



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Classi di Thom e di Eulero:
il Teorema di Poincaré-Hopf**

CANDIDATO:
Davide La Manna

RELATORE:
Prof. Roberto Frigerio

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

*Vi Veri
Universum
Vivus Vici*

Indice

Introduzione	ii
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Varietà lisce e fibrati	1
1.2 Forme differenziali e coomologia di de Rham	5
1.3 La successione di Mayer-Vietoris	6
1.4 Ulteriori risultati coomologici	8
2 La classe di Thom di un fibrato vettoriale	12
2.1 Coomologia compatta verticale e integrazione lungo le fibre	12
2.2 Il duale di Poincaré e la classe di Thom	17
2.3 La forma angolare globale e la classe di Eulero di un fibrato vettoriale di rango 2	21
3 Il complesso di Čech-de Rham	27
3.1 La formula d'incollamento	34
4 La classe di Eulero di un fibrato in sfere	37
4.1 La classe di Eulero di un fibrato in sfere orientato	39
4.2 La forma angolare globale di un fibrato in sfere orientato	44
5 Il Teorema di Poincaré-Hopf	46
5.1 Il numero di Eulero di un fibrato in sfere orientato	46
5.2 La caratteristica di Eulero e il Teorema di Poincaré-Hopf	50
Bibliografia	53

Introduzione

In questo elaborato studieremo due importanti classi di coomologia: la classe di Thom di fibrati vettoriali e la classe di Eulero di fibrati in sfere.

Reinterpreteremo il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa e orientata S come la classe di Thom relativa a un intorno tubolare della sottovarietà.

La classe di Eulero rappresenterà un'ostruzione alla presenza di una forma globale chiusa la cui restrizione ad ogni fibra sia un generatore della coomologia della fibra. Lo studio di una tale forma, che prende il nome di forma angolare globale, sarà discusso nel corso dell'elaborato e riveste particolare importanza per lo studio della coomologia di un fibrato in sfere. La sua esistenza infatti implica che la coomologia del fibrato coincide con la coomologia del fibrato banale.

Per concludere la trattazione, utilizzeremo gli strumenti sviluppati per dimostrare un importante risultato di topologia differenziale, il Teorema di Poincaré-Hopf, che mette in relazione le proprietà locali dei campi vettoriali con la caratteristica di Eulero, una proprietà strettamente topologica della varietà.

Nel Capitolo 1 richiameremo alcuni risultati, relativi a varietà lisce, fibrati, forme differenziali e daremo un accenno alla costruzione della coomologia di de Rham. Parleremo delle proprietà functoriali dell'operatore Ω^* e introdurremo uno strumento indispensabile nel corso della trattazione: la successione di Mayer-Vietoris. Accenneremo ad altri risultati importanti di cui faremo largamente uso: il Lemma di Poincaré, la dualità di Poincaré e la Formula di Künneth.

Nel Capitolo 2 introdurremo un'altra teoria coomologica: la coomologia compatta verticale, particolarmente adatta per lo studio di fibrati vettoriali. Dimostreremo, sotto l'ipotesi che E sia orientato, un risultato che la lega alla coomologia di de Rham dello spazio base secondo la formula

$$H^*(M) \simeq H_{cv}^{*+n}(E)$$

che prende il nome di isomorfismo di Thom. Definiremo quindi la classe di Thom come l'immagine di $1 \in H^0(M)$ tramite l'isomorfismo di Thom. Parleremo dei legami tra questa classe di coomologia e il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa e orientata e analizzeremo le sue proprietà functoriali. Concluderemo il capitolo dando una costruzione esplicita della classe di Thom di un fibrato vettoriale orientato di rango 2. Questo ci

porterà a dare un primo sguardo alla classe di Eulero e alla forma angolare globale.

Nel Capitolo 3 costruiremo il complesso doppio di Čech-de Rham e la coomologia di Čech relativa a un ricoprimento \mathcal{U} della varietà. Dimosteremo un teorema di isomorfismo tra la d -coomologia di de Rham, la D -coomologia del complesso di Čech-de Rham e la δ -coomologia di Čech. Ripercorrendo i passaggi della dimostrazione costruiremo un morfismo di cocatene

$$f : C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(M)$$

ottenuto "incollando insieme" le componenti di una D -cocatena del complesso di Čech-de Rham in modo da ottenere una forma globale. Questa mappa, in coomologia, ci fornirà un isomorfismo esplicito tra le sopracitate teorie coomologiche.

Nel Capitolo 4 vedremo come ricavare, a partire da una classe di orientazione di un S^n -fibrato in sfere $\pi : E \rightarrow M$, una D -cocatena σ del complesso di Čech-de Rham di E che, grazie ai teoremi di isomorfismo discussi nel Capitolo 3, può essere "incollata" a una forma globale su E . Questo processo di estensione e incollamento ci porterà a definire una classe di coomologia in $H^{n+1}(M)$ che prende il nome di classe di Eulero e la forma angolare globale $\psi \in \Omega^n(E)$ di un S^n -fibrato in sfere orientato e quindi di un $(n+1)$ -fibrato vettoriale; questi due oggetti, a livello delle forme, saranno legati dalla formula

$$d\psi = -\pi^* e,$$

dove e è un particolare rappresentante della classe di Eulero. Mostriamo che questa costruzione generalizza quella esposta nel Capitolo 2. Vedremo anche che la classe di Eulero rappresenta una prima ostruzione alla presenza di sezioni globali su E e che quindi il suo studio permette di capire se un fibrato in sfere è banale. Concluderemo il capitolo accennando alla formula che lega la classe di Thom alla forma angolare globale e alla classe di Eulero.

Nel Capitolo 5 definiremo il numero di Eulero di un $(k-1)$ -fibrato in sfere E orientato su una varietà compatta e orientata M di dimensione k come l'integrale $\int_M e(E)$ della classe di Eulero. Mostriamo che se E ha una sezione s definita su $M \setminus \{x_1, \dots, x_q\}$, il numero di Eulero di E è uguale alla somma dei gradi locali di s in x_1, \dots, x_q . In particolare, il numero di Eulero di una varietà orientata e compatta M , definito come il numero di Eulero del fibrato tangente unitario $S(T_M)$, è uguale alla somma degli indici degli zeri isolati di un campo vettoriale; tale quantità risulterà quindi essere invariante. Infine scopriremo che il numero di Eulero coincide con la caratteristica di Eulero della varietà, in formule

$$\int_M e(T_M) = \chi(M).$$

Da questa formula dedurremo un risultato classico della topologia differenziale noto come Teorema di Poincaré-Hopf.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Lo scopo di questo capitolo è richiamare una serie di risultati classici e nozioni che ci saranno utili nel corso della trattazione, dunque saranno presenti poche dimostrazioni.

1.1 Varietà lisce e fibrati

Lavoreremo quasi esclusivamente nella categoria **Diff** i cui oggetti sono le varietà lisce e i morfismi le funzioni C^∞ .

Di seguito una serie di definizioni ci aiuteranno a conoscere la nostra categoria.

Definizione 1.1. Un insieme M è una n -varietà topologica se è **T2**, secondo numerabile e localmente omeomorfo a \mathbb{R}^n , ovvero $\forall p \in M \exists \varphi_i : U \rightarrow V$ omeomorfismo, con $p \in U \subset M$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ aperti. Tali omeomorfismi verranno chiamati *carte*.

Definizione 1.2. Date due carte tale che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, definiamo *funzione di transizione* la mappa

$$\varphi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

che si ottiene ponendo $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$.

Definizione 1.3. Un *atlante* su M è un insieme $\{(\varphi_i, U_i)\}$ con $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ di carte che ricoprono M , ovvero $\cup_i U_i = M$. Un atlante è detto *liscio* se tutte le funzioni di transizione sono lisce come mappe tra aperti dello spazio euclideo.

Definizione 1.4. Una funzione $f : M \rightarrow N$ tra varietà si dice *liscia* o C^∞ , se lo è *letta in carta*: $\forall p \in M, p \in U \subset M, V \subset N, f(U) \subset V, W \subset \mathbb{R}^n$ e $Z \subset \mathbb{R}^m$ aperti, φ e ψ carte

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \psi \downarrow \\ W & \xrightarrow{F} & Z \end{array} \quad (1.1)$$

tali per cui il diagramma è commutativo, si ha che $F = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ è C^∞ .

Quando scriveremo che una certa proprietà è *letta in carta*, sottintenderemo un diagramma di questo tipo.

Definizione 1.5. Una *varietà liscia* è una coppia (M, \mathcal{A}) dove M è una varietà topologica e \mathcal{A} un atlante liscio.

Convenzione. Durante tutta la trattazione, a meno che non sia diversamente specificato, quando parleremo di una varietà M faremo riferimento a **una varietà liscia connessa e senza bordo**.

Definizione 1.6. Siano $p \in M$, $0 \in I$ intervallo di \mathbb{R} e $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ due curve in M tali per cui $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Diciamo che γ_1 e γ_2 sono *tangenti* in p se, lette in carta si ha che $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. Questa definizione non dipende dalla carta perché le mappe di transizione trasportano curve tangenti in curve tangenti. La relazione di tangenza è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.7. Lo spazio tangente $T_p M$ in $p \in M$ è l'insieme di tutte le curve $\gamma : I \rightarrow M$ con $0 \in I$ e con $\gamma(0) = p$ modulo la relazione di tangenza.

Definizione 1.8. Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione liscia tra varietà. Il *differenziale* di f in $p \in M$ è la mappa

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

che manda la curva γ con $\gamma(0) = p$ nella curva $f \circ \gamma$. La mappa è ben definita perché mappe lisce mandano curve tangenti in curve tangenti.

Definizione 1.9. Sia data una varietà liscia F , un *fibrato liscio* con fibra F è una mappa $\pi : E \rightarrow B$ tra varietà, dove E è chiamato *spazio totale* e B *spazio base*, per cui vale la seguente proprietà: Preso un punto $p \in B$, esiste un intorno U di p e un diffeomorfismo $\varphi : E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tale che il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong \varphi} & U \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

L'insieme $\{(\varphi_i, U_i)\}$ prende il nome di *trivializzazione* del fibrato. Le funzioni di transizione relative alla trivializzazione $\{(\varphi_i, U_i)\}$ inducono le mappe

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$$

$$x \mapsto \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\{x\} \times F},$$

dove $G \subset \text{Diff}(F)$ è un gruppo che prende il nome di *gruppo di struttura del fibrato* E . Le mappe $\{g_{ij}\}$, che continueremo a chiamare funzioni di transizione, soddisfano la *condizione di cociclo*:

$$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik} \quad \text{su} \quad U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Osservazione 1.10. Quella che all'apparenza potrebbe sembrare una definizione molto tecnica in realtà ci dice che un fibrato è un oggetto matematico che visto localmente è un prodotto di varietà lisce. Questa proprietà locale fornisce al nostro oggetto una naturale struttura di varietà liscia.

Esempio 1.11. Un *fibrato banale* è un prodotto diretto $E = B \times F$ con la proiezione canonica π_1 sul primo fattore.

Esempio 1.12. Un esempio di fibrato non banale è il *nastro di Möbius* aperto con fibre \mathbb{R} sullo spazio base S^1 .

Definizione 1.13. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato, se le fibre $E_p = \pi^{-1}(p)$ sono dotate di una struttura di k -spazio vettoriale che varia in modo liscio, il fibrato viene detto *fibrato vettoriale* di rango k .

Definizione 1.14. Sia U un insieme aperto di M . Una funzione liscia $s : U \rightarrow E$ è una *sezione* del fibrato E su U se $\pi \circ s$ è l'identità su U . Se E è un fibrato vettoriale, esiste una sezione canonica $s_0 : M \rightarrow E$ che manda $p \in M$ in $0 \in E_p$ che prende il nome di *zero sezione*.

Definizione 1.15. Data una varietà M sia

$$T_M = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

l'unione di tutti i tangenti. Questo insieme ha una naturale struttura di fibrato vettoriale con la mappa $\pi : T_M \rightarrow M$ tale per cui $\pi^{-1}(p) = T_p M$. I differenziali delle carte $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ inducono una trivializzazione del fibrato:

$$\begin{aligned} \varphi_* : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (p, d\varphi_p(v)). \end{aligned}$$

Dove $p \in \pi(v)$. Questo fornisce una struttura di fibrato vettoriale a T_M che chiameremo *fibrato tangente*.

Definizione 1.16. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e sia $\pi : E^* \otimes E^* \rightarrow M$ il fibrato vettoriale la cui fibra in $p \in M$ è lo spazio $E_p^* \otimes E_p^*$. Una *metrica Riemanniana* per E è una sezione g di π tale che $g(p)$ è un prodotto scalare definito positivo su E_p per ogni $p \in M$.

Proposizione 1.17. *Ogni fibrato vettoriale possiede una metrica Riemanniana.*

Una dimostrazione di questo fatto si trova in [Mar, p. 108].

Osserviamo che per un n -fibrato vettoriale, il gruppo di struttura G è $GL(n, \mathbb{R})$.

Lemma 1.18. *Siano E un n -fibrato vettoriale e $\{g_{ij}\}$ funzioni di transizione associate alla trivializzazione $\{\varphi_i\}$, se consideriamo $\{g'_{ij}\}$ proveniente da un'altra trivializzazione $\{\varphi'_i\}$, allora esiste una mappa $\lambda_i : U_i \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tale che*

$$g_{ij} = \lambda_i g'_{ij} \lambda_j^{-1} \quad \text{su } U_i \cap U_j.$$

Dimostrazione. Le due trivializzazioni differiscono per un endomorfismo invertibile in ogni punto:

$$\varphi_i = \lambda_i \varphi'_i, \quad \lambda_i : U_i \rightarrow GL(n, \mathbb{R}),$$

dunque

$$g_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1} = \lambda_i \varphi'_i \varphi_j'^{-1} \lambda_j^{-1} = \lambda_i g'_{ij} \lambda_j^{-1}.$$

□

Due funzioni di transizione collegate in questo modo vengono detti *equivalenti*. Dato un fibrato vettoriale con funzioni di transizione $\{g_{ij}\}$, se è possibile trovare delle funzioni di transizione equivalenti a valori in un sottogruppo H di $GL(n, \mathbb{R})$, allora diremo che il *gruppo di struttura di E si riduce ad H* .

Definizione 1.19. Un fibrato vettoriale è detto orientabile se il suo gruppo di struttura si riduce a $GL(n, \mathbb{R})^+$.

Osservazione 1.20. Il gruppo di struttura di qualsiasi n -fibrato vettoriale può essere ridotto a un sottogruppo del gruppo ortonormale $O(n)$. Dotiamo E di una metrica Riemanniana, a questo punto ci basta prendere come trivializzazione delle mappe φ_i che mandano frame ortonormali di E in frame ortonormali di \mathbb{R}^n . Mappe di questo tipo possono essere ottenute tramite il processo di Gram-Schmidt. Così facendo, le mappe g_{ij} preserveranno i frame ortonormali, dunque saranno elementi di $O(n)$.

Definizione 1.21. Siano $f : N \rightarrow M$ una mappa liscia tra varietà e $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale. Possiamo costruire un fibrato *pullback* $f^{-1}E \rightarrow N$ come segue: consideriamo come spazio totale

$$f^{-1}E = \{(p, v) \in N \times E \mid f(p) = \pi(v)\} \subset N \times E.$$

La mappa $\pi : f^{-1}E \rightarrow N$ è $\pi(p, v) = p$. La fibra $(f^{-1}E)_p$ su p è naturalmente identificata con $E_{f(p)}$.

