cdots, x_n]$

Teoremi di Bertini

Teorema di Bertini

Sia X una varietà proiettiva liscia di $\mathbb{P}_k^n$ con k algebricamente chiuso. Esiste H iperpiano di $\mathbb{P}_k^n$ tale che $X \not\subset H$ e $H \cap X$ sia una varietà liscia. Inoltre l'insieme di iperpiani che soddisfa tale proprietà è un aperto denso nella topologia di Zariski di $\hat{\mathbb{P}}_k^n$.

Teoremi di Bertini

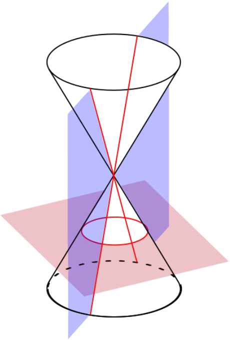
Teorema di Bertini

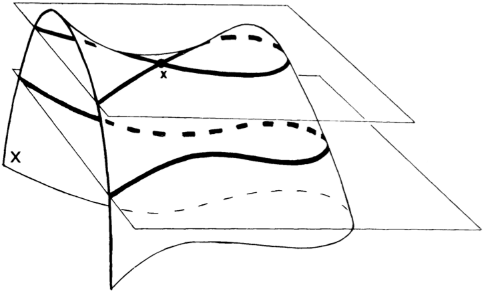
Sia X una varietà proiettiva liscia di $\mathbb{P}^n_k$ con k algebricamente chiuso. Esiste H iperpiano di $\mathbb{P}^n_k$ tale che $X \not\subset H$ e $H \cap X$ sia una varietà liscia. Inoltre l'insieme di iperpiani che soddisfa tale proprietà è un aperto denso nella topologia di Zariski di $\hat{\mathbb{P}}^n_k$.

Teorema di irriducibilità di Bertini

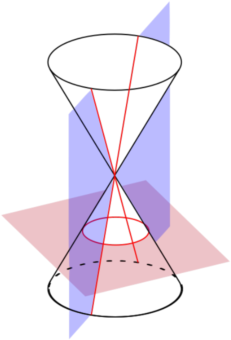
Sia X una varietà proiettiva irriducibile di $\mathbb{P}^n_k$ con $\dim X \geq 2$ e k algebricamente chiuso, di caratteristica 0. Esiste H iperpiano di $\mathbb{P}^n_k$ tale che $X \not\subset H$ e $H \cap X$ sia irriducibile.
Inoltre l'insieme di iperpiani che soddisfa tale proprietà contiene un aperto denso nella topologia di Zariski di $\hat{\mathbb{P}}^n_k$.

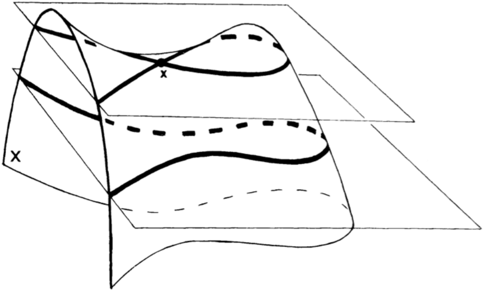
Esempio visivo





Esempio visivo





Classicamente la dimostrazione si fa mostrando che il luogo di iperpiani che non soddisfano la tesi è un chiuso che non è tutto $\hat{\mathbb{P}}^n$. Il complementare risulta l'aperto denso cercato.

Cambio di base e L-punti

Esempio

$\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2}$ definisce una varietà su $\mathbb{R}$, possiamo fare un cambio di coefficienti tensorizzando l'anello con $\mathbb{C}$, la mappa $s_{\mathbb{C}}$ definirà una nuova varietà su $\mathbb{C}$.

Cambio di base e L-punti

Esempio

$\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2}$ definisce una varietà su $\mathbb{R}$, possiamo fare un cambio di coefficienti tensorizzando l'anello con $\mathbb{C}$, la mappa $s_{\mathbb{C}}$ definirà una nuova varietà su $\mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd} \frac{\mathbb{C}[X,Y]}{X^2+Y^2} = \frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \mathbb{C} \arrow[l, "s_{\mathbb{C}}"'] \\ \frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2} \arrow[u] & \mathbb{R} \arrow[l, "s"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Cambio di base attraverso la mappa $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Cambio di base e L-punti

Esempio

$\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2}$ definisce una varietà su $\mathbb{R}$, possiamo fare un cambio di coefficienti tensorizzando l'anello con $\mathbb{C}$, la mappa $s_{\mathbb{C}}$ definirà una nuova varietà su $\mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathbb{C}[X,Y]}{X^2+Y^2} = \frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \mathbb{C} \arrow[l, "s_{\mathbb{C}}"'] \\
\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2} \arrow[u] & \mathbb{R} \arrow[l, "s"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Cambio di base attraverso la mappa $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Definizione (L-punti)

Sia V su k, dato $L \supset k$, gli L-punti sono i punti della varietà V_L su L. Si possono pensare come le soluzioni nel campo L dei polinomi che definiscono la varietà.