Proposizione 1.22. *Lo spazio totale è una sottovarietà liscia di $N \times E$ e $f^{-1}E \rightarrow N$ è un fibrato vettoriale.*

Osservazione 1.23. Siano $\{U_i\}$ una trivializzazione per E e $\{g_{ij}\}$ funzioni di transizione. Allora $\{f^{-1}U_i\}$ è una trivializzazione per $f^{-1}E$, inoltre $(f^{-1}E)|_{f^{-1}U_i} \cong f^{-1}(E|_{U_i})$. Di conseguenza le funzioni di transizione per $f^{-1}E$ sono i pullback delle funzioni di transizione f^*g_{ij} .

Proposizione 1.24 (Invarianza omotopica dei fibrati vettoriali). *Siano $f, g : N \rightarrow M$ mappe omotope tra varietà e $E \rightarrow M$ fibrato vettoriale su M , allora $f^{-1}E$ e $g^{-1}E$ sono due fibrati isomorfi, ovvero, esiste un diffeomorfismo Φ lineare nelle fibre tale che il seguente diagramma commuti.*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \xrightarrow{\Phi} & g^{-1}E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

Corollario 1.25. *Ogni fibrato vettoriale su una varietà contrattile è banale.*

Per una dimostrazione della Proposizione 1.24 e del Corollario 1.25 si veda [BT95, p. 57-58]

1.2 Forme differenziali e coomologia di de Rham

Iniziamo definendo il complesso delle k -forme in \mathbb{R}^n . Sia Ω^* l'algebra su \mathbb{R} generata da dx_1, \dots, dx_n con le relazioni

$$\begin{cases} (dx_i)^2 = 0 \\ dx_i dx_j = -dx_j dx_i \quad i \neq j. \end{cases}$$

Visto come \mathbb{R} -spazio vettoriale, Ω^* ha come base:

$$1, dx_i, dx_i dx_s, dx_i dx_j dx_k, \dots, dx_1 \dots dx_n. \\ i < j \quad i < j < k$$

Definizione 1.26. Una C^∞ forma differenziale su \mathbb{R}^n è un elemento di

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\text{funzioni } C^\infty \text{ su } \mathbb{R}^n\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*.$$

Una qualsiasi forma ω può essere scritta in modo unico come somma di elementi di una base i cui coefficienti sono funzioni C^∞ , sfruttando la notazione dei multi-indici:

$$\omega = \sum_I f_I dx_I.$$

Questo fornisce una struttura graduata alla nostra algebra $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ dove $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle q -forme su \mathbb{R}^n .

Definizione 1.27. Una somma diretta di spazi vettoriali $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$ è chiamato complesso di cocatene se esistono dei morfismi

$$\dots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \longrightarrow \dots$$

tali per cui $d^2 = 0$. d è chiamato *operatore differenziale* del complesso.

Definizione 1.28. Chiamiamo *coomologia* del complesso C la somma diretta di spazi vettoriali $H^*(C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(C)$ tale che $H^q(C) = (\ker(d) \cap C^q) / (\text{Im}(d) \cap C^q)$.

Adesso definiamo un operatore

$$d : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{*+1}(\mathbb{R}^n)$$

che renderà la nostra algebra un complesso di cocatene:

- se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, allora $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$,

- se $\omega = \sum_I f_I dx_I$ allora $d\omega = \sum_I df_I dx_I$.

Questo operatore differenziale è chiamato *derivata esterna*.

Inoltre vale che d è un'anti-derivazione, ovvero, per ogni $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \Omega^h(\mathbb{R}^n)$:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta,$$

e $d^2 = 0$.

Il complesso $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ munito dell'operatore differenziale d è chiamato *complesso di de Rham*.

Definizione 1.29. Una q -forma ω si dice *chiusa* se $d\omega = 0$, si dice *esatta* se esiste una $(q-1)$ -forma η tale che $\omega = d\eta$.

Chiamiamo rispettivamente $Z^q(\mathbb{R}^n)$ e $B^q(\mathbb{R}^n)$ il sottospazio vettoriale di $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ costituito dalle q -forme chiuse e dalle q -forme esatte. Osserviamo che $B^q \subset Z^q$ poiché $d^2 = 0$. Gli elementi di questi sottospazi verranno talvolta chiamati *cocicli* e *cobordi*.

Definizione 1.30. Il q -esimo gruppo di coomologia di de Rham è lo spazio vettoriale

$$H^q(\mathbb{R}^n) = Z^q(\mathbb{R}^n) \setminus B^q(\mathbb{R}^n).$$

Osservazione 1.31. Vale che $H^0(M) = \mathbb{R}^I$ dove I indica la cardinalità delle componenti connesse di M . Questo perché le 0-forme chiuse sono le funzioni $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lisce e localmente costanti.

Adesso definiamo un'altra coomologia che in qualche senso risulterà essere il "Duale" della coomologia di de Rham.

Definizione 1.32. Consideriamo il complesso delle forme a supporto compatto su \mathbb{R}^n :

$$\Omega_c^*(\mathbb{R}^n) = \{\text{funzioni } C^\infty \text{ su } \mathbb{R}^n \text{ a supporto compatto}\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*.$$

La sua coomologia è chiamata *coomologia di de Rham a supporto compatto* e viene indicata con $H_c^*(\mathbb{R}^n)$.

1.3 La successione di Mayer-Vietoris

In questa sezione parleremo delle proprietà funtoriali di Ω^* , che useremo per definire la coomologia di de Rham su varietà lisce. Introdurremo uno strumento essenziale per il calcolo della coomologia di de Rham di varietà: la successione di Mayer-Vietoris.

Definizione 1.33. Siano x_1, \dots, x_m e y_1, \dots, y_n rispettivamente le coordinate di \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n . Data $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa C^∞ , consideriamo la mappa

$$f^* : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^m)$$

$$\sum_I g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q} \mapsto \sum_I (g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q}.$$

Questa mappa è chiamata *pullback di f* .

Proposizione 1.34. *Il pullback commuta con la derivata esterna, data $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$*

$$f^*d\omega = df^*\omega.$$

Definizione 1.35. Una mappa $f : A \rightarrow B$ tra due complessi di cocatene è un *momorfismo di complessi* se commuta con gli operatori differenziali di A e B : $fd_A = d_Bf$.

A questo punto possiamo pensare Ω^* come un funtore dalla categoria degli spazi euclidei con le funzioni C^∞ alla categoria delle algebre graduate commutative e i loro omomorfismi.

Definizione 1.36. Una *forma differenziale* ω in M è una collezione di forme ω_U con U in un atlante su M , rispetto al sistema di coordinate indotto dalla carta, che sia *localmente coerente*: dette i e j le inclusioni

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i} & U \\ & \searrow j & \\ & & V \end{array}$$

si ha $i^*\omega_U = j^*\omega_V$ su $\Omega^*(U \cap V)$.

Dalla funtorialità di Ω^* , derivate esterna e prodotto wedge si estendono a forme differenziali su M . Questa definizione "in carta" ci permette di associare ad ogni mappa tra varietà lisce $f : M \rightarrow N$ una mappa di pullback $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$, in modo analogo a quanto fatto per spazi euclidei. In questo modo Ω^* diventa un *funtore controvariante* nella categoria delle varietà lisce.

Siano U, V due aperti tali che $M = U \cup V$, questo ci fornisce una sequenza di inclusioni:

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow i & & \searrow l & \\ U \cap V & & & & U \cup V \\ & \searrow j & & \nearrow m & \\ & & V & & \end{array} \tag{1.2}$$

Applicando Ω^* otteniamo la *successione di Mayer-Vietoris*:

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{(l^*, m^*)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

Proposizione 1.37. *La successione di Mayer-Vietoris è esatta e induce una successione esatta lunga in coomologia*

$$\begin{array}{ccccccc} \hookrightarrow & H^{q+1}(U \cup V) & \longrightarrow & H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) & \longrightarrow & \dots & \\ & & & \delta & & & \\ & & & \longleftarrow & & & \\ & \dots & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) & \longrightarrow & H^q(U \cap V) & \longrightarrow \end{array} \tag{1.4}$$

Ogni forma in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ può essere scritta in modo unico come combinazione lineare dei seguenti due tipi di forme:

1. $(\pi^*\varphi)f(x, t)$,
2. $(\pi^*\varphi)f(x, t)dt$.

Dove φ è una forma in \mathbb{R}^n . Definiamo $K : \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ così

$$\begin{aligned} (\pi^*\varphi)f(x, t) &\mapsto 0, \\ (\pi^*\varphi)f(x, t)dt &\mapsto (\pi^*\varphi) \int_0^t f. \end{aligned}$$

Proposizione 1.40. *K è un'omotopia di cocatene tra 1 e $\pi^* \circ s^*$.*

Questo fatto prova quello che volevamo.

Proposizione 1.41. *Le mappe π^* e s^* sono isomorfismi in coomologia e $H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \cong H^*(\mathbb{R}^n)$.*

procedendo per induzione abbiamo un importante corollario.

Teorema 1.42 (Lemma di Poincaré).

$$H^*(\mathbb{R}^n) = H^*(\text{punto}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{in dimensione } 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia M una varietà, e siano

$$M \times \mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{s} \end{array} M$$

la proiezione sul primo fattore e la zero sezione. Possiamo estendere la Proposizione 1.40 a una generica varietà M . Sia $\{U_i\}$ il dominio di un atlante per M , $\{U_i \times \mathbb{R}\}$ è il dominio di un atlante per $M \times \mathbb{R}$. A questo punto ogni forma in $M \times \mathbb{R}$ si esprime come combinazione lineare di due forme come sopra e allo stesso modo possiamo definire un'omotopia di cocatene e mostrare che $H^*(M \times \mathbb{R}) \cong H^*(M)$.

Da quest'ultima considerazione segue un importante corollario.

Corollario 1.43 (Assioma di omotopia per la coomologia di de Rham). *Mappe omotope inducono la stessa mappa in coomologia.*

Una dimostrazione della Proposizione 1.40 e del Corollario 1.43 può essere consultata in [BT95, p. 33-35].

Per calcolare la coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}^n ci troviamo di fronte a un problema: abbiamo infatti osservato che il pullback di $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, la proiezione sul primo fattore, non manda necessariamente forme a supporto compatto di M in forme a supporto compatto di $M \times \mathbb{R}$. Comunque, possiamo definire una mappa di push-forward

$$\pi_* : \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{*-1}(M),$$

che prende il nome di *integrazione lungo le fibre*. Per prima cosa notiamo che una forma a supporto compatto su $M \times \mathbb{R}$ è una combinazione lineare di due tipi di forme:

1. $\pi^*\varphi \cdot f(x, t)$,
2. $\pi^*\varphi \cdot f(x, t)dt$.

dove φ è una forma di M e $f(x, t)$ è una funzione a supporto compatto. Definiamo π_* così:

$$\begin{aligned} \pi^*\varphi \cdot f(x, t) &\mapsto 0, \\ \pi^*\varphi \cdot f(x, t)dt &\mapsto \varphi \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Vale che $d\pi_* = \pi_*d$, dunque questa mappa è un morfismo di cocatene. Di conseguenza la mappa passa in coomologia

$$\pi_* : H_c^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{*-1}(M).$$

Per produrre un'inversa, prendiamo $e = e(t)dt$ una bump-form di \mathbb{R} e definiamo

$$\begin{aligned} e_* : \Omega_c^*(M) &\rightarrow \Omega_c^{*+1}(M \times \mathbb{R}) \\ \varphi &\mapsto (\pi^*\varphi) \wedge e. \end{aligned}$$

La mappa e_* commuta con d quindi passa in coomologia.

Proposizione 1.44. *Le mappe $H_c^*(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow[e_*]{\pi_*} H_c^{*-1}(M)$ sono isomorfismi.*

Una dimostrazione di questa proposizione si trova in [BT95, p. 38].

Teorema 1.45 (Lemma di Poincaré a supporto compatto).

$$H^*(\mathbb{R}^n) = H^*(punto) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{in dimensione } n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In particolare il seguente corollario mostra che, a differenza della coomologia di de Rham, la coomologia a supporto compatto non è invariante per equivalenza omotopica.

Definizione 1.46. Sia M una n -varietà. Un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di M è un *buon ricoprimento* se qualunque intersezione finita $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$ è diffeomorfa a \mathbb{R}^n .

Lemma 1.47. *Ogni varietà ha un buon ricoprimento. Se la varietà è compatta, il ricoprimento può essere scelto finito.*

Dimostrazione. Dotiamo M di una metrica Riemanniana. Una varietà Riemanniana possiede in ogni punto un intorno geodeticamente convesso [Spi99, p. 491]. L'intersezione di due intorni geodeticamente convessi è geodeticamente convesso. Dato che ogni intorno geodeticamente convesso di una varietà è diffeomorfo a \mathbb{R}^n concludiamo la dimostrazione. \square

Enunciamo adesso una serie di risultati che valgono per varietà che ammettono un buon ricoprimento finito.

Proposizione 1.48. *Sia M varietà dotata di un buon ricoprimento finito allora la sua coomologia e la sua coomologia a supporto compatto sono finito dimensionali.*

Sia M una n -varietà orientata senza bordo. Definiamo l'operatore bilineare di Poincaré

$$H^*(M) \times H_c^{n-*}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, \eta) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta,$$

questa mappa è ben definita perché $\omega \wedge \eta$ è una forma a supporto compatto. Come tutti gli operatori bilineari, induce una mappa

$$PD : H^*(M) \rightarrow (H_c^{n-*}(M))^*$$

$$\omega \mapsto f_\omega : \eta \mapsto \int_M \omega \wedge \eta.$$

Dove l'asterisco fuori dalle parentesi indica lo spazio duale di $H_c^{n-*}(M)$.

Teorema 1.49 (Dualità di Poincaré). *Sia M una varietà orientata e senza bordo di dimensione n che ammette un buon ricoprimento finito. Allora la mappa*

$$PD : H^*(M) \rightarrow (H^{n-*}(M))^*$$

è un isomorfismo.

Una dimostrazione del Lemma 1.48 e del Teorema 1.49 si trova in [BT95, p. 43-46]. Siano M e F varietà, supponiamo che M ammetta un buon ricoprimento finito, le due proiezioni canoniche

$$\begin{array}{ccc} M \times F & \xrightarrow{\rho} & F \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

danno vita a una mappa sulle forme

$$\omega \otimes \varphi \mapsto \pi^* \omega \wedge \rho^* \varphi.$$

Essa induce una mappa in coomologia:

$$\psi : H^*(M) \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(M \times F).$$

Teorema 1.50 (Formula di Künneth). *La mappa ψ è un isomorfismo.*

Una dimostrazione del Teorema 1.53 può essere consultata in [BT95, p. 48-50].

Capitolo 2

La classe di Thom di un fibrato vettoriale

Precedentemente abbiamo definito due invarianti per varietà lisce: la coomologia di de Rham e la coomologia di de Rham a supporto compatto. In questo capitolo definiamo un invariante liscio utile per lo studio dei fibrati vettoriali, la coomologia compatta verticale. Questa ci permetterà di trovare esplicitamente il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa e orientata come la classe di Thom del suo fibrato normale. In questo capitolo studieremo un'altra classe di coomologia: la classe di Eulero per fibrati vettoriali orientati di rango 2.

2.1 Coomologia compatta verticale e integrazione lungo le fibre

Come già menzionato, per i fibrati vettoriali possiamo costruire un terzo tipo di coomologia. Invece di $\Omega_c^*(E)$, il complesso delle forme a supporto compatto, consideriamo $\Omega_{cv}^*(E)$, il complesso delle forme a *supporto compatto in direzione verticale*, definito come segue. Sia ω una n -forma su E , allora ω appartiene a $\Omega_{cv}^n(E)$ se e solo se per ogni compatto K in M , $\pi^{-1}(K) \cap \text{Supp}(\omega)$ è compatto. Una forma a supporto compatto verticale non ha necessariamente supporto compatto però $\text{Supp}(\omega|_{\pi^{-1}(x)}) \subset \pi^{-1}(x) \cap \text{Supp}(\omega)$ è un insieme chiuso in un compatto quindi la restrizione di ω ad ogni fibra ha supporto compatto. La coomologia di questo complesso, denotata con $H_{cv}^*(E)$, è chiamata *coomologia compatta verticale*.

Sia E un n -fibrato vettoriale orientato. Possiamo estendere la formula (1.8) in questo caso per ottenere una mappa

$$\pi_* : \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-n}(M),$$

come segue: consideriamo preliminarmente il caso di un fibrato banale $E = M \times \mathbb{R}^n$. Sia t_1, \dots, t_n un sistema di coordinate sulle fibre \mathbb{R}^n . Un elemento di $\Omega_{cv}^*(E)$ può essere scritto come combinazione lineare di due tipi di forme:

1. $\pi^*\varphi \wedge f(x, t_1, \dots, t_n)dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k} \quad k < n,$
2. $\pi^*\varphi \wedge f(x, t_1, \dots, t_n)dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n,$

dove φ è una qualunque forma in M e f ha supporto compatto per ogni $x \in M$ fissato. La mappa π_* è definita in modo che:

1. $\pi^*\varphi \wedge f(x, t_1, \dots, t_n)dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k} \mapsto 0 \quad k < n,$
2. $\pi^*\varphi \wedge f(x, t_1, \dots, t_n)dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n \mapsto \varphi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t_1, \dots, t_n)dt_1 \dots dt_n.$

Come secondo step, prendiamo un generico fibrato vettoriale orientato E , munito di un ricoprimento trivializzante orientato $\{(U_i, \psi_i)\}$. Una forma $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$, localmente, sarà combinazione lineare dei due tipi di forme descritti sopra. Definiamo π_* localmente come sopra.

Proposizione 2.1. *La definizione locale di π_* è una buona definizione.*

Sia $\omega_i = \omega|_{\pi^{-1}(U_i)}$, allora $\pi_\omega_i = \pi_*\omega_j$ su $U_i \cap U_j$. Quindi le forme $\pi_*\omega_i$ possono essere incollate insieme per ottenere una forma globale $\pi_*\omega$ su M , la cui definizione non dipende dalla scelta della trivializzazione.*

Convenzione. Per non appesantire la notazione, quando non ci sarà ambiguità, scriveremo dt al posto di $dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$ e sottintenderemo il prodotto wedge. Inoltre utilizzeremo lo stesso simbolo sia per intendere una forma differenziale che la relativa classe di coomologia.

Dimostrazione. Siano $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ funzioni coordinate di U_i e U_j , $t = (t_1, \dots, t_n)$ e $u = (u_1, \dots, u_n)$ le coordinate delle fibre di $\pi^{-1}(U_i)$ e $\pi^{-1}(U_j)$. Poiché il seguente diagramma di inclusioni

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_i & & \\
 & \nearrow l_i & & \searrow m_i & \\
 U_i \cap U_j & & & & M \\
 & \searrow l_j & & \nearrow m_j & \\
 & & U_j & &
 \end{array}$$

è commutativo, segue che

$$\omega_i|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_j)} = \omega_j|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_j)}. \quad (2.1)$$

Da questa osservazione deduciamo che se ω_i è di tipo 1 nelle coordinate (x, t) allora lo è anche nelle coordinate (y, u) , quindi $\pi_*\omega_i|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_j)} = \pi_*\omega_j|_{\pi^{-1}(U_i \cap U_j)} = 0$. Adesso supponiamo che ω_i e ω_j siano di tipo 2. Possono quindi essere scritte nel seguente modo:

$$\omega_i = (\pi^*\varphi_i)f_i(x, t)dt, \quad \omega_j = (\pi^*\varphi_j)f_j(y, u)du.$$

Sempre dalla (2.1) segue che

$$(\pi^* \varphi_i) f_i(x(p), t) dt = (\pi^* \varphi_j) f_j(y(p), u) du \quad \forall p \in U_i \cap U_j.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \pi_* \omega_i|_{U_i \cap U_j} &= \varphi_i|_{U_i \cap U_j} \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x, t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\pi^* \varphi_i|_{U_i \cap U_j}) f_i(x, t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\pi^* \varphi_j|_{U_i \cap U_j}) f_j(y, u) du \\ &= \varphi_j|_{U_i \cap U_j} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(y, u) dt = \pi_* \omega_j|_{U_i \cap U_j}. \end{aligned}$$

Infine osserviamo che essendo l'integrale invariante per cambi di carta positivi, la formula non dipende dalla scelta della trivializzazione. \square

Proposizione 2.2. *La mappa π_* commuta con la derivata esterna d .*

Dimostrazione. Siano $\{(U_i, \psi_i)\}$ una trivializzazione per E , $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità subordinata alla trivializzazione e $\omega \in \Omega_{cv}^*$. Dato che $\omega = \sum_i \rho_i \omega$ e sia π_* che d sono operatori lineari, basta provare la proposizione per $\rho_i \omega$, ovvero $\pi_* d(\rho_i \omega) = d\pi_*(\rho_i \omega)$. In questo modo, ci basta dimostrare la proposizione per $E = M \times \mathbb{R}^n$. Abbiamo due casi:

- $\omega = (\pi^* \varphi) f(x, t) dt$.

$$\begin{aligned} d\pi_* \omega &= d(\varphi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt) \\ &= (d\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \sum_i dx_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_* d\omega &= \pi_* \left((\pi^* d\varphi) f dt + (-1)^{\deg \varphi} \pi^* \varphi \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dt \right) \\ &= (d\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \sum_i dx_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt. \end{aligned}$$

- $\omega = (\pi^* \varphi) f(x, t) dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}$, $k < n$.

$$d\pi_* \omega = 0$$

e utilizzando la formula sopra

$$\begin{aligned} \pi_* d\omega &= (-1)^{\deg \varphi} \sum_i \pi_* \left((\pi^* \varphi) \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k} \right) \\ &= 0 \quad \text{se } dt_i \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k} \neq \pm dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n. \end{aligned}$$

Altrimenti si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i dt_{i_1} \dots dt_{i_k} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i \right) dt_{i_1} \dots dt_{i_k} = 0$$

poiché f è a supporto compatto in t a x fissato.

□

Proposizione 2.3 (Formula di proiezione). *Siano $\pi : E \rightarrow M$ un n -fibrato vettoriale orientato, $\tau \in \Omega^*(M)$ e $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$. Allora*

$$\pi_*((\pi^*\tau) \wedge \omega) = \tau \wedge \pi_*\omega.$$

Inoltre se supponiamo che M sia una varietà orientata di dimensione m , $\omega \in \Omega_{cv}^q(E)$ e $\tau \in \Omega_c^{m+n-q}(M)$, con l'orientazione da locale prodotto su E

$$\int_E (\pi^*\tau) \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \pi_*\omega.$$

Dimostrazione. Poiché due forme sono uguali se e solo lo sono localmente, possiamo assumere che $E = M \times \mathbb{R}^n$.

Se $\omega = (\pi^*\varphi)f(x, t)dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}$ con $k < n$, allora:

$$\pi_*((\pi^*\tau) \wedge \omega) = \pi_*(\pi^*(\tau\varphi) \cdot f(x, t)dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}) = 0 = \tau \wedge \pi_*\omega.$$

Se $\omega = (\pi^*\varphi)f(x, t)dt$ allora

$$\pi_*((\pi^*\tau) \wedge \omega) = \tau \wedge \left(\varphi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)dt \right) = \tau \wedge \pi_*\omega.$$

Per la seconda parte della dimostrazione invece, prendiamo $\{(U_i, \psi_i)\}$ una trivializzazione orientata per E e $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità subordinata alla trivializzazione. Scrivendo $\omega = \sum_i \rho_i \omega$ abbiamo

$$\int_E (\pi^*\tau) \wedge \omega = \sum_i \int_{E|U_i} (\pi^*\tau) \wedge (\rho_i \omega)$$

e

$$\int_M \tau \wedge \pi_*\omega = \sum_i \int_{U_i} \tau \wedge \pi_*(\rho_i \omega).$$

Adesso notiamo che $\tau \wedge \pi_*(\rho_i \omega)$ ha supporto compatto poiché il suo supporto è un sottoinsieme chiuso del supporto di τ . Stessa cosa dicasi per $(\pi^*\tau) \wedge (\rho_i \omega)$. Quindi possiamo limitarci a dimostrare la proposizione per $M = U_i$. Ma questa segue dalla formula di proiezione perché

$$\int_{E|U_i} (\pi^*\tau) \wedge (\rho_i \omega) = \int_{U_i} \tau \int_{\mathbb{R}^n} \rho_i \omega = \int_{U_i} \pi_*((\pi^*\tau) \wedge (\rho_i \omega)) = \int_{U_i} \tau \wedge \pi_*(\rho_i \omega).$$

Da ciò segue la tesi.

□

Riportiamo un risultato che è una conseguenza diretta del Teorema 1.45.

Proposizione 2.4 (Lemma di Poincaré a supporto compatto verticale). *La mappa di integrazione lungo le fibre definisce un isomorfismo*

$$\pi_* : H_{cv}^*(M \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{*-n}(M).$$

Teorema 2.5 (Isomorfismo di Thom). *Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n orientato, allora*

$$H_{cv}^*(E) \cong H^{*-n}(M).$$

Per dimostrare questo fatto avremmo bisogno del seguente lemma.

Lemma 2.6 (Lemma dei cinque). *Sia dato un diagramma commutativo a meno di segno di gruppi abeliani e omomorfismi di gruppo in cui ogni riga è una successione esatta*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon & & \\ \cdots & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Se le mappe α, β, δ e ε sono isomorfismi, allora γ è un isomorfismo.

Una dimostrazione di questo fatto può essere consultata in [HPoM02, p. 138].

Dimostrazione Teorema 2.5. Dimostreremo il teorema con l'ipotesi aggiuntiva che M ammetta un buon ricoprimento finito.

Siano U e V sottoinsiemi aperti di M . Usando una partizione dell'unità subordinata a $\{U, V\}$ in $U \cup V$, otteniamo la successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cup V}) \rightarrow \Omega_{cv}^*(E|_U) \oplus \Omega_{cv}^*(E|_V) \rightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \rightarrow 0,$$

che induce una successione esatta lunga in coomologia.

Abbiamo così il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & H_{cv}^*(E|_{U \cup V}) & \rightarrow & H_{cv}^*(E|_U) \oplus H_{cv}^*(E|_V) & \rightarrow & H_{cv}^*(E|_{U \cap V}) & \xrightarrow{\delta} & H_{cv}^{*+1}(E|_{U \cup V}) & \rightarrow \cdots \\ & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & \\ \cdots \rightarrow & H^{*-n}(U \cup V) & \rightarrow & H^{*-n}(U) \oplus H^{*-n}(V) & \rightarrow & H^{*-n}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^{*+1-n}(U \cup V) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

La commutatività dei primi due quadrati è banale; per quanto riguarda il terzo, ricordando la forma esplicita dell'operatore di cobordo δ in (1.5), abbiamo grazie alla Proposizione 2.3

$$\pi_* \delta \omega = \pi_* ((\pi^* d\rho_U) \wedge \omega) = d\rho_U \wedge \pi_* \omega = \delta \pi_* \omega.$$

Quindi il diagramma è commutativo. Adesso procediamo per induzione sulla cardinalità del buon ricoprimento.

- Se $M = U \cong \mathbb{R}^n$, dal Corollario 1.25 segue che $E|_U$ è un fibrato banale e la tesi si ottiene dal Lemma di Poincaré a supporto compatto verticale.
- Supponiamo adesso che il teorema valga per ogni varietà avente un buon ricoprimento di cardinalità $n - 1$ e consideriamo una varietà avente $\{U_1, \dots, U_n\}$ come buon ricoprimento. Adesso $(U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}) \cap U_n$ ha un buon ricoprimento di cardinalità $n - 1$ che chiamiamo $\{U_{1,n}, \dots, U_{n-1,n}\}$. Per ipotesi induttiva abbiamo che il Teorema di Thom vale per $U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$, U_n e $(U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}) \cap U_n$ e per il Lemma dei cinque abbiamo che il teorema vale per $U_1 \cup \dots \cup U_n = M$.

□

2.2 Il duale di Poincaré e la classe di Thom

Sia $\mathcal{T} : H^*(M) \rightarrow H_{cv}^{*+n}(E)$ l'isomorfismo di Thom, l'immagine di $1 \in H^0(M)$ determina una classe di coomologia $\Phi \in H_{cv}^n(E)$ che prende il nome di *classe di Thom* di E . Dato che per definizione $\pi_*\Phi = 1$, dalla formula di proiezione abbiamo

$$\pi_*(\pi^*\omega \wedge \Phi) = \omega \wedge \pi_*\Phi = \omega \quad \forall \omega \in H^*(M).$$

Essendo π_* la funzione inversa di \mathcal{T} , otteniamo una formula esplicita per l'isomorfismo di Thom:

$$\mathcal{T}(\omega) = \pi^*\omega \wedge \Phi.$$

Proposizione 2.7. *La classe di Thom Φ di un fibrato vettoriale E di rango n orientato è l'unica classe di coomologia in $H_{cv}^n(E)$ tale che la sua restrizione a qualunque fibra F è un generatore dell'ennesimo gruppo di coomologia a supporto compatto della fibra $H_c^n(F)$.*

Dimostrazione. Dato che $\pi_*\Phi = 1$, $\Phi|_{fibra}$ è una bump form della fibra con integrale 1 quindi un generatore di $H_c^n(F)$. Se $\Phi' \in H_{cv}^n(E)$ è tale che la sua restrizione alle fibre è un generatore, allora

$$\pi_*(\pi^*\omega \wedge \Phi') = \omega \wedge \pi_*\Phi' = \omega.$$

Quindi $\pi^*(\omega) \wedge \Phi' = \mathcal{T}(\omega)$, dunque $\Phi' = \mathcal{T}(1)$. □

Proposizione 2.8. *Siano E ed F rispettivamente un n -fibrato e un m -fibrato vettoriale orientato su M . Consideriamo il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccc} & E \oplus F & \\ \swarrow \pi_2 & & \searrow \pi_1 \\ E & & F \end{array}$$

dove π_1 e π_2 sono le mappe di proiezione sui fattori, allora la classe di Thom di $E \oplus F$ è $\Phi(E \oplus F) = \pi_1^*\Phi(E) \wedge \pi_2^*\Phi(F)$.