Geometricamente irriducibile

Definizione (Irriducibilità geometrica)

Una varietà V su k si dice geometricamente irriducibile se per ogni $L \supset k$ estensione si ha che V_L, definita come il cambio di coefficienti della varietà V, risulta irriducibile.

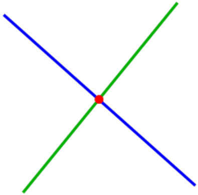
Geometricamente irriducibile

Definizione (Irriducibilità geometrica)

Una varietà V su k si dice geometricamente irriducibile se per ogni $L \supset k$ estensione si ha che V_L, definita come il cambio di coefficienti della varietà V, risulta irriducibile.

Vediamo un esempio:

$\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2}$, questa è irriducibile, ma non è geometricamente irriducibile: cambiando base con $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ il polinomio $X^2 + Y^2$ risulta riducibile.



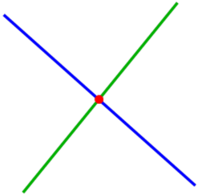
Geometricamente irriducibile

Definizione (Irriducibilità geometrica)

Una varietà V su k si dice geometricamente irriducibile se per ogni $L \supset k$ estensione si ha che V_L, definita come il cambio di coefficienti della varietà V, risulta irriducibile.

Vediamo un esempio:

$\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{X^2+Y^2}$, questa è irriducibile, ma non è geometricamente irriducibile: cambiando base con $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ il polinomio $X^2 + Y^2$ risulta riducibile.



Proposizione

Per verificare l'irriducibilità geometrica è sufficiente verificarla per il cambio base con la chiusura algebrica di k.

Recenti miglioramenti del teorema di irriducibilità di Bertini

Teorema (Benoist, 2011)

Sia X una varietà proiettiva geometricamente irriducibile in $\mathbb{P}^n_k$. Sia $\mathcal{M}_{bad} \subset \hat{\mathbb{P}}^n_k$ il luogo di iperpiani tali che $H \cap X$ non sia geometricamente irriducibile, allora $\mathcal{M}_{bad}$ è costruibile e vale che $\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} X + 1$.

Recenti miglioramenti del teorema di irriducibilità di Bertini

Teorema (Benoist, 2011)

Sia X una varietà proiettiva geometricamente irriducibile in $\mathbb{P}^n_k$. Sia $\mathcal{M}_{bad} \subset \hat{\mathbb{P}}^n_k$ il luogo di iperpiani tali che $H \cap X$ non sia geometricamente irriducibile, allora $\mathcal{M}_{bad}$ è costruibile e vale che $\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} X + 1$.

È possibile generalizzare il risultato:

Teorema (Poonen-Slavov, 2020)

Sia X una varietà geometricamente irriducibile, sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ tale che le fibre non vuote abbiano la stessa dimensione. Sia $\mathcal{M}_{bad} \subset \hat{\mathbb{P}}^n_k$ il luogo di iperpiani tali che $\phi^{-1}H$ non sia geometricamente irriducibile, allora $\mathcal{M}_{bad}$ è costruibile e vale che $\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$.

Primi esempi

Esempio (il bound non può essere raffinato)

Consideriamo la proiezione lineare $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ con $m \leq n$. Sia C una curva in $\mathbb{P}^m$ di grado almeno 2. Gli iperpiani in $\mathbb{P}^m$ tali che $H \cap C$ non è irriducibile sono un aperto, di dimensione m.
Poniamo X la chiusura della preimmagine di C, si avrà che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \geq m = \operatorname{codim} X + 1$$

Primi esempi

Esempio (il bound non può essere raffinato)

Consideriamo la proiezione lineare $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ con $m \leq n$. Sia C una curva in $\mathbb{P}^m$ di grado almeno 2. Gli iperpiani in $\mathbb{P}^m$ tali che $H \cap C$ non è irriducibile sono un aperto, di dimensione m.
Poniamo X la chiusura della preimmagine di C, si avrà che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \geq m = \operatorname{codim} X + 1$$

Esempio (L'ipotesi sulla dimensione delle fibre è necessaria)

Sia $\phi : \widetilde{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ il blow-up di un sottospazio lineare $L \subset \mathbb{P}^n$. Gli iperpiani $L \subset H$ appartengono a $\mathcal{M}_{bad}$ e hanno dimensione $\operatorname{codim} L - 1$. Se la tesi valesse:

$$\operatorname{codim} L - 1 \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1 = 1$$

Insiemi costruibili

Diamo la definizione nel caso di varietà:

Definizione (Insieme costruibile)

I sottoinsiemi costruibili sono il più piccolo sottoinsieme delle parti di X che contiene gli aperti e che sia chiuso per complementare e unione finita.