Dimostrazione. Per la formula di Künneth, $\pi_1^*\Phi(E) \wedge \pi_2^*(F)$ è una classe in $H_{cv}^{m+n}(E \oplus F)$ la cui restrizione alle fibre è un generatore della classe di coomologia. Essendo unica la classe di coomologia con questa proprietà, non può che essere essa stessa la classe di Thom. \square

Sia S una sottovarietà chiusa e orientata di dimensione k di una n -varietà orientata M . Sia

$$\int_S \in (H_c^k(M))^*$$

il funzionale lineare associato ad S . Per la dualità di Poincaré, esiste unico $\omega_S \in H^{n-k}(M)$ chiamato *duale di Poincaré* di S , caratterizzato dalla proprietà:

$$\int_M \omega_S \wedge \eta = \int_S \eta \quad \forall \eta \in H_c^k(M). \quad (2.2)$$

Abbiamo quindi scoperto che possiamo associare naturalmente ad ogni sottovarietà orientata, una classe di coomologia ω_S . La classe di Thom ci aiuterà a costruire esplicitamente il duale di Poincaré di una generica sottovarietà chiusa e orientata. A tale scopo introduciamo un'importante strumento della topologia differenziale, l'intorno tubolare.

Definizione 2.9. Siano M una m -varietà e $S \subset M$ una k -sottovarietà. Un *intorno tubolare* per S è un fibrato vettoriale $E \rightarrow S$ munito di un embedding $i : E \rightarrow M$ con le seguenti proprietà:

- $i|_S = id_S$ dove identifichiamo S con la sua zero sezione.
- $i(E)$ è un insieme aperto di M .

In questa trattazione identificheremo l'intorno tubolare con la sua immagine $i(E) \subset M$ tenendo presente la sua struttura di fibrato vettoriale su S .

Definizione 2.10. Il *fibrato normale* N_S di una sottovarietà S di M è l'unico fibrato che rende esatta la seguente successione di fibrati vettoriali

$$0 \longrightarrow T_S \longrightarrow T_M|_S \longrightarrow N_S \longrightarrow 0.$$

Dove $T_M|_S$ è la restrizione del fibrato tangente di M ad S .

Teorema 2.11. *Siano M una varietà e $S \subset M$ una sottovarietà chiusa. Esiste sempre un intorno tubolare E per S ed è diffeomorfo al fibrato normale N_S .*

Per una dimostrazione di questo fatto rimandiamo a [Spi99, p.465].

Siano A e B due fibrati vettoriali orientati muniti di due trivializzazioni orientate $\{(\varphi_i, U_i)\}$ e $\{(\psi_i, U_i)\}$. Allora $\{(\psi_i \oplus \varphi_i, U_i)\}$ è una trivializzazione orientata per il fibrato vettoriale $A \oplus B$. Essendo N_S quoziente di spazi orientati, possiamo dare un'orientazione ad N_S chiedendo che

$$N_S \oplus T_S = T_M|_S$$

possieda l'orientazione indotta dalla somma diretta. Se sia M che S sono orientate, possiamo dunque utilizzare l'isomorfismo di Thom col fibrato normale N_S su S . Abbiamo dunque la sequenza di mappe

$$H^*(S) \xrightarrow{\mathcal{T}} H_{cv}^{*+n-k}(N_S) \xrightarrow{i_*} H^{*+n-k}(M).$$

Dove la mappa i_* è definita estendendo a 0 una forma di N_S vista in M .

Proposizione 2.12. (a) *Il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa orientata S in una varietà orientata M è la classe di Thom del fibrato normale di S ; in formule*

$$\omega_S = i_*\Phi \quad \text{in} \quad H^{n-k}(M). \quad (2.3)$$

(b) *La classe di Thom di un fibrato vettoriale orientato $\pi : E \rightarrow M$ su una varietà orientata M è il duale di Poincaré di $s_0(M)$ in E , dove s_0 è la zero sezione.*

Dimostrazione. (a) Per provare questo fatto ci basta mostrare che $i_*\Phi$ soddisfa la (2.2). Siano η una k -forma chiusa a supporto compatto in M , e $j : S \rightarrow N_S$ l'inclusione di S come zero sezione del fibrato $\pi : N_S \rightarrow S$. Dato che π è una retrazione per deformazione su N_S in S , $\pi^*j^* = 1$ in coomologia, quindi $\eta = \pi^*j^*\eta + d\tau$.

$$\begin{aligned} \int_M \eta \wedge i_*\Phi &= \int_{N_S} \eta \wedge \Phi && \text{perché } i_*\Phi \text{ ha supporto in } N_S \\ &= \int_{N_S} (\pi^*j^*\eta + d\tau) \wedge \Phi \\ &= \int_{N_S} (\pi^*j^*\eta) \wedge \Phi && \int_{N_S} d\tau \wedge \Phi = \int_{N_S} d(\tau \wedge \Phi) = 0 \text{ per Stokes} \\ &= \int_S j^*\eta \wedge \pi_*\Phi && \text{per la formula di proiezione} \\ &= \int_S j^*\eta && \text{perché } \pi_*\Phi = 1. \end{aligned}$$

Notiamo inoltre che se S è compatta $\omega_S = i_*\Phi$ è una forma a supporto compatto.

(b) Il fibrato normale di $s_0(M)$ in E , coincide con E perché

$$T_M \oplus E = T_E|_M,$$

ovvero vale la seguente successione esatta corta

$$0 \longrightarrow T_M \longrightarrow T_E|_M \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Grazie alla (2.3), il duale di Poincaré di M in E coincide con la classe di Thom di E . \square

Poiché il fibrato normale di una sottovarietà S in M è diffeomorfo ad un qualsiasi intorno tubolare di S , abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 2.13 (Principio di localizzazione). *Il supporto del duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa e orientata S può essere ridotto in un dato intorno tubolare di S .*

Siamo adesso pronti per alcuni esempi espliciti:

(a) *Il duale di Poincaré di un punto p in M .*

Un intorno tubolare T di un punto p è semplicemente una palla aperta centrata in p . Un generatore di $H_{cv}^n(T)$ è una qualsiasi n -forma in M con supporto compatto e integrale 1.

(b) *Il duale di Poincaré di M .*

In questo caso l'intorno tubolare T è proprio M e $H_{cv}^*(T) = H^*(M)$. Quindi il duale di Poincaré è la funzione costante 1.

(c) *Il duale di Poincaré di un cerchio nel toro.*

In questo caso il duale di Poincaré sarà una 1-forma chiusa a supporto compatto in un intorno tubolare del cerchio, che possiamo pensare come un cilindro, e con integrale totale 1 su ogni segmento perpendicolare alla circonferenza.

Usando la costruzione esplicita del duale di Poincaré $\omega_S = i^*\Phi$ come la classe di Thom del fibrato normale, possiamo provare due importanti proprietà della dualità di Poincaré.

Definizione 2.14. Due sottovarietà R e S in M si dicono *trasverse* se per ogni $x \in R \cap S$

$$T_x R + T_x S = T_x M. \quad (2.4)$$

L'intersezione di due sottovarietà trasverse è una sottovarietà e vale che

$$\text{codim} R \cap S = \text{codim} R + \text{codim} S. \quad (2.5)$$

Inoltre il fibrato normale di $R \cap S$ in M è

$$N_{R \cap S} = N_R \oplus N_S. \quad (2.6)$$

Per maggiori dettagli sull'argomento [GP10, pp. 27-32]. Supponiamo M varietà orientata e R ed S sottovarietà chiuse, orientate e trasverse. Denotiamo la classe di Thom del fibrato vettoriale E con $\Phi(E)$, dalla Proposizione 2.8 deduciamo che

$$\Phi(N_{R \cap S}) = \Phi(N_R \oplus N_S) = \Phi(N_R) \wedge \Phi(N_S). \quad (2.7)$$

Di conseguenza, il duale di Poincaré sarà

$$\omega_{R \cap S} = \omega_R \wedge \omega_S. \quad (2.8)$$

Cioè, tramite la dualità di Poincaré, intersezione trasversa di sottovarietà chiuse e orientate corrisponde al prodotto wedge di forme.

Definizione 2.15. Una mappa liscia $f : M' \rightarrow M$ è detta *trasversa* a una sottovarietà $S \subset M$ se per ogni $x \in f^{-1}(S)$, $df_x(T_x M') + T_{f(x)}S = T_{f(x)}M$.

Siano $f : M' \rightarrow M$ una mappa liscia, $S \subset M$ una sottovarietà di codimensione k chiusa e orientata, T un intorno tubolare sufficientemente piccolo di S con f trasversa a S e T , allora $f^{-1}S$ è una sottovarietà chiusa e $f^{-1}T$ è un suo intorno tubolare in M' . Supponiamo inoltre che S e $f^{-1}S$ siano coorientate da f . Dalla commutatività del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H^*(S) & \xrightarrow{\Phi(T)} & H_{cv}^{*+k}(T) & \xrightarrow{j^*} & H^{*+k}(M) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^*(f^{-1}S) & \xrightarrow{\Phi(f^{-1}T)} & H_{cv}^{*+k}(f^{-1}T) & \xrightarrow{j^*} & H^{*+k}(M'), \end{array}$$

notiamo che se ω_S è la classe di coomologia in M rappresentata dalla sottovarietà S in M , allora $f^*\omega_S$ è la classe di coomologia su M' che rappresenta $f^{-1}S$. Da questo segue $\omega_{f^{-1}(S)} = f^*\omega_S$.

2.3 La forma angolare globale e la classe di Eulero di un fibrato vettoriale di rango 2

In questa sezione costruiremo esplicitamente la classe di Thom nel caso particolare in cui E sia un fibrato vettoriale di rango 2. La costruzione si baserà su due nuovi oggetti: la *forma angolare globale* ψ e la *classe di Eulero* e . La costruzione di questi due oggetti verrà generalizzata nel Capitolo 4 a fibrati vettoriali orientati di rango $n \geq 2$.

Per capire l'idea che sta dietro la nostra costruzione, analizziamo prima il caso in cui $E = M \times \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ sia un fibrato banale. Sia $E^0 = M \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la restrizione del fibrato E al complementare della zero sezione e π_2 la proiezione sul secondo fattore. Sia $\psi = \pi_2^* d\theta / 2\pi$ il pullback del differenziale della funzione angolare standard su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ relativa a un sistema di coordinate polari. Detta $\rho(r)$ una funzione radiale a supporto compatto che vale -1 in un intorno di 0, è facile mostrare che la forma $\Phi = d(\rho(r) \cdot \psi) = d\rho(r) \wedge \psi$ ha supporto compatto, è chiusa e la sua restrizione alle fibre ha integrale 1, di conseguenza è la classe di Thom di E .

Sia adesso E un fibrato vettoriale orientato di rango 2 con spazio base M . Sia $\{U_i\}$ un buon ricoprimento di M che trivializza E . Possiamo dotare E di una struttura Riemanniana. Definiamo quindi un sistema di coordinate polari (r_i, θ_i) su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times U_i = E^0|_{U_i}$; se x_1, \dots, x_n è un sistema di coordinate su U_i allora $\pi^*x_1, \dots, \pi^*x_n, r_i, \theta_i$ è un sistema di coordinate su $E^0|_{U_i}$. Nell'intersezione $U_i \cap U_j$, i raggi r_i, r_j coincidono mentre le coordinate θ_i e θ_j differiscono per una rotazione. Dall'orientabilità di E , ha senso parlare di "direzione antioraria" in ogni fibra. Possiamo definire φ_{ij} come l'angolo di rotazione in senso antiorario dal sistema di coordinate i al sistema di coordinate j :

$$\theta_j = \theta_i + \pi^* \varphi_{ij}, \quad \varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Osservazione 2.16. La richiesta che $\{U_i\}$ sia un buon ricoprimento nasce dal voler ben definire φ_{ij} come mappa liscia a valori in \mathbb{R} . La mappa φ_{ij} è di certo ben definita e liscia a valori in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, per avere la mappa a valori in \mathbb{R} sostituiamo φ_{ij} col suo sollevamento, il quale esiste se $U_i \cap U_j$ è semplicemente connesso.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow & \downarrow p \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \end{array}$$

Notiamo anche che $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$ inoltre, a meno di multipli di 2π , ruotare da i a j e successivamente da j a k , è come ruotare da i a k , di conseguenza

$$\varphi_{ij} + \varphi_{jk} - \varphi_{ik} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Proposizione 2.17. *Esiste una 1-forma ξ_i su U_i tale che*

$$\frac{1}{2\pi}d\varphi_{ij} = \xi_j - \xi_i. \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Sia $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$. Poniamo

$$\xi_i = \frac{1}{2\pi} \sum_j \rho_j d\varphi_{ji}.$$

A questo punto vale che

$$\xi_j - \xi_i = \frac{1}{2\pi} \sum_k \rho_k d\varphi_{kj} - \frac{1}{2\pi} \sum_k \rho_k d\varphi_{ki} = \frac{1}{2\pi} \sum_k \rho_k d(\varphi_{kj} - \varphi_{ki}),$$

ma per quanto osservato

$$d(\varphi_{kj} - \varphi_{ki}) = d\varphi_{ij}$$

quindi

$$\xi_j - \xi_i = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_k \rho_k \right) d\varphi_{ij} = \frac{1}{2\pi} d\varphi_{ij}.$$

□

Dalla formula (2.10) segue che $d\xi_i = d\xi_j$ su $U_i \cap U_j$, di conseguenza i vari pezzi possono essere uniti insieme per definire una 2-forma su M che chiameremo e . Questa forma è chiusa essendo localmente esatta. La classe di coomologia di e in $H^2(M)$ è chiamata *classe di Eulero* del fibrato vettoriale orientato E . Per non creare ambiguità, verrà indicata con $e(E)$.

Proposizione 2.18. *La classe di coomologia di e non dipende dalla scelta di ξ nella costruzione.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere $\{\tilde{\xi}_i\}$ in modo che

$$\frac{1}{2\pi}d\varphi_{ij} = \tilde{\xi}_j - \tilde{\xi}_i = \xi_j - \xi_i.$$

perciò

$$\tilde{\xi}_i - \xi_i = \tilde{\xi}_j - \xi_j = \xi$$

è una 1-forma definita in tutto M , di conseguenza $d\tilde{\xi}_i$ e $d\xi_i$ differiscono per una forma esatta dunque inducono la stessa classe di coomologia. \square

Per quanto visto finora, la classe di Eulero potrebbe dipendere anche da altre scelte, come la metrica Riemanniana su E o la trivializzazione. Tuttavia, la Proposizione 2.21 ci assicurerà la buona definizione.

Dalla (2.9) e la (2.10), su $E^0|_{U_i \cap U_j}$ abbiamo

$$\frac{d\theta_i}{2\pi} - \pi^*\xi_i = \frac{d\theta_j}{2\pi} - \pi^*\xi_j. \quad (2.11)$$

Anche in questo caso, possiamo unire insieme le forme per ottenere una 1-forma in E^0 che prende il nome di *forma angolare globale*, la cui restrizione ad ogni fibra è la forma angolare $(\frac{1}{2\pi})d\theta$. Ovvero, se $\iota_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ è un'inclusione isometrica della fibra su p in E , $\iota_p^*\psi = (\frac{1}{2\pi})d\theta$. La forma angolare globale non è chiusa:

$$d\psi = d\left(\frac{d\theta_i}{2\pi} - \pi^*\xi_i\right) = -\pi^*d\xi_i$$

da cui

$$d\psi = -\pi^*e. \quad (2.12)$$

Come già visto, quando E è un prodotto, ψ è il pullback di $\frac{1}{2\pi}d\theta$ tramite la mappa di proiezione $E^0 = M \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. In questo caso ψ è chiusa e di conseguenza la forma e vale 0.

Osservazione 2.19. La classe Eulero rileva l'incapacità di scegliere in modo coerente un sistema di coordinate polari sulle trivializzazioni del fibrato vettoriale. Questo fatto si traduce in un'*ostruzione* alla chiusura della forma globale ψ la cui restrizione ad ogni fibra di E^0 è un generatore della coomologia della fibra. Se ψ fosse chiusa, dal teorema di Leray-Hirsch [BT95, Th. 5.11] si avrebbe che la coomologia di E^0 sarebbe uguale a quella del fibrato banale con fibre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, in formule

$$H^*(E^0) = H^*(M \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})) = H^*(M \times S^1).$$

La classe di Eulero di un fibrato vettoriale di rango 2 orientato può essere descritta in termini delle funzioni di transizione. Sia $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow SO(2)$ una funzione di transizione di E . Identificando $SO(2)$ con il cerchio unitario nel piano complesso tramite l'identificazione $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{i\theta}$, g_{ij} può essere pensata come una funzione a valori

complessi. In questo modo l'angolo formato dai sistemi di coordinate i e j è $\frac{1}{i} \log g_{ij}$. quindi

$$\theta_i - \theta_j = \pi^* \frac{1}{i} \log g_{ij}$$

e

$$\pi^* \varphi_{ij} = -\pi^* \frac{1}{i} \log g_{ij}.$$

Dato che la proiezione π ha rango massimo, π^* è iniettiva, quindi

$$\varphi_{ij} = -\frac{1}{i} \log g_{ij}.$$

Sia $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}$. Allora

$$\frac{1}{2\pi} d\varphi_{ij} = \xi_j - \xi_i,$$

dove

$$\xi_i = \frac{1}{2\pi} \sum_j \rho_j d\varphi_{ji} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_j \rho_j d \log g_{ji}.$$

Da questo deduciamo che

$$e(E) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_j d(\rho_j d \log g_{ji}) \quad \text{su } U_i. \quad (2.13)$$

Proposizione 2.20. *La classe di Eulero è funtoriale, ovvero, se $f : N \rightarrow M$ è una mappa liscia e E è un fibrato vettoriale orientato di rango 2 su M , allora*

$$e(f^{-1}E) = f^* e(E).$$

Dimostrazione. Dato che le funzioni di transizione per $f^{-1}E$ sono $f^* g_{ij}$, dall'Equazione (2.13) segue immediatamente la tesi. \square

Adesso dimostriamo che la classe di Thom è la classe di coomologia di

$$\Phi = d(\rho(r) \cdot \psi) = d\rho(r) \wedge \psi - \rho(r) \pi^* e, \quad (2.14)$$

dove $\rho(r)$ è una funzione radiale a supporto compatto che vale -1 in un intorno di 0. Sebbene $\rho(r) \cdot \psi$ sia definita solo in E^0 , può essere estesa a tutto E poiché $d\rho \equiv 0$ in un intorno della zero sezione. La nostra Φ ha le seguenti proprietà:

- (a) supporto compatto in direzione verticale;
- (b) chiusa: $d\Phi = -d\rho(r) \wedge d\psi - d\rho(r) \pi^* e = 0$;
- (c) la restrizione alle fibre ha integrale 1:

$$\pi_* \iota_p^* \Phi = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\rho(r) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} = \rho(+\infty) - \rho(0) = 1,$$

dove $\iota_p : E_p \rightarrow E$ è l'inclusione della fibra E_p in E .

Dalla Proposizione 2.7 ne consegue che Φ è la classe di Thom di E . Inoltre, se $s_0 : M \rightarrow E$ è la zero sezione di E

$$s_0^* \Phi = d(\rho(0)) \wedge s_0^* \psi - \rho(0) s_0^* \pi^* e = e.$$

Questo prova la seguente proposizione:

Proposizione 2.21. *Il pullback della classe di Thom di M rispetto alla zero sezione è la classe di Eulero.*

Siano $\{U_i\}$ un ricoprimento trivializzante per E , $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}$ e g_{ij} le funzioni di transizione per E . Poiché

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{d\theta_i}{2\pi} - \pi^* \xi_i \\ &= \frac{d\theta_i}{2\pi} + \frac{1}{2\pi i} \pi^* \sum_j \rho_j d \log g_{ji}, \end{aligned}$$

abbiamo dall'Equazione (2.14) che

$$\Phi = d\left(\rho(r) \frac{d\theta_i}{2\pi}\right) + \frac{1}{2\pi i} \left(\rho(r) \pi^* \sum_j \rho_j d \log g_{ji}\right). \quad (2.15)$$

Questa è una formula esplicita per la classe di Thom nel caso particolare di un fibrato vettoriale di rango 2.

Riportiamo un esempio di calcolo esplicito della classe di Eulero.

Esempio 2.22 (La classe di Eulero del fibrato normale di $\mathbb{C}P^1$ in $\mathbb{C}P^2$). Sia $N = N_{\mathbb{C}P^1 \setminus \mathbb{C}P^2}$ il fibrato normale di $\mathbb{C}P^1$ in $\mathbb{C}P^2$. Poiché $\mathbb{C}P^1$ è una varietà orientata compatta di dimensione reale 2, $H^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{R}$. Vogliamo dunque trovare la classe di Eulero $e(N)$ come un multiplo del generatore di $H^2(\mathbb{C}P^1)$.

Gli aperti $U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_i \neq 0\}$ di $\mathbb{C}P^n$ formano un ricoprimento che fornisce una struttura liscia a $\mathbb{C}P^n$ che chiameremo *ricoprimento standard di $\mathbb{C}P^n$* . Si può dimostrare che la funzione di transizione di N relativa al ricoprimento aperto standard di $\mathbb{C}P^1$ è $g_{01} = z_1/z_0$ nel punto $[z_0, z_1]$. Sia $z = z_1/z_0$ la coordinata di U_0 , che identifichiamo con il piano complesso \mathbb{C} . Sia invece $w = z_0/z_1 = 1/z$ la coordinata di $U_1 \cong \mathbb{C}$. Allora $g_{01} = z = 1/w$ su $U_0 \cap U_1$. La classe di Eulero di N è data da

$$\begin{aligned} e(N) &= -\frac{1}{2\pi i} d\left(\rho_0 d \log \frac{1}{w}\right) \quad \text{su } U_1 \quad \text{dalla (2.13)} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} d(\rho_0 d \log z) \quad \text{su } U_0 \cap U_1, \end{aligned}$$

dove ρ_0 vale 1 in un intorno dell'origine e 0 in un intorno di ∞ del piano complesso $U_0 \cong \mathbb{C}$. Verifichiamo adesso che la classe di Eulero è un generatore di $H^2(\mathbb{C}P^1)$. Fissiamo un cerchio C nel piano complesso in modo tale che il supporto di ρ_0 sia contenuto in C . Sia A_r l'anello centrato nell'origine il cui cerchio esterno è C e l'anello interno è un cerchio B_r

di raggio r . Notiamo che come il bordo di A_r , il cerchio C è orientato in senso antiorario mentre B_r in senso orario. Adesso

$$\int_{\mathbb{C}P^1} e(N) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} d(\rho_0 d \log z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} d(\rho_0 dz/z)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} d(\rho_0 dz/z) &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_r} d(\rho_0 dz/z) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_C \rho_0 dz/z + \int_{B_r} \rho_0 dz/z && \text{per il Teorema di Stokes} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} dz/z \\ &= -2\pi i, \end{aligned}$$

dove il segno meno è dato dall'orientazione oraria su B_r . Per concludere,

$$\int_{\mathbb{C}P^1} e(N) = -\frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) = 1.$$

Capitolo 3

Il complesso di Čech-de Rham

Nei capitoli precedenti abbiamo visto, dati due aperti U e V di una varietà, come associare alla sequenza di inclusioni

$$U \cap V \rightrightarrows U \sqcup V \rightarrow U \cup V$$

una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow \Omega^*(U \cup V) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

chiamata *successione di Mayer-Vietoris*.

In questo capitolo vedremo come generalizzare questo concetto a una quantità numerabile di aperti. Ci serviremo di questa generalizzazione per poter definire la classe di Eulero e la forma angolare globale per fibrati vettoriali di rango n arbitrario. Consideriamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in I}$ di una varietà M , dove l'insieme di indici I è un insieme ordinato di cardinalità al più numerabile. Scriviamo U_{ab} per indicare l'intersezione di due aperti $U_a \cap U_b$, U_{abc} per l'intersezione di tre aperti $U_a \cap U_b \cap U_c$, ecc. Abbiamo così una sequenza di inclusioni di aperti

$$M \leftarrow \bigsqcup_{a_0} U_{a_0} \xleftarrow{\partial_0 \partial_1} \bigsqcup_{a_0 < a_1} U_{a_0 a_1} \xleftarrow{\partial_0 \partial_1 \partial_2} \bigsqcup_{a_0 < a_1 < a_2} U_{a_0 a_1 a_2} \leftarrow \cdots,$$

dove ∂_i è l'inclusione che "ignora" l' i -esimo aperto; per esempio

$$\partial_0 : U_{a_0 a_1 a_2} \rightarrow U_{a_1 a_2}.$$

La sequenza di inclusioni induce una successione di mappe di restrizione tra complessi

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^*(U_{a_0}) \xrightarrow{\delta_0 \delta_1} \prod_{a_0 < a_1} \Omega^*(U_{a_0 a_1}) \xrightarrow{\delta_0 \delta_1 \delta_2} \prod_{a_0 < a_1 < a_2} \Omega^*(U_{a_0 a_1 a_2}) \rightarrow \cdots,$$

dove δ_0 , per esempio, indica la mappa di restrizione indotta dall'inclusione

$$\partial_0 : \bigsqcup_{a_0} U_{a_0 a_1 a_2} \rightarrow U_{a_1 a_2},$$

ovvero

$$\delta_0 : \Omega^*(U_{a_1 a_2}) \rightarrow \prod_{a_0} \Omega^*(U_{a_0 a_1 a_2}).$$

Convenzione. Diciamo che una forma $\omega \in \prod \Omega^q(U_{a_0 \dots a_p})$ ha "componenti" $\omega_{a_0 \dots a_p} \in \Omega(U_{a_0 \dots a_p})$ solo per indici ordinati $a_0 < \dots < a_p$. Per semplicità di notazione, estendiamo la nostra definizione a generiche p -uple di indici con la convenzione che quando due indici sono invertiti la forma cambia di segno:

$$\omega_{\dots a_i \dots a_j \dots} = -\omega_{\dots a_j \dots a_i \dots}.$$

In particolare una forma con indici ripetuti è nulla.

Definiamo un operatore differenziale

$$\delta : \prod \Omega^*(U_{a_0 \dots a_p}) \rightarrow \prod \Omega^*(U_{a_0 \dots a_p a_{p+1}}),$$

in modo che $(\delta\omega)_{a_0 \dots a_p a_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_{p+1}}$. La mappa δ non è altro che somma a segni alterni delle mappe di restrizione δ_i .

Proposizione 3.1. $\delta^2 = 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice verifica:

$$\begin{aligned} (\delta^2\omega)_{a_0 \dots a_{p+2}} &= \sum_i (-1)^i (\delta\omega)_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_{p+2}} \\ &= \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^j \omega_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_{p+2}} \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \omega_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_{p+2}} + \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^{j-1} \omega_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_{p+2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Siamo adesso pronti a enunciare quella che può essere interpretata come una generalizzazione della successione di Mayer-Vietoris.

Proposizione 3.2 (Successione generalizzata di Mayer-Vietoris). *La successione*

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^*(U_{a_0}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{a_0 a_1}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{a_0 a_1 a_2}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

è esatta; in altre parole, la δ -coomologia del complesso è banale.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che $\Omega^*(M)$ coincide con il kernel della prima δ poiché un elemento di $\prod \Omega^*(U_{a_0})$ è una forma globale su M se e solo se le sue componenti coincidono nelle varie intersezioni $U_{a_0 a_1}$.

Sia adesso $\{\rho_a\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_a\}$.

Supponiamo che $\omega \in \prod \Omega^*(U_{a_0 \dots a_p})$ sia un δ -cociclo. Costruiamo una δ -cocatena τ tale per cui $\delta\tau = \omega$ così:

$$\tau_{a_0 \dots a_{p-1}} = \sum_a \rho_a \omega_{aa_0 \dots a_{p-1}}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \delta\tau_{a_0 \dots a_p} &= \sum_i (-1)^i \tau_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_p} \\ &= \sum_{i,a} (-1)^i \rho_a \omega_{aa_0 \dots \hat{a}_i \dots a_p}. \end{aligned}$$

Ma, poiché ω è un cociclo,

$$(\delta\omega)_{aa_0 \dots a_p} = \omega_{a_0 \dots a_p} + \sum_i (-1)^{i+1} \omega_{aa_0 \dots \hat{a}_i \dots a_p} = 0.$$

Perciò

$$\begin{aligned} (\delta\tau)_{a_0 \dots a_p} &= \sum_a \rho_a \sum_i (-1)^i \omega_{aa_0 \dots \hat{a}_i \dots a_p} \\ &= \sum_a \rho_a \omega_{a_0 \dots a_p} \\ &= \omega_{a_0 \dots a_p}. \end{aligned}$$

Da questo segue che ogni cociclo è un cobordo e poiché sapevamo che $\delta^2 = 0$ segue la tesi. \square

Osservazione 3.3. La definizione di τ ci fornisce un operatore di omotopia per il complesso. Scriviamo $K\omega$ per τ , otteniamo:

$$(\delta K\omega)_{a_0 \dots a_p} = \sum (-1)^i \rho_a \omega_{aa_0 \dots \hat{a}_i \dots a_p}$$

e

$$\begin{aligned} (K\delta\omega)_{a_0 \dots a_p} &= \sum \rho_a (\delta\omega)_{aa_0 \dots a_p} \\ &= (\sum \rho_a) \omega_{a_0 \dots a_p} + \sum (-1)^{i+1} \rho_a \omega_{aa_0 \dots \hat{a}_i \dots a_p} \\ &= \omega_{a_0 \dots a_p} - (\delta K\omega)_{a_0 \dots a_p}. \end{aligned}$$

Ovvero

$$K\delta + \delta K = 1.$$

In particolare, se ω è un cociclo allora $\delta K\omega = \omega$. Quindi K rappresenta un'inversa destra di δ , se ristretta ai δ -cocicli.