Insiemi costruibili

Diamo la definizione nel caso di varietà:

Definizione (Insieme costruibile)

I sottoinsiemi costruibili sono il più piccolo sottoinsieme delle parti di X che contiene gli aperti e che sia chiuso per complementare e unione finita.

Si ricava facilmente che:

Un insieme è costruibile se si può scrivere come **unione finita di insiemi localmente chiusi disgiunti.**

Proprietà e insiemi costruibili

Dato un morfismo $X \longrightarrow S$ possiamo chiederci quale sia il luogo dei punti di S tali che la fibra $f^{-1}(s) := X_s$, dotata della sua struttura $X_s \longrightarrow \operatorname{Spec} k(s)$ abbia una determinata proprietà.

Proprietà e insiemi costruibili

Dato un morfismo $X \longrightarrow S$ possiamo chiederci quale sia il luogo dei punti di S tali che la fibra $f^{-1}(s) := X_s$, dotata della sua struttura $X_s \longrightarrow \operatorname{Spec} k(s)$ abbia una determinata proprietà.

Definizione (Proprietà costruibile)

Sia $P(Z, k)$ una proprietà della varietà Z su k. P si dice costruibile se, fornita una qualsiasi mappa $X \longrightarrow S$, l'insieme

$$E_P = \{s \in S | P(X_s, k(s)) \text{ è verificata } \}$$

risulta costruibile.

Proprietà e insiemi costruibili

Dato un morfismo $X \longrightarrow S$ possiamo chiederci quale sia il luogo dei punti di S tali che la fibra $f^{-1}(s) := X_s$, dotata della sua struttura $X_s \longrightarrow \operatorname{Spec} k(s)$ abbia una determinata proprietà.

Definizione (Proprietà costruibile)

Sia $P(Z, k)$ una proprietà della varietà Z su k. P si dice costruibile se, fornita una qualsiasi mappa $X \longrightarrow S$, l'insieme

$$E_P = \{s \in S | P(X_s, k(s)) \text{ è verificata } \}$$

risulta costruibile.

Esempi di proprietà che soddisfano sono:

- geometricamente irriducibile
- $\dim Z \in \Phi$ con $\Phi \subset \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

$\mathcal{M}_{bad}$ è costruibile

Costruiamo il prodotto fibrato $X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k$ (che possiamo pensare come varietà di punti).

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] & X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \hat{\mathbb{P}}^n_k \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_{bad}$ è costruibile

Costruiamo il prodotto fibrato $X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k$ (che possiamo pensare come varietà di punti).

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{i} & X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k & \xrightarrow{p} & \hat{\mathbb{P}}^n_k \\ & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k \end{array}$$

Possiamo a livello intuitivo pensare a M come l'unica sottovarietà chiusa ridotta di $X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k$ i cui punti chiusi siano le coppie (x, H) con $\phi(x) \in H$ (varietà di incidenza).

$\mathcal{M}_{bad}$ è costruibile

Costruiamo il prodotto fibrato $X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k$ (che possiamo pensare come varietà di punti).

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{i} & X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k & \xrightarrow{p} & \hat{\mathbb{P}}^n_k \\ & & \Big\downarrow q & & \Big\downarrow \\ & & X & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k \end{array}$$

Possiamo a livello intuitivo pensare a M come l'unica sottovarietà chiusa ridotta di $X \times_k \hat{\mathbb{P}}^n_k$ i cui punti chiusi siano le coppie (x, H) con $\phi(x) \in H$ (varietà di incidenza).

$$\psi = p \circ i : M \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^n_k$$

Abbiamo che $\phi^{-1}H$ è isomorfo alla fibra di H rispetto a ψ, quindi $\mathcal{M}_{bad}$, è costruibile.

Strategia della dimostrazione del teorema

Teorema (Poonen-Slavov, 2020)

Sia X una varietà geometricamente irriducibile, sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ tale che le fibre non vuote abbiano la stessa dimensione. Vale che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$$

La dimostrazione sarà divisa in due parti principali:

Strategia della dimostrazione del teorema

Teorema (Poonen-Slavov, 2020)

Sia X una varietà geometricamente irriducibile, sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$ tale che le fibre non vuote abbiano la stessa dimensione. Vale che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$$

La dimostrazione sarà divisa in due parti principali:

1. **Dimostrazione per il caso k finito:**

Strategia della dimostrazione del teorema

Teorema (Poonen-Slavov, 2020)

Sia X una varietà geometricamente irriducibile, sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ tale che le fibre non vuote abbiano la stessa dimensione. Vale che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$$

La dimostrazione sarà divisa in due parti principali:

1. **Dimostrazione per il caso k finito:**
   - Il lemma di Lang-Weil ci permetterà di legare la quantità di $\mathbb{F}_q$-punti di una varietà alla sua dimensione.