A questo punto possiamo arrangiare la successione di Mayer-Vietoris a complesso doppio

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U}, \Omega^2) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^2) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^1) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U}, \Omega^0) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \Omega^0) & \longrightarrow & \dots,
 \end{array}$$

dove $C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \prod \Omega^q(U_{a_0 \dots a_p})$. Il complesso doppio $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) = \bigoplus_{p,q \geq 0} C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ è chiamato *complesso di Čech-de Rham*. In generale, un complesso doppiamente graduato $K^{*,*}$ con operatori differenziali δ e d , può essere organizzato a complesso singolarmente graduato K^* , sommando lungo le linee antidiagonali

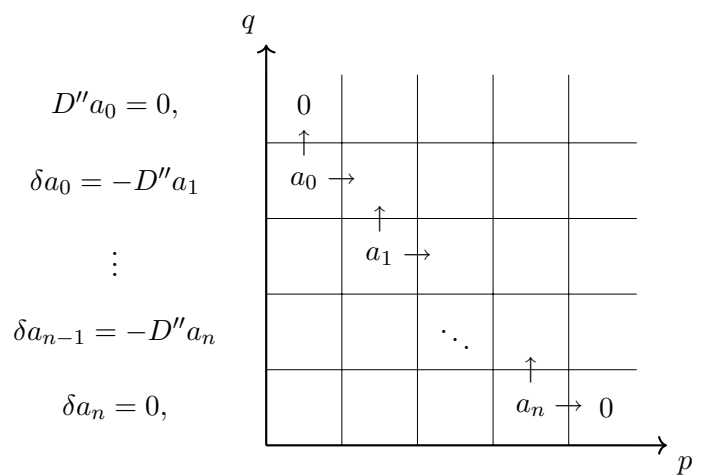
$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$

scegliendo come operatore differenziale

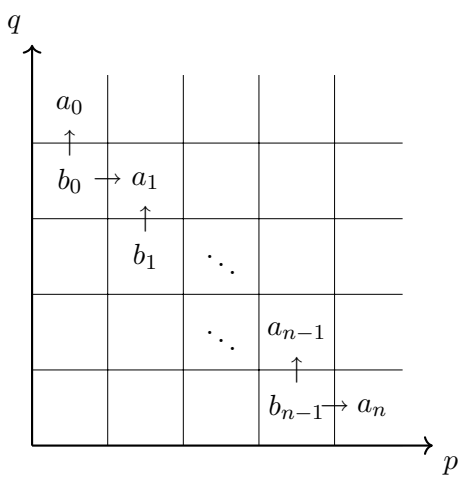
$$D = D' + D'' = \delta + (-1)^p d.$$

Per semplicità di notazione, rappresentiamo il complesso di Čech-de Rham come una tabella, i cui elementi sono punti della tabella.

Un D -cociclo di grado n può essere visto come una stringa del tipo $\varphi = \sum_{i=0}^n a_n$ per cui è soddisfatta la seguente proprietà:



Similmente, un D -cobordo di grado n è una stringa del tipo $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i$ tale che esiste una D -cocatena di grado $n - 1$ come in figura



Dove $a_0 = D''b_0$, $a_1 = \delta b_0 + D''b_1$ ecc.

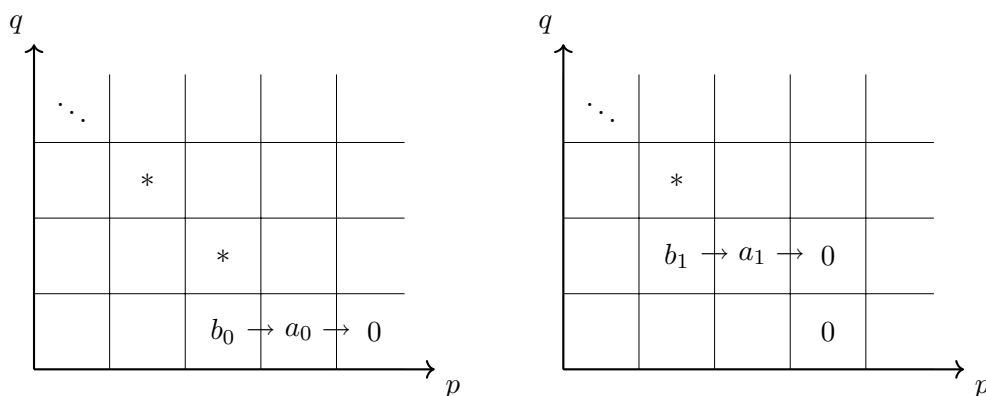
Adesso sfrutteremo l'esattezza delle righe del complesso di Čech-de Rham per provare un'importante risultato.

Proposizione 3.4 (Principio generalizzato di Mayer-Vietoris). *La mappa di restrizione $r : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ induce un isomorfismo in coomologia*

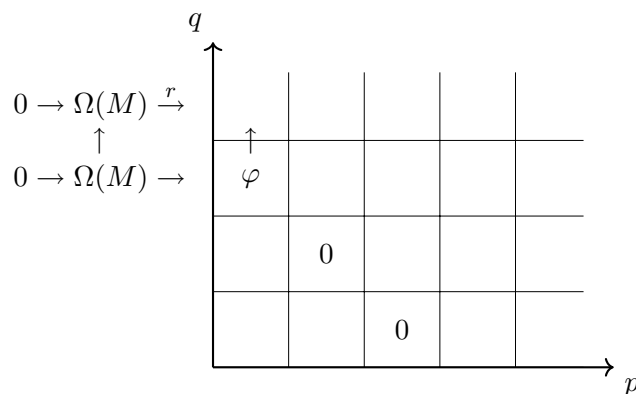
$$r^* : H_{DR}^*(M) \rightarrow H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che la mappa r passa in coomologia poiché commuta coi differenziali $Dr = (\delta + d)r = dr = rd$.

r^* è suriettiva. Sia φ un D -cociclo di grado n . Per δ -esattezza, la componente $(n, 0)$ di φ , diciamo a_0 , sarà un δ -cobordo, ovvero, $\exists b_0$ tale che $\delta(b_0) = a_0$. A questo punto, sottraiamo $D(b_0)$ a φ . Iterando questa procedura n volte, otteniamo un cociclo φ' nella stessa classe di coomologia di φ con unica componente non nulla quella in posizione $(0, n)$. Poiché $\delta\varphi' = 0$ e $d\varphi' = 0$, φ' è una forma globale ed è chiusa e $r^*([\varphi']) = [\varphi]$.



r^* è **iniettiva**. L'iniettività può essere provata in modo analogo, supponiamo che $r(\omega) = D\varphi$, a meno di sostituire φ con φ' ricavato come sopra, possiamo supporre che φ rappresenti una forma globale chiusa, quindi $d\varphi = \omega$.



□

Osservazione 3.5. La dimostrazione della Proposizione 3.4 è molto generale e non si limita alla coomologia di de Rham. Potremmo riformulare quanto ottenuto dicendo: *se tutte le righe di un complesso doppio sono esatte, la D-coomologia del complesso è isomorfa alla coomologia del complesso iniziale.*

A questo punto, chiamiamo il kernel del differenziale più in basso di ogni colonna del complesso di Čech-de Rham $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Lo spazio vettoriale $C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ consiste delle

funzioni localmente costanti sugli aperti $U_{a_0 \dots a_p}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^2(U_{a_0}) & \xrightarrow{\delta} & \prod \Omega^2(U_{a_0 a_1}) & \xrightarrow{\delta} & \prod \Omega^2(U_{a_0 a_1 a_2}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^1(U_{a_0}) & \xrightarrow{\delta} & \prod \Omega^1(U_{a_0 a_1}) & \xrightarrow{\delta} & \prod \Omega^1(U_{a_0 a_1 a_2}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^0(U_{a_0}) & \xrightarrow{\delta} & \prod \Omega^0(U_{a_0 a_1}) & \xrightarrow{\delta} & \prod \Omega^0(U_{a_0 a_1 a_2}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i & & \\
 & & & & C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

La riga in basso

$$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta}$$

è un complesso differenziale e la coomologia del complesso, $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, è chiamata *coomologia di Čech del ricoprimento* \mathcal{U} .

Osservazione 3.6. Se per un dato ricoprimento \mathcal{U} , le colonne del complesso $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ sono esatte (ad esempio se ogni intersezione finita di aperti non vuota è contrattile), per un argomento completamente analogo a quello usato nella Proposizione 3.4 possiamo concludere che

$$H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$$

e di conseguenza otteniamo un isomorfismo tra la coomologia di Čech del ricoprimento \mathcal{U} e la coomologia di de Rham

$$H_{DR}^*(M) \cong H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

Per questo motivo vale il seguente teorema.

Teorema 3.7. *Se \mathcal{U} è un buon ricoprimento della varietà M , la coomologia di de Rham è isomorfa alla coomologia di Čech del ricoprimento*

$$H_{DR}^*(M) \cong H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

In particolare abbiamo il seguente corollario.

Corollario 3.8. *La coomologia di Čech $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ è la stessa per ogni buon ricoprimento \mathcal{U} di M .*

3.1 La formula d'incollamento

Abbiamo visto precedentemente che il complesso di Čech-de Rham $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ e il complesso di de Rham $\Omega^*(M)$ hanno la stessa coomologia. Adesso vogliamo costruire un morfismo di cocatene

$$f : C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow \Omega^*(M)$$

tale che

(a) $f \circ r = 1$, e

(b) $r \circ f$ è omotopa all'identità mediante un'omotopia di cocatene.

Vogliamo ottenere una tale mappa "incollando insieme" le componenti di una D -cocatena del complesso di Čech-de Rham in modo da ottenere una forma globale. Sebbene la formula di f che ne verrà fuori non sia delle più intuitive, essa è ottenuta ripercorrendo i passaggi della Proposizione 3.4.

Proposizione 3.9 (Formula d'incollamento). *Sia K l'operatore di omotopia definito nell'Osservazione 3.3. Se $\alpha = \sum_{i=0}^n \alpha_i$ è una n -cocatena e $D\alpha = \beta = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i$, allora*

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^n (-D''K)^i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n+1} K(-D''K)^{i-1} \beta_i \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^n)$$

è una forma globale tale che $1 - r \circ f = DL + LD$, dove

$$L : C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$$

è un'omotopia di cocatene definita da

$$L\alpha = \sum_{p=0}^{n-1} (L\alpha)_p,$$

dove

$$(L\alpha)_p = \sum_{i=p+1}^n K(-D''K)^{i-(p+1)} \alpha_i \in C^p(\mathcal{U}, \Omega^{n-1-p}).$$

b_0					
a_0	b_1				
	a_1	b_2			
				a_n	b_{n+1}

Per dimostrare la formula d'incollamento ci servirà un lemma tecnico.

Lemma 3.10. Per $i \geq 1$,

$$\delta(D''K)^i = (D''K)^i \delta - (D''K)^{i-1} D''.$$

Dimostrazione del Lemma 3.10. Dato che δ anti-commuta con D'' e poiché $\delta K + K\delta = 1$,

$$\begin{aligned} \delta(D''K)(D''K)^{i-1} &= -D''\delta K(D''K)^{i-1} \\ &= -D''(1 - K\delta)(D''K)^{i-1} \\ &= (D''K)\delta(D''K)^{i-1}. \end{aligned}$$

Iterando questo procedimento $i - 1$ volte arriviamo a $(D''K)^{i-1}\delta(D''K)$. Quindi,

$$\begin{aligned} \delta(D''K)^i &= (D''K)^{i-1}\delta(D''K) \\ &= -(D''K)^{i-1}D''(1 - K\delta) \\ &= -(D''K)^{i-1}D'' + (D''K)^i\delta. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione della Proposizione 3.9. Per mostrare che $f(\alpha)$ è una forma globale, mostriamo che $\delta f(\alpha) = 0$ usando il lemma appena dimostrato e il fatto che $\delta\alpha_i + D''\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}$.

$$\begin{aligned} \delta f(\alpha) &= \sum_{i=0}^n [\delta(-D''K)^i \alpha_i - \delta K(-D''K)^i \beta_{i+1}] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-D''K)^i (\delta\alpha_i - D''\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} K(-D''K)^i (\delta\beta_{i+1} - D''\beta_{i+2}) + \\ &\quad + (-D''K)^n (\delta\alpha_n - \beta_{n+1}) + K(-D''K)^n \delta\beta_{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Adesso verifichiamo che f è un morfismo di cocatene.

$$f(D\alpha) = f(\beta) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (D''K)^i \beta_i.$$

$$df(\alpha) = D''f(\alpha) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (D''K)^i \beta_i.$$

Quindi

$$f(D\alpha) = df(\alpha).$$

Vale inoltre che, se α è una forma globale, $\alpha = \alpha_0$ e

$$f \circ r(\alpha) = f(\alpha) = \alpha_0 = \alpha.$$

La dimostrazione che

$$1 - r \circ f = DL + LD$$

è una facile verifica che può essere provata con dei conti molto simili a quelli visti per provare che $\delta f(\alpha) = 0$ e quindi viene omessa. \square

Utilizzando la Proposizione 3.9 può essere data una descrizione esplicita dell'isomorfismo tra la coomologia di de Rham e la coomologia di Čech.

Proposizione 3.11. *Se $\eta \in C^n(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ è un cociclo di Čech, allora la forma globale corrispondente è data da $f(\eta) = (-1)^n (D''K)^n \eta$.*

Capitolo 4

La classe di Eulero di un fibrato in sfere

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto due oggetti centrali nello studio di fibrati vettoriali: la forma angolare globale ψ e la classe di Eulero e per fibrati vettoriali di rango 2 con gruppo di struttura $SO(2)$. Abbiamo visto che questi oggetti hanno due importanti proprietà:

- (a) La restrizione di ψ alle fibre è un generatore di $H_c^2(\text{fibra})$,
- (b) $d\psi = -\pi^*e$.

Esattamente la stessa procedura affrontata nel Capitolo 2 definisce la forma angolare e la classe di Eulero di un fibrato con fibre S^1 e gruppo di struttura $SO(2)$.

In questo capitolo ci occupiamo di definire questi due oggetti per *fibrati in sfere*, fibrati con fibra S^n con $n \geq 1$ e gruppo di struttura $\text{Diff}(S^n)$ o $O(n+1)$. Mostriamo come la nostra costruzione sia coerente con quella particolare data nel caso $n = 1$. Questa ulteriore generalizzazione ci servirà per dimostrare un importante teorema di topologia differenziale: il Teorema di Poincaré-Hopf.

Definizione 4.1. Un fibrato in sfere E con fibra S^n $n \geq 1$, è *orientabile* se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ di M e una collezione di generatori $[\sigma_\alpha]$ di $H^n(E|_{U_\alpha})$ tale che $[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta]$ in $H^n(E|_{U_\alpha \cap U_\beta})$.

Dato che un generatore dell'ennesimo gruppo di coomologia della fibra è una n -forma con integrale 1, ci sono due possibili generatori che dipendono dall'orientazione della fibra. A priori quello che si può dire è che $[\sigma_\alpha] = \pm[\sigma_\beta]$ su $U_\alpha \cap U_\beta$. Per un fibrato in sfere orientabile, la scelta di un sistema di generatori compatibile è detta *orientazione* del fibrato in sfere. Un fibrato in sfere munito di una data orientazione è detto *orientato*.

Sia E un fibrato vettoriale di rango $n+1$ dotato di una metrica Riemanniana tale che il suo gruppo di struttura si riduca a $O(n+1)$. Possiamo associare ad E un *fibrato*

unitario $S(E)$, un fibrato la cui fibra in x consiste di tutti i vettori unitari di E_x e le cui funzioni di transizione sono le stesse di E . $S(E)$ è un S^n -fibrato con gruppo di struttura $O(n+1)$. Inoltre due fibrati unitari su E ottenuti mediante la scelta di un tensore metrico differente sono sempre omotopi [Mar, 4.5.7] e, per l'assioma di omotopia della coomologia di de Rham, hanno quindi la stessa coomologia.

Osservazione 4.2. Fissiamo un'orientazione della sfera S^n . Se $g \in O(n+1)$ e $[\sigma]$ è un generatore di $H^n(S^n)$ con $\int_{S^n} \sigma = 1$, allora

$$\int_{S^n} g^* \sigma = \int_{g(S^n)} \det g \cdot \sigma = \int_{S^n} \det g \cdot \sigma = \det g.$$

Quindi per una trasformazione ortogonale g , vale che $g^* \sigma$ e σ rappresentano la stessa classe di coomologia se e solo se g ha determinante positivo.