Strategia della dimostrazione del teorema

Teorema (Poonen-Slavov, 2020)

Sia X una varietà geometricamente irriducibile, sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ tale che le fibre non vuote abbiano la stessa dimensione. Vale che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$$

La dimostrazione sarà divisa in due parti principali:

1. **Dimostrazione per il caso k finito:**
   - Il lemma di Lang-Weil ci permetterà di legare la quantità di $\mathbb{F}_q$-punti di una varietà alla sua dimensione.
   - Con questo spirito stimeremo la quantità di particolari $\mathbb{F}_q$-punti di $\hat{\mathbb{P}}^n$.

Strategia della dimostrazione del teorema

Teorema (Poonen-Slavov, 2020)

Sia X una varietà geometricamente irriducibile, sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ tale che le fibre non vuote abbiano la stessa dimensione. Vale che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$$

La dimostrazione sarà divisa in due parti principali:

1. **Dimostrazione per il caso k finito:**
   - Il lemma di Lang-Weil ci permetterà di legare la quantità di $\mathbb{F}_q$-punti di una varietà alla sua dimensione.
   - Con questo spirito stimeremo la quantità di particolari $\mathbb{F}_q$-punti di $\hat{\mathbb{P}}^n$.
   - Usando un argomento di probabilità elementare riusciremo a trovare un bound.

Strategia della dimostrazione del teorema

Teorema (Poonen-Slavov, 2020)

Sia X una varietà geometricamente irriducibile, sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ tale che le fibre non vuote abbiano la stessa dimensione. Vale che:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$$

La dimostrazione sarà divisa in due parti principali:

1. **Dimostrazione per il caso k finito:**
   - Il lemma di Lang-Weil ci permetterà di legare la quantità di $\mathbb{F}_q$-punti di una varietà alla sua dimensione.
   - Con questo spirito stimeremo la quantità di particolari $\mathbb{F}_q$-punti di $\hat{\mathbb{P}}^n$.
   - Usando un argomento di probabilità elementare riusciremo a trovare un bound.
2. **Riduzione al caso k finito**:
   Questo punto è più tecnico.
   Useremo le nozioni sulle proprietà costruibili, con un argomento di densità ci ridurremo al caso k finito.

Bound sui punti di varietà su campi finiti

Per questa parte lavoreremo solo su campi finiti, di caratteristica fissata $p > 0$.
Il numero di $\mathbb{F}_q$-punti di una varietà è intrinsecamente legato alla dimensione, dalla seguente stima molto intuitiva:

Bound sui punti di varietà su campi finiti

Per questa parte lavoreremo solo su campi finiti, di caratteristica fissata $p > 0$.
Il numero di $\mathbb{F}_q$-punti di una varietà è intrinsecamente legato alla dimensione, dalla seguente stima molto intuitiva:

Lemma

Sia V una varietà su F, e dimensione r, si ha che:

$$|V(\mathbb{F}_q)| = O(q^r)$$

Lang-Weil bound

Possiamo affinare il risultato in questo modo:

Teorema (Lang-Weil bound 1)

Sia V una varietà geometricamente irriducibile su F di dimensione r, si ha che:

$$|V(\mathbb{F}_q)| = q^r + O(q^{r-1/2})$$

Lang-Weil bound

Possiamo affinare il risultato in questo modo:

Teorema (Lang-Weil bound 1)

Sia V una varietà geometricamente irriducibile su F di dimensione r, si ha che:

$$|V(\mathbb{F}_q)| = q^r + O(q^{r-1/2})$$

Più generalmente si può facilmente dedurre che:

Teorema (Lang-Weil bound 2)

Sia V una varietà su F di dimensione r. Sia a il numero di componenti irriducibili di dimensione r che lo sono anche geometricamente, si ha che:

$$|V(\mathbb{F}_q)| = aq^r + O(q^{r-1/2})$$

Iperpiani molto brutti

Data $\phi : X \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^n$, siamo interessati a contare i seguenti:

Definizione (Iperpiani molto brutti)

Diciamo che $H \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ è un *iperpiano molto brutto* se $\phi^{-1}H$ ha un numero diverso da 1 di componenti irriducibili che lo sono anche geometricamente.

Iperpiani molto brutti

Data $\phi : X \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^n$, siamo interessati a contare i seguenti:

Definizione (Iperpiani molto brutti)

Diciamo che $H \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ è un *iperpiano molto brutto* se $\phi^{-1}H$ ha un numero diverso da 1 di componenti irriducibili che lo sono anche geometricamente.

Consideriamo l'applicazione $\psi : M \longrightarrow \hat{\mathbb{P}^n}$ (dove M è la varietà di incidenza definita prima): l'irriducibilità di $\phi^{-1}H$ si può quindi pensare come l'irriducibilità della fibra di un punto di tale applicazione.

Definizione (Punti molto brutti)

Data $f : V \longrightarrow B$, diciamo che $x \in B(\mathbb{F}_q)$ è molto brutto se $f^{-1}(x)$ ha un numero diverso da 1 di $\mathbb{F}_q$-componenti irriducibili che lo sono anche geometricamente.

Le seguenti proposizioni ci daranno i due bound voluti:

Proposizione

Sia X una varietà su F, geometricamente irriducibile e sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_F$ le cui fibre non vuote hanno la stessa dimensione. Il numero di iperpiani in $\hat{\mathbb{P}}^n(\mathbb{F}_q)$ molto brutti è $O(q^{codim \phi(X)+1})$.

Le seguenti proposizioni ci daranno i due bound voluti:

Proposizione

Sia X una varietà su F, geometricamente irriducibile e sia $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_F$ le cui fibre non vuote hanno la stessa dimensione. Il numero di iperpiani in $\hat{\mathbb{P}}^n(\mathbb{F}_q)$ molto brutti è $O(q^{codim \phi(X)+1})$.

Lemma

Sia $f : V \longrightarrow B$ un morfismo di varietà su un campo finito F. Supponiamo che B sia irriducibile e che la fibra generica di f non sia geometricamente irriducibile. Esiste $c > 0$ e estensioni di campo $\mathbb{F}_q \supset F$ arbitrariamente grandi, tali che $B(\mathbb{F}_q)$ contiene almeno $cq^{\dim B}$ punti molto brutti.

Concludiamo la dimostrazione

- Sia B una varietà contenuta in $\mathcal{M}_{bad}$, tale che $\dim B = \dim \mathcal{M}_{bad}$ consideriamo $\psi^{-1}(B) \longrightarrow B$ come restrizione della mappa $\psi : M \longrightarrow \hat{\mathbb{P}^n}$.

Concludiamo la dimostrazione

- Sia B una varietà contenuta in $\mathcal{M}_{bad}$, tale che $\dim B = \dim \mathcal{M}_{bad}$ consideriamo $\psi^{-1}(B) \longrightarrow B$ come restrizione della mappa $\psi : M \longrightarrow \hat{\mathbb{P}^n}$.
- Gli $\mathbb{F}_q$ punti di B molto brutti sono iperipani molto brutti di $\hat{\mathbb{P}}^n(\mathbb{F}_q)$, che quindi sono almeno $cq^{\dim B}$.

Concludiamo la dimostrazione

- Sia B una varietà contenuta in $\mathcal{M}_{bad}$, tale che $\dim B = \dim \mathcal{M}_{bad}$ consideriamo $\psi^{-1}(B) \longrightarrow B$ come restrizione della mappa $\psi : M \longrightarrow \hat{\mathbb{P}^n}$.
- Gli $\mathbb{F}_q$ punti di B molto brutti sono iperipani molto brutti di $\hat{\mathbb{P}}^n(\mathbb{F}_q)$, che quindi sono almeno $cq^{\dim B}$.
- Si ha quindi che:

$$O(q^{\operatorname{codim} \phi(X)+1}) \geq cq^{\dim B} = cq^{\dim \mathcal{M}_{bad}}$$

Per q arbitrariamente grandi.

Concludiamo la dimostrazione

- Sia B una varietà contenuta in $\mathcal{M}_{bad}$, tale che $\dim B = \dim \mathcal{M}_{bad}$ consideriamo $\psi^{-1}(B) \longrightarrow B$ come restrizione della mappa $\psi : M \longrightarrow \hat{\mathbb{P}^n}$.
- Gli $\mathbb{F}_q$ punti di B molto brutti sono iperipani molto brutti di $\hat{\mathbb{P}}^n(\mathbb{F}_q)$, che quindi sono almeno $cq^{\dim B}$.
- Si ha quindi che:

$$O(q^{\operatorname{codim} \phi(X)+1}) \geq cq^{\dim B} = cq^{\dim \mathcal{M}_{bad}}$$

  Per q arbitrariamente grandi.
- Da cui la tesi:

$$\dim \mathcal{M}_{bad} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$$

Stima sul numero di punti sulla fibra di un iperpiano

Consideriamo la mappa ϕ , questa induce una mappa tra gli $\mathbb{F}_q$-punti $X(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.

Stima sul numero di punti sulla fibra di un iperpiano

Consideriamo la mappa ϕ , questa induce una mappa tra gli $\mathbb{F}_q$-punti
$X(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
Sia $f : Y \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ mappa di insiemi.

Stima sul numero di punti sulla fibra di un iperpiano

Consideriamo la mappa ϕ , questa induce una mappa tra gli $\mathbb{F}_q$-punti $X(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
Sia $f : Y \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ mappa di insiemi.
Consideriamo la variabile aleatoria $Z : \hat{\mathbb{P}^n}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{N}$ che associa un iperpiano aleatorio H a $|f^{-1}H|$ (cioè la cardinalità della controimmagine).
Vogliamo dare una stima della varianza e media.

Stima sul numero di punti sulla fibra di un iperpiano

Consideriamo la mappa ϕ , questa induce una mappa tra gli $\mathbb{F}_q$-punti $X(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
Sia $f : Y \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ mappa di insiemi.
Consideriamo la variabile aleatoria $Z : \hat{\mathbb{P}^n}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{N}$ che associa un iperpiano aleatorio H a $|f^{-1}H|$ (cioè la cardinalità della controimmagine).
Vogliamo dare una stima della varianza e media.