Ricordiamo che un fibrato vettoriale di rango $n+1$ è orientabile se e solo se il suo gruppo di struttura può essere ridotto a $SO(n+1)$.

Proposizione 4.3. *Un fibrato vettoriale E è orientabile se e solo se il suo fibrato unitario $S(E)$ è orientabile.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) fissiamo un generatore $[\sigma] \in H^n(S^n)$ e una trivializzazione $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ per E in modo che le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ assumano valori in $SO(n+1)$. Sia $\rho_\alpha : U_\alpha \times S^n \rightarrow S^n$ la proiezione su S^n e $\pi^{-1}(x)$ la fibra del fibrato in sfere $\pi : S(E) \rightarrow M$ in x . Definiamo $[\sigma_\alpha] \in H^n(S(E)|_{U_\alpha})$ così

$$[\sigma_\alpha] = \varphi_\alpha^* \rho_\alpha^* [\sigma].$$

Per evitare di appesantire la notazione scriveremo $[\sigma_\alpha]|_x$ e $\varphi_\alpha|_x$ per le restrizioni $[\sigma_\alpha]|_{\pi^{-1}(x)}$ e $\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}$. Allora per ogni x in U_α ,

$$[\sigma_\alpha]|_x = (\varphi_\alpha|_x)^* [\sigma].$$

Per $x \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\begin{aligned} [\sigma_\beta]|_x &= [\sigma_\alpha]|_x \\ sse (\varphi_\beta|_x)^* [\sigma] &= (\varphi_\alpha|_x)^* [\sigma] \\ sse [\sigma] &= ((\varphi_\beta|_x)^*)^{-1} (\varphi_\alpha|_x)^* [\sigma] \\ sse [\sigma] &= g_{\alpha\beta}(x)^* [\sigma]. \end{aligned}$$

Poiché $g_{\alpha\beta}$ ha determinante positivo, per l'Osservazione 4.2, $[\sigma] = g_{\alpha\beta}(x)^* [\sigma]$. Quindi $[\sigma_\beta] = [\sigma_\alpha]$ su $U_\alpha \cap U_\beta$, perciò il fibrato in sfere $S(E)$ è orientabile.

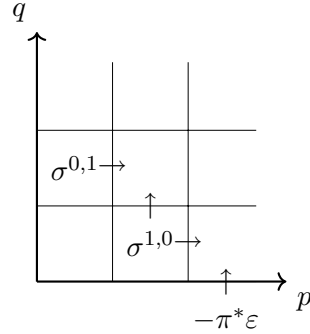
(\Leftarrow) Viceversa, sia $\{U_\alpha, [\sigma_\alpha]\}$ un'orientazione del fibrato vettoriale orientato $S(E)$ e sia (S^n, σ) una sfera orientata in \mathbb{R}^{n+1} , dove σ è una n -forma non banale su S^n . Scegliamo la trivializzazione per $S(E)$

$$\varphi_\alpha : S(E)|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times S^n$$

in modo che φ_α preservi la metrica e $\varphi_\alpha^* \rho_\alpha^* [\sigma] = [\sigma_\alpha]$. Usando lo stesso ragionamento di prima, deduciamo che $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$, la funzione di transizione $g_{\alpha\beta}(x)$ manda $[\sigma]$ in se stessa, quindi $g_{\alpha\beta}(x) \in SO(n+1)$. \square

4.1 La classe di Eulero di un fibrato in sfere orientato

Siamo adesso pronti a definire la classe di Eulero in un contesto più ampio. Supponiamo inizialmente che $\pi : E \rightarrow M$ sia un fibrato in cerchi con gruppo di struttura $\text{Diff}(S^1)$ orientato. In analogia con quanto visto nel Capitolo 2, vogliamo trovare una 1-forma chiusa su E la cui restrizione alle fibre genera la coomologia. Scegliamo un buon ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ di M e una collezione di generatori $[\sigma_\alpha] \in H^1(E|_{U_\alpha})$ che ci forniscono un'orientazione. La collezione $\{\sigma_\alpha\}$ è un elemento $\sigma^{0,1}$ del complesso doppio $C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)$:



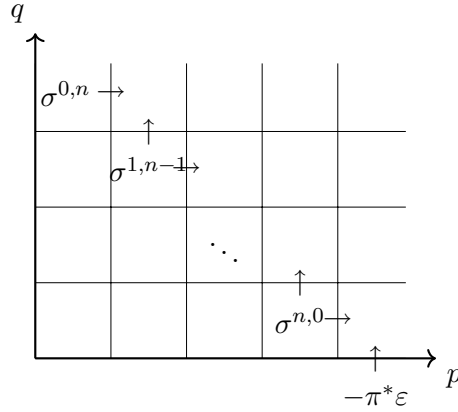
Per la Proposizione 3.4,

$$H_{DR}^*(E) \cong H_D\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)\},$$

per trovare una forma chiusa globale ψ la cui restrizione $r(\psi) = \sigma^{0,1}$, è quindi sufficiente estendere $\sigma^{0,1}$ a un D -cociclo. Per prima cosa osserviamo che $(\delta\sigma^{0,1})_{\alpha\beta} = \sigma_\beta - \sigma_\alpha$ è esatta poiché $[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta]$, quindi $\delta\sigma^{0,1} = d\sigma^{1,0}$ con $\sigma^{1,0} \in C^1(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^0)$. Allora $\sigma^{0,1} + \sigma^{1,0}$ è un D -cociclo se e solo se $\delta\sigma^{1,0} = 0$. Siccome

$$d(\delta\sigma^{1,0}) = \delta(d\sigma^{1,0}) = \delta(\delta\sigma^{0,1}) = 0,$$

$\delta\sigma^{1,0} = i(-\pi^*\varepsilon)$ con $\pi^*\varepsilon \in C^2(\pi^{-1}\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Infatti, poiché \mathcal{U} e $\pi^{-1}\mathcal{U}$ hanno la stessa combinatoria, cioè, $\pi^{-1}U_{a_0\dots a_p}$ è non vuoto se e solo se $U_{a_0\dots a_p}$ è non vuoto, $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi^*} C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Inoltre, poiché $\delta\varepsilon = 0$, ε definisce una classe di coomologia in $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ e grazie all'isomorfismo tra la coomologia di Čech e la coomologia di de Rham, ad ε corrisponde una classe di coomologia $e(E)$ in $H^2(M)$. Mostriamo che per un fibrato in cerchi con gruppo di struttura $SO(2)$, questa classe di coomologia è proprio la classe di Eulero definita nel Capitolo 2. La costruzione precedente si generalizza immediatamente a un generico fibrato in sfere con fibra S^n , $n \geq 1$.



Un fibrato in sfere è orientabile se e solo se è possibile trovare un elemento $\sigma^{0,n} \in C^0(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^n)$ e $\sigma^{1,n-1} \in C^1(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^{n-1})$ tale che

$$\delta\sigma^{0,n} = -D'\sigma^{1,n-1}.$$

Con un ragionamento simile al precedente andiamo avanti fino ad ottenere una D -cocatena

$$\sigma = \sigma^{0,n} + \sigma^{1,n-1} + \dots + \sigma^{n,0},$$

con

$$D\sigma = \delta\sigma^{n,0}$$

e poiché $d(\delta\sigma^{n,0}) = \delta(d\sigma^{n,0}) = \pm\delta^2\sigma^{n-1,1} = 0$,

$$D\sigma = \delta\sigma^{n,0} = i(-\pi^*\varepsilon) \tag{4.1}$$

per un dato $\varepsilon \in C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong C^{n+1}(\pi^{-1}\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Come prima $\delta\varepsilon = 0$, quindi ε definisce una classe di coomologia $e(E) \in H^{n+1}(M) \cong H^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ che prende il nome di *classe di Eulero* del fibrato in sfere orientato E .

La classe di Eulero dipende quindi dalla collezione $\sigma^{0,n}$, la scelta dell'altra classe di orientazione per E fornisce la stessa classe di Eulero con segno opposto $-e(E)$.

Sia E un fibrato vettoriale di rango $n + 1$ orientato. Dotiamo E di una metrica Riemanniana. Il complementare della zero sezione E^0 , può essere retratto per deformazione ad un fibrato unitario $S(E)$, che, grazie alla Proposizione 4.3, possiamo supporre orientato. Possiamo pensare alla classe di Eulero relativa ad E come la classe di Eulero di E^0 , o equivalentemente di $S(E)$. Questa definizione non dipende dal tensore metrico su E poiché per quanto osservato, fibrati unitari ottenuti da tensori metrici differenti sono omotopi.

Adesso dimostriamo che la classe di Eulero è ben definita.

Proposizione 4.4. *Data un'orientazione $\{[\sigma_\alpha]\}$, la classe di Eulero è indipendente dalla scelta di $\sigma^{j,n-j}$ con $j = 0, \dots, n$.*

Dimostrazione. Sia $\bar{\sigma}^{0,n}$ un'altra cocatena in $C^0(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^n)$ che rappresenta l'orientazione $\{[\sigma_\alpha]\}$. Allora $\bar{\sigma}^{0,n} - \sigma^{0,n} = d\tau^{n-1}$ con $\tau^{n-1} \in C^0(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^{n-1})$. Poiché $d(\delta\tau^{n-1}) = d(\bar{\sigma}^{1,n-1} - \sigma^{1,n-1})$,

$$\delta\tau^{n-1} - (\bar{\sigma}^{1,n-1} - \sigma^{1,n-1}) = d\tau^{n-2}$$

con $\tau^{n-2} \in C^1(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^{n-2})$. Iterando più volte il ragionamento, arriviamo a

$$\delta\tau^0 - (\bar{\sigma}^{n,0} - \sigma^{n,0}) = i\tau$$

con $\tau \in C^n(\pi^{-1}\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Infine, applicando δ ad ambo i membri otteniamo

$$\bar{\varepsilon} - \varepsilon = \delta\tau.$$

Quindi $\bar{\varepsilon}$ e ε differiscono per un δ -cobordo, di conseguenza appartengono alla stessa classe di coomologia. \square

Proposizione 4.5. *La classe di Eulero $e(E)$ è indipendente dalla scelta del buon ricoprimento.*

Per la dimostrazione di questa proposizione ci servirà prima un lemma:

Lemma 4.6. *Dati due ricoprimenti aperti $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $\mathcal{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$, \mathcal{B} è un raffinamento di \mathcal{U} se esiste una mappa di raffinamento $\varphi : J \rightarrow I$ tale che $V_\beta \subset U_{\varphi(\beta)}$ $\forall \beta \in J$. La mappa φ induce una mappa tra complessi*

$$\varphi^\# : C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^p(\mathcal{B}, \mathbb{R})$$

in modo che

$$(\varphi^\#\omega)(V_{\beta_1 \dots \beta_q}) = \omega(U_{\varphi(\beta_1) \dots \varphi(\beta_q)}).$$

La mappa $\varphi^\#$ è un morfismo di cocatene e due qualunque mappe di raffinamento $\varphi^\#$ e $\psi^\#$ sono omotope mediante un'omotopia di cocatene del complesso. Inoltre, se \mathcal{U} e \mathcal{B} sono buoni ricoprimenti, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad} & H^{n+1}(\mathcal{B}, \mathbb{R}) \\ & \searrow \simeq & \swarrow \simeq \\ & & H_{DR}^{n+1}(M). \end{array}$$

Una dimostrazione di questo lemma può essere consultata in [BT95, p.111 e 119].

Dimostrazione Proposizione 4.5. Dati due buoni ricoprimenti generici \mathcal{U} e \mathcal{B} , esiste un raffinamento comune \mathcal{M} che sia un buon ricoprimento; allora per il Lemma 4.6, ad $\varepsilon_{\mathcal{U}}, \varepsilon_{\mathcal{B}}$ e $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ corrisponde lo stesso elemento in $H_{DR}^{n+1}(M)$. Quindi la classe di Eulero è indipendente dal ricoprimento. \square

Se la classe di Eulero $e(E) \in H^{n+1}(M)$ è nulla, il δ -cociclo ε è un δ -cobordo. Per l'Equazione (4.1), $D\sigma = 0$, quindi σ corrisponde a una forma globale ψ , le cui restrizioni alle fibre sono generatori della coomologia, e questo avviene se e solo se

- (a) E è orientabile,
- (b) la classe di Eulero $e(E)$ è nulla.

Notiamo che per un fibrato in sfere banale $E = M \times S^n$, il procedimento di estensione di $\sigma^{0,n}$ a D -cociclo, si conclude al primo passaggio perché, preso un generatore $[\sigma] \in H^n(S^n)$ $\rho^*[\sigma]$ è un generatore globale di $H^n(E)$, perciò $\varepsilon = 0$. Per questa ragione possiamo dedurre delle considerazioni analoghe a quelle dell'Osservazione 2.19 anche in questo contesto più generale.

La seguente proposizione ci mostra che i fibrati banali non sono gli unici fibrati in cui la classe di Eulero è nulla.

Proposizione 4.7. *Se il fibrato in sfere orientato E ha una sezione, la classe di Eulero $e(E) = 0$.*

Dimostrazione. Sia s una sezione di E . Sappiamo che $s^*\pi^* = 1$. Dalla costruzione della classe di Eulero

$$-\pi^*\varepsilon = D\sigma$$

per una data D -cocatena σ . Applicando s^* ad ambo i membri otteniamo

$$-\varepsilon = Ds^*\sigma,$$

quindi ε è un cobordo e $e(E) = 0$. □

L'inverso di questa proposizione è falso. Esistono fibrati in sfere orientati la cui classe di Eulero è identicamente nulla ma che non ammettono sezioni globali. Per un esempio esplicito [BT95, 23.16.1].

Adesso mostriamo che per un fibrato in cerchi $\pi : E \rightarrow M$ con gruppo di struttura $SO(2)$, la definizione di classe di Eulero data nel Capitolo 2 coincide con quella data in questo capitolo. Ricordiamo che se θ_i è la coordinata angolare su U_i , allora $[d\theta_i/2\pi]$ è un generatore di $H^1(E|_{U_i})$. Ancora,

$$\frac{d\theta_j}{2\pi} - \frac{d\theta_i}{2\pi} = \pi^* \frac{d\varphi_{ij}}{2\pi} = \pi^*\xi_j - \pi^*\xi_i$$

con ξ_i 1-forme definite su U_i . La classe di Eulero del fibrato in cerchi E era stata definita come la classe di coomologia di $d\xi_i$. Con il formalismo dei complessi doppi, possiamo rappresentare la situazione mediante la seguente tabella:

$\frac{d\theta_i}{2\pi}$	$\frac{\pi^* d\varphi_{ij}}{2\pi}$	
	$\frac{\pi^* \varphi_{ij}}{2\pi}$	$-\pi^* \varepsilon$

\uparrow
 $-\pi^* \varepsilon$

Grazie alla Proposizione 3.11 sappiamo che $e(E) = (-D''K)^2 \varepsilon$, quindi quello che vorremo dimostrare è $d\xi = (D''K)^2 \varepsilon$. Poiché $\delta\xi = \frac{d\varphi}{2\pi}$, grazie all'Osservazione 3.3, possiamo scegliere $\xi = (1/2\pi)Kd\varphi$. Da $\delta(\varphi/2\pi) = -\varepsilon$ segue che

$$-K\varepsilon = \varphi/2\pi + \delta\tau.$$

Per un certo τ , quindi

$$\begin{aligned} (-D''K)^2 &= -dKdK\varepsilon \\ &= dKd((\varphi/2\pi) + \delta\tau) \\ &= dKd(\varphi/2\pi) + dKd\delta\tau \\ &= d\xi + dKd\delta\tau. \end{aligned}$$

Adesso analizziamo il secondo termine:

$$\begin{aligned} dKd\delta\tau &= dK\delta d\tau \\ &= d(1 - \delta K)d\tau \\ &= -\delta dKd\tau. \end{aligned}$$

Ma poiché $Kd\tau \in \Omega^1(M)$, $dKd\tau$ è una forma esatta globale, quindi $\delta dKd\tau = 0$. Come volevamo, $(-D''K)^2 \varepsilon = d\xi$.