Lemma

Sia f come sopra e sia $f^{-1}(x) \leq s$ per ogni $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$. Abbiamo i seguenti valori per media e varianza della variabile aleatoria Z:

$$\mu = |Y| \left(q^{-1} + O(q^{-2})\right)$$

$$\sigma^2 = O\left(|f(Y)| s^2 q^{-1}\right)$$

Stima sul numero di punti sulla fibra di un iperpiano

Consideriamo la mappa ϕ , questa induce una mappa tra gli $\mathbb{F}_q$-punti $X(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
Sia $f : Y \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ mappa di insiemi.
Consideriamo la variabile aleatoria $Z : \hat{\mathbb{P}^n}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{N}$ che associa un iperpiano aleatorio H a $|f^{-1}H|$ (cioè la cardinalità della controimmagine).
Vogliamo dare una stima della varianza e media.

Lemma

Sia f come sopra e sia $f^{-1}(x) \leq s$ per ogni $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$. Abbiamo i seguenti valori per media e varianza della variabile aleatoria Z:

$$\mu = |Y| \left(q^{-1} + O(q^{-2})\right)$$

$$\sigma^2 = O\left(|f(Y)| s^2 q^{-1}\right)$$

La stima è facilmente ricavabile grazie a della combinatoria elementare.

Iperpiani molto brutti

Consideriamo ora la mappa $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a fibre costanti e con X geometricamente irriducibile. Poniamo $r = \dim X$.

Iperpiani molto brutti

Consideriamo ora la mappa $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a fibre costanti e con X geometricamente irriducibile. Poniamo $r = \dim X$.
Grazie a quanto appena visto si ha:

$$\mu = q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$$

Iperpiani molto brutti

Consideriamo ora la mappa $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a fibre costanti e con X geometricamente irriducibile. Poniamo $r = \dim X$.
Grazie a quanto appena visto si ha:

$$\mu = q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$$

La stima di Lang-Weil afferma $|\phi^{-1}H| = aq^{r-1} + O(q^{r-3/2})$.

Iperpiani molto brutti

Consideriamo ora la mappa $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a fibre costanti e con X geometricamente irriducibile. Poniamo $r = \dim X$.
Grazie a quanto appena visto si ha:

$$\mu = q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$$

La stima di Lang-Weil afferma $|\phi^{-1}H| = aq^{r-1} + O(q^{r-3/2})$.

Se H è molto brutto abbiamo quindi che $|\phi^{-1}H|$ è $O(q^{r-3/2})$ oppure almeno $2q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$.

Iperpiani molto brutti

Consideriamo ora la mappa $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a fibre costanti e con X geometricamente irriducibile. Poniamo $r = \dim X$.
Grazie a quanto appena visto si ha:

$$\mu = q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$$

La stima di Lang-Weil afferma $|\phi^{-1}H| = aq^{r-1} + O(q^{r-3/2})$.

Se H è molto brutto abbiamo quindi che $|\phi^{-1}H|$ è $O(q^{r-3/2})$ oppure almeno $2q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$.

Osservazione

I punti della fibra di questi iperpiani si discostano molto dalla media. Posso stimarli usando la disuguaglianza di Chebyshev.

Iperpiani molto brutti

Consideriamo ora la mappa $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a fibre costanti e con X geometricamente irriducibile. Poniamo $r = \dim X$.
Grazie a quanto appena visto si ha:

$$\mu = q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$$

La stima di Lang-Weil afferma $|\phi^{-1}H| = aq^{r-1} + O(q^{r-3/2})$.

Se H è molto brutto abbiamo quindi che $|\phi^{-1}H|$ è $O(q^{r-3/2})$ oppure almeno $2q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$.

Osservazione

I punti della fibra di questi iperpiani si discostano molto dalla media. Posso stimarli usando la disuguaglianza di Chebyshev.

In questo modo si dimostra quindi che il numero di iperpiani molto brutti è $O(q^{codim\phi(X)+1})$.

Dimostrazione

Sia $r = \dim X$, $m = \dim \overline{\phi(X)}$, si ha:

$$\mu = q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$$

$$\sigma^2 = O(q^{m+2(r-m)-1}) = O(q^{2r-m-1})$$

Dimostrazione

Sia $r = \dim X$, $m = \dim \overline{\phi(X)}$, si ha:

$$\mu = q^{r-1} + O(q^{r-3/2})$$

$$\sigma^2 = O(q^{m+2(r-m)-1}) = O(q^{2r-m-1})$$

Quindi, nel caso di iperpiani molto brutti abbiamo che:

$$\left| |\phi^{-1}H| - \mu \right| \geq q^{r-1} + O(q^{r-3/2}) \geq \frac{1}{2} q^{r-1}$$

per q grandi.

Dimostrazione

Usando la disuguaglianza di Chebyshev si ha:

$$P\,(\text{H è molto brutto}) \leq P\left(\left| |\phi^{-1}H| - \mu \right| \geq \frac{1}{2} q^{r-1} \right)$$
$$\leq \frac{\sigma^2}{\frac{1}{4} q^{2(r-1)}} = O(q^{1-m})$$

Dimostrazione

Usando la disuguaglianza di Chebyshev si ha:

$$
\begin{aligned}
P\,(\text{H è molto brutto}) &\leq P\left(\left||\phi^{-1}H| - \mu\right| \geq \frac{1}{2}q^{r-1}\right) \\
&\leq \frac{\sigma^2}{\frac{1}{4}q^{2(r-1)}} = O(q^{1-m})
\end{aligned}
$$

Dato che gli iperipiani di $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ sono $O(q^n)$ si ha:

$$
\#\text{ iperpiani molto brutti} = O(q^{n-r+1}) = O(q^{\operatorname{codim} Y+1})
$$

Da cui la tesi.

Modello di una varietà

Consideriamo due varietà V, W su k e una mappa tra varietà $f : V \longrightarrow W$.

Modello di una varietà

Consideriamo due varietà V, W su k e una mappa tra varietà $f : V \longrightarrow W$.
k è il limite diretto delle sotto $\mathbb{Z}$ algebre finitamente generate che contiene, ci chiediamo:

Modello di una varietà

Consideriamo due varietà V, W su k e una mappa tra varietà $f : V \longrightarrow W$.
k è il limite diretto delle sotto $\mathbb{Z}$ algebre finitamente generate che contiene, ci chiediamo:

Domanda

Dato il morfismo f, è possibile trovare una $\mathbb{Z}$ sottoalgebra di k, un morfismo $f' : V' \longrightarrow W'$ di R schemi tale che f sia dato dal cambio di base $R \longrightarrow k$?

Come nel diagramma:

$$\begin{tikzcd} V = (V')_k \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & W = (W')_k \arrow[d, "w'"] \\ V' \arrow[r, "f'"] & W' \end{tikzcd}$$

Modello di una varietà

Consideriamo due varietà V, W su k e una mappa tra varietà $f : V \longrightarrow W$.
k è il limite diretto delle sotto $\mathbb{Z}$ algebre finitamente generate che contiene, ci chiediamo:

Domanda

Dato il morfismo f, è possibile trovare una $\mathbb{Z}$ sottoalgebra di k, un morfismo $f' : V' \longrightarrow W'$ di R schemi tale che f sia dato dal cambio di base $R \longrightarrow k$?

Come nel diagramma:

$$\begin{tikzcd} V = (V')_k \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & W = (W')_k \arrow[d, "w'"] \\ V' \arrow[r, "f'"] & W' \end{tikzcd}$$

La risposta è sì! Sotto alcune ipotesi che nel caso in cui si abbia a che fare con varietà sono rispettare.

Riduzione al caso di campi finiti

Nel nostro caso consideriamo il morfismo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$.

Riduzione al caso di campi finiti

Nel nostro caso consideriamo il morfismo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$.
Sia R una $\mathbb{Z}$ algebra finitamente generata che verifichi quanto visto.

Riduzione al caso di campi finiti

Nel nostro caso consideriamo il morfismo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$.
Sia R una $\mathbb{Z}$ algebra finitamente generata che verifichi quanto visto.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^n_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{\phi_p} & \mathbb{P}^n_{k(p)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R \end{array}$$

Riduzione al caso di campi finiti

Nel nostro caso consideriamo il morfismo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$.
Sia R una $\mathbb{Z}$ algebra finitamente generata che verifichi quanto visto.

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^n_k \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
X_p & \xrightarrow{\phi_p} & \mathbb{P}^n_{k(p)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R
\end{array}
$$

dove nel diagramma a destra abbiamo i cambi base dati da $R \longrightarrow k(p)$ dove $k(p)$ è il campo residuo di $p \in \operatorname{Spec} R$.

Riduzione al caso di campi finiti

Nel nostro caso consideriamo il morfismo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$.
Sia R una $\mathbb{Z}$ algebra finitamente generata che verifichi quanto visto.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^n_k \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{\phi_p} & \mathbb{P}^n_{k(p)} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R \end{array}$$

dove nel diagramma a destra abbiamo i cambi base dati da $R \longrightarrow k(p)$ dove $k(p)$ è il campo residuo di $p \in \operatorname{Spec} R$.

Poniamo $\mathcal{M}_{bad,k(p)}$ l'insieme degli iperpiani la cui controimmagine attraverso ϕ_p non sia geometricamente irriducibile.

Riduzione al caso di campi finiti

Nel nostro caso consideriamo il morfismo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$.
Sia R una $\mathbb{Z}$ algebra finitamente generata che verifichi quanto visto.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^n_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{\phi_p} & \mathbb{P}^n_{k(p)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_R & \xrightarrow{\phi_R} & \mathbb{P}^n_R \end{array}$$

dove nel diagramma a destra abbiamo i cambi base dati da $R \longrightarrow k(p)$ dove $k(p)$ è il campo residuo di $p \in \operatorname{Spec} R$.

Poniamo $\mathcal{M}_{bad,k(p)}$ l'insieme degli iperpiani la cui controimmagine attraverso ϕ_p non sia geometricamente irriducibile.

Si può osservare che $\mathcal{M}_{bad,k(0)}$ e $\mathcal{M}_{bad}$ hanno la stessa dimensione.

Riduzione al caso di campi finiti

possiamo supporre che ϕ_p verifichi le ipotesi del teorema di irriducibilità di Bertini.

$$\phi_p : X_p \longrightarrow \mathbb{P}^n_{k(p)}$$

possiamo supporre che ϕ_p verifichi le ipotesi del teorema di irriducibilità di Bertini.

$$\phi_p : X_p \longrightarrow \mathbb{P}^n_{k(p)}$$

A meno di restringersi ad un aperto di $\operatorname{Spec} R$ si ha:

- X_p geometricamente irriducibile,

Riduzione al caso di campi finiti

possiamo supporre che ϕ_p verifichi le ipotesi del teorema di irriducibilità di Bertini.

$$\phi_p : X_p \longrightarrow \mathbb{P}^n_{k(p)}$$

A meno di restringersi ad un aperto di $\operatorname{Spec} R$ si ha:

- X_p geometricamente irriducibile,
- ϕ_p abbia dimensione delle fibre non nulle costante.

possiamo supporre che ϕ_p verifichi le ipotesi del teorema di irriducibilità di Bertini.

$$\phi_p : X_p \longrightarrow \mathbb{P}^n_{k(p)}$$

A meno di restringersi ad un aperto di $\operatorname{Spec} R$ si ha:

- X_p geometricamente irriducibile,
- ϕ_p abbia dimensione delle fibre non nulle costante.
- $\operatorname{codim} \phi_p(X_p) = \operatorname{codim} \phi(X)$.

Riduzione al caso di campi finiti

possiamo supporre che ϕ_p verifichi le ipotesi del teorema di irriducibilità di Bertini.

$$\phi_p : X_p \longrightarrow \mathbb{P}^n_{k(p)}$$

A meno di restringersi ad un aperto di $\operatorname{Spec} R$ si ha:

- X_p geometricamente irriducibile,
- ϕ_p abbia dimensione delle fibre non nulle costante.
- $\operatorname{codim} \phi_p(X_p) = \operatorname{codim} \phi(X)$.

Questo grazie al fatto che essere geometricamente irriducibile e avere una certa dimensione sono proprietà costruibili.

Conclusione della dimostrazione

- Grazie ad un argomento analogo ad uno di densità, ma per le proprietà costruibili, si ha che è sufficiente mostrare che $\dim \mathcal{M}_{bad,k(p)} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$ per i punti chiusi.

Conclusione della dimostrazione

- Grazie ad un argomento analogo ad uno di densità, ma per le proprietà costruibili, si ha che è sufficiente mostrare che $\dim \mathcal{M}_{bad,k(p)} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$ per i punti chiusi.
- Dato che $\operatorname{codim} \phi(X) = \operatorname{codim} \phi_p(X_p)$, basta mostrare per i punti chiusi:

$$\dim \mathcal{M}_{bad,k(p)} \leq \operatorname{codim} \phi_p(X_p) + 1$$

Conclusione della dimostrazione

- Grazie ad un argomento analogo ad uno di densità, ma per le proprietà costruibili, si ha che è sufficiente mostrare che $\dim \mathcal{M}_{bad,k(p)} \leq \operatorname{codim} \phi(X) + 1$ per i punti chiusi.
- Dato che $\operatorname{codim} \phi(X) = \operatorname{codim} \phi_p(X_p)$, basta mostrare per i punti chiusi:
$$\dim \mathcal{M}_{bad,k(p)} \leq \operatorname{codim} \phi_p(X_p) + 1$$
- Dato che R è una $\mathbb{Z}$-algebra finitamente generata, i campi residui nei punti chiusi sono campi finti.

References

Poonen, Bjorn e Kaloyan Slavov (2020). *The exceptional locus in the Bertini irreducibility theorem for a morphism*. arXiv: 2001.08672 [math.AG].

Benoist, Olivier (2011). «Le théorème de Bertini en famille». In: *Bull. Soc. Math. France* 139.4, pp. 555–569. URL: https://doi.org/10.24033/bsmf.2619.

Lang, Serge e André Weil (1954). «Number of points of varieties in finite fields». In: *Amer. J. Math.* 76, pp. 819–827. URL: https://doi.org/10.2307/2372655.

Hartshorne, Robin (1977). *Algebraic geometry*.

Görtz, Ulrich e Torsten Wedhorn (2010). *Algebraic geometry I*.