4.2 La forma angolare globale di un fibrato in sfere orientato

Usando la Formula d'incollamento, costruiremo ora la forma angolare globale.

Sia $\mathcal{U} = \{U_a\}$ un buon ricoprimento di M . Ricordiamo che la classe di Eulero di E è definita dal seguente diagramma:

α_0				
	α_1			
		\ddots		
			α_n	
				$-\pi^*\varepsilon$

dove $\alpha_0 \in C^0(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^n)$ è l'orientazione di E ,

$$\delta\alpha_i = -D''\alpha_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

e

$$\delta\alpha_n = -\pi^*\varepsilon.$$

Quindi

$$D(\alpha_0 + \dots + \alpha_n) = -\pi^*\varepsilon.$$

Se $\{\rho_a\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_a\}$, allora $\{\pi^*\rho_a\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\pi^{-1}\mathcal{U} = \{\pi^{-1}U_a\}$. In questo modo possiamo definire un'omotopia di cocatene K nel complesso doppio $C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)$ come è stato fatto nell'Osservazione 3.3. Entrambi i K soddisfano

$$\delta K + K\delta = 1.$$

Poiché inoltre

$$\begin{aligned} (K\pi^*\omega)_{a_0\dots a_p} &= \sum (\pi^*\rho_a)(\pi^*\omega)_{aa_0\dots a_{p-1}} \\ &= \pi^* \sum \rho_a \omega_{aa_0\dots a_{p-1}} \\ &= (\pi^*K\omega)_{a_0\dots a_{p-1}}, \end{aligned}$$

K commuta con π^* .

Per la formula d'incollamento,

$$\psi = \sum_{i=0}^n (-1)^i (D''K)^i \alpha_i + (-1)^{n+1} K (D''K)^n (-\pi^*\varepsilon) \quad (4.2)$$

è una forma globale su E . Inoltre

$$\begin{aligned} d\psi &= (-1)^{n+1} dK(D''K)^n(-\pi^*\varepsilon) \\ &= -\pi^*(-1)^{n+1}(D''K)^{n+1}\varepsilon \quad \text{poiché } \pi^* \text{ commuta con } K \text{ e con } d \\ &= -\pi^*e. \end{aligned}$$

Nella formula (4.2) poiché la restrizione di $\pi^*((-1)^n K(D''K)^n \varepsilon)$ alle fibre è 0, la restrizione di ψ ad ogni fibra appartiene alla classe di $\alpha_0|_{\text{fibra}}$, quindi è un generatore della coomologia delle fibre. Dato che l' n -forma ψ soddisfa le proprietà:

(a) la sua restrizione alle fibre genera la coomologia;

(a) $d\psi = -\pi^*e$;

è proprio la *forma angolare globale* di un fibrato in sfere che generalizza ciò che abbiamo visto nel Capitolo 2 per fibrati in cerchi.

Osservazione 4.8. Dalla formula esplicita della classe di Eulero e della forma angolare globale appena descritta, notiamo subito che, detto $\{U_\alpha\}$ il ricoprimento aperto considerato, allora

$$\text{Supp } d\psi \subset \cup \pi^{-1}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) \quad \text{e} \quad \text{Supp } e \subset \cup U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}.$$

Questo poiché dalla definizione di K ,

$$\text{Supp}(K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} \subset \cup_\alpha U_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}.$$

Dato che $\text{Supp } \varepsilon_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \subset U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$, facendo le unioni si ottiene quanto osservato.

Per concludere il capitolo enunceremo senza dimostrarlo, un risultato che generalizza la Proposizione 2.21.

Proposizione 4.9. *Siano $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n orientato, ψ la forma angolare globale relativa ad E^0 e $\rho(r)$ una funzione radiale a supporto compatto che vale -1 in un intorno di 0 .*

La classe di coomologia di

$$\Phi = d(\rho(r) \cdot \psi) \in \Omega_{cv}^n(E)$$

è la classe di Thom del fibrato vettoriale orientato E .

Vale inoltre che il pullback della classe di Thom rispetto alla zero sezione è la classe di Eulero, in formule

$$s^*\Phi = e.$$

Una dimostrazione di questa proposizione può essere consultata in [BT95, p.132].

Capitolo 5

Il Teorema di Poincaré-Hopf

In questo capitolo utilizzeremo la classe di Eulero e la forma angolare globale per dimostrare un noto teorema di topologia differenziale, il Teorema di Poincaré-Hopf, il quale ci permetterà di reinterpretare la caratteristica di Eulero di una varietà compatta come la somma degli indici di un campo vettoriale tangente alla varietà.

5.1 Il numero di Eulero di un fibrato in sfere orientato

Iniziamo la sezione dando la definizione di grado di una mappa liscia.

Definizione 5.1. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra due varietà compatte e orientate di dimensione n . Chiamiamo *grado* di f il numero

$$\deg f = \int_M f^* \alpha,$$

dove α è un generatore di $H^n(N)$, cioè una n -forma $\alpha \in \Omega^n(N)$ tale che $\int_N \alpha = 1$.

Osservazione 5.2. Quella data è una buona definizione. Siano α e α' due generatori di $H^n(N)$, allora $\exists \varphi \in H^{n-1}(N)$ tale per cui $\alpha - \alpha' = d\varphi$. Applicando f^* ad ambo i membri e integrando si ottiene

$$\int_M f^* \alpha - \int_M f^* \alpha' = \int_M df^* \varphi = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal Teorema di Stokes. Quindi il valore dell'integrale non dipende dalla scelta del rappresentante della classe di coomologia in $H^n(N)$.

Dalla definizione di grado possiamo dire solo che $\deg f \in \mathbb{R}$. Quello che mostreremo adesso è che il grado è un numero intero e dipende unicamente dal comportamento del differenziale di f nella controimmagine di un valore regolare.

Proposizione 5.3. Sia $f : M \rightarrow N$ come sopra e $q \in N$ un valore regolare per f . Allora

$$\deg f = \int_M f^* \alpha = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sign } df_p.$$

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che se f non è surgettiva, $\deg f = 0$. Poiché una funzione continua tra spazi compatti è chiusa, l'immagine di f è chiusa quindi dato $q \notin \text{Im}(f)$, $\exists U \subset N \setminus \text{Im}(f)$ intorno di q . Scegliamo una bump n -forma α con supporto in U . Allora $f^*\alpha \equiv 0$, quindi $\deg f = 0$.

Sia adesso f surgettiva. Per il Lemma di Sard [Kos93, p.226], quasi ogni punto nell'immagine di f è regolare. Fissiamo quindi un valore regolare q per f . Dato che M e N sono varietà della stessa dimensione, df_p è un isomorfismo $\forall p \in f^{-1}(q)$. Per il Teorema della funzione inversa, esistono U_p aperti disgiunti tali che $p \in U_p$ e $f|_{U_p} : U_p \rightarrow V_p$ è un diffeomorfismo. Questo ci dice che $f^{-1}(q)$ è un insieme discreto quindi, essendo M compatta, finito. A questo punto, a meno di restringere gli U_p , possiamo supporre che $V_p = U$ sia lo stesso per ogni p e che $f^{-1}(V) = \bigcup U_p$. Scegliamo un generatore $\alpha \in H^n(N)$ il cui supporto è localizzato in un intorno di U . Dato che un diffeomorfismo preserva l'integrale a meno di segno, abbiamo

$$\int_M f^*\alpha = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \int_{U_p} f^*\alpha = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sign } df_p.$$

□

Sia adesso $\pi : E \rightarrow M$ un $(k-1)$ -fibrato in sfere su una varietà compatta e orientata M di dimensione k . Poiché $H^k(M) \cong \mathbb{R}$, la classe di Eulero di E può essere identificata col numero $\int_M e(E)$, che prende il nome di *numero di Eulero* di E . Il numero di Eulero di una varietà M è per definizione il numero di Eulero del fibrato tangente unitario $S(T_M)$ relativo a una metrica Riemanniana su M . Mentre il numero di Eulero di un fibrato in sfere orientato è definito a meno di segno, dipendente dalla scelta dell'orientazione su M e su E , il numero di Eulero di una varietà orientata M è ben definito se scegliamo su $S(T_M)$ l'orientazione indotta da M .

Nel capitolo precedente abbiamo visto che se esiste una sezione globale per un fibrato in sfere, allora la classe di Eulero associata è identicamente nulla. Quello che mostreremo adesso è che un fibrato in sfere con gruppo di struttura $O(k)$ ammette sempre una sezione definita ovunque, tranne in un numero finito di punti e che la classe di Eulero associata al fibrato è legata al comportamento locale della sezione in prossimità di questi punti.

Proposizione 5.4. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un $(k-1)$ -fibrato in sfere su una varietà compatta di dimensione k . Supponiamo che il gruppo di struttura di E possa essere ridotto a $O(k)$. Allora E ammette una sezione su $M \setminus \{x_1, \dots, x_q\}$ per un numero finito di punti di M .*

Per la dimostrazione di questa proposizione avremmo bisogno di un corollario del Teorema di trasversalità di Thom.

Lemma 5.5. *Data una sottovarietà Z di una varietà Y , ogni mappa $f : X \rightarrow Y$ può essere resa trasversa a Z a meno di piccole perturbazioni.*

Per una dimostrazione di questo risultato rimandiamo a [GP10, p.68].

Dimostrazione Proposizione 5.4. Poiché il gruppo di struttura di E è $O(k)$, sappiamo che esiste un fibrato vettoriale E' di rango k munito di una metrica Riemanniana tale che $S(E') = E$. Una sezione s' di E' su M ci fornisce quindi una sezione parziale di E : $s(x) = \frac{s'(x)}{\|s'(x)\|}$, con la norma indotta dal tensore metrico. Chiamiamo Z il luogo di zeri di s' . Il nostro claim è che, a meno di piccole perturbazioni della mappa s' :

- s' continua ad essere una sezione di E ,
- il luogo di zeri Z può essere assunto finito.

Sia t una generica sezione di E' , supponiamo che f sia una perturbazione di t e f sia trasversa alla zero sezione. Allora $g = \pi \circ f$ è una perturbazione di $\pi \circ t$, che è l'identità. Quindi, a meno di scegliere una perturbazione sufficientemente piccola, possiamo assumere g diffeomorfismo. Per una tale f , definiamo $s'(x) = f(g^{-1}(x))$. Quindi $\pi \circ s' = 1$ inoltre s' è trasversa a $s_0(M)$, ovvero, $S = s'(M)$ e $S_0 = s_0(M)$ si intersecano trasversalmente. Inoltre poiché

$$\dim S + \dim S_0 = \dim E,$$

$Z = S_0 \cap S$ è un insieme discreto ed essendo contenuto in un compatto è anche finito. \square

Supponiamo adesso che s sia una sezione su un intorno punturato di un punto x in M . Possiamo scegliere l'intorno abbastanza piccolo in modo da essere diffeomorfo a un disco punturato in \mathbb{R}^k e trivializzante per E . Sia D_r un intorno aperto di x corrispondente alla palla di raggio r in \mathbb{R}^k rispetto al diffeomorfismo appena descritto. Come sottoinsieme aperto di M , D_r ha naturalmente un'orientazione. Scegliamo un'orientazione della sfera S^{k-1} in modo che l'isomorfismo $E|_{D_r} \simeq D_r \times S^{k-1}$ preservi l'orientazione. Il *grado locale* di una sezione s in x è definito essere il grado della composizione delle mappe

$$\partial \bar{D}_r \xrightarrow{s} E|_{\bar{D}_r} \simeq \bar{D}_r \times S^{k-1} \xrightarrow{\rho} S^{k-1}$$

dove ρ è la proiezione e \bar{D}_r è la chiusura di D_r .

Teorema 5.6. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un $(k-1)$ -fibrato in sfere orientato su una varietà compatta e orientata di dimensione k . Se E ha una sezione definita su $M \setminus \{x_1, \dots, x_q\}$, il numero di Eulero di E è la somma dei gradi locali di s in x_1, \dots, x_q .*

Prima di iniziare la dimostrazione, mostriamo che è possibile spostare il supporto della classe di Eulero lontano da x_1, \dots, x_q .

Lemma 5.7. *Sia M una varietà e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di M . Dati dei punti x_1, \dots, x_q su M , esiste un raffinamento $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tale che $V_\alpha \subset U_\alpha$ e ogni x_i ha un intorno W_i contenuto in un unico V_α e disgiunto da $V_{\alpha'}$ con $\alpha' \neq \alpha$.*

Dimostrazione Lemma 5.7. Supponiamo $x_i \in U_1$. Sia W_1 un intorno aperto di x_1 tale che $x_1 \in W_1 \subset \bar{W}_1 \subset U_1$. Definiamo un nuovo ricoprimento aperto $\{U'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ chiedendo che $U'_1 = U_1$ e $U'_\alpha = U_\alpha \setminus \bar{W}_1$ per $\alpha \neq 1$. In questo modo l'intorno W_1 di x_1 è disgiunto da ogni U'_α con $\alpha \neq 1$. Ripetendo questo procedimento per x_2, \dots, x_q si ottiene il ricoprimento cercato. \square

Dimostrazione Teorema 5.6. Sia adesso $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento di M che trivializza E . Per il Lemma 5.7 possiamo assumere che ogni x_i abbia un intorno W_i contenuto in un unico U_α , inoltre a meno di raffinare ulteriormente, possiamo supporre che $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sia un buon ricoprimento. Costruiamo la forma angolare globale ψ e la classe di Eulero e relative a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Dall'Osservazione 4.8, dato che $\text{Supp } e \subset \cup U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}}$, la forma e deve annullarsi in W_i per ogni $i = 1, \dots, q$. Quindi il supporto di e è lontano dai punti x_1, \dots, x_q .

Per ogni i scegliamo una palla aperta D_i centrata in x_i tale che $\bar{D}_i \subset W_i$. Allora

$$\begin{aligned} \int_M e &= \int_{M \setminus \cup D_i} e = \int_{M \setminus \cup D_i} s^* \pi^* e \\ &= - \int_{M \setminus \cup D_i} s^* d\psi \\ &= \sum_i \int_{\partial \bar{D}_i} s^* \psi. \end{aligned}$$

La prima uguaglianza vale perché s è una sezione globale su $M \setminus \cup D_i$, la seconda segue da $\pi^* e = -d\psi$ e la terza si ottiene usando il Teorema di Stokes, ricordando che $\partial \bar{D}_i$ ha orientazione opposta a $\partial(M \setminus \cup D_i)$.

Poiché $d\psi = 0$ su $E|_{W_i}$ la forma ψ definisce una classe di coomologia in $H^{k-1}(E|_{W_i})$ di cui è un generatore. Detto σ un generatore di $H^{k-1}(S^{k-1})$, $\rho^* \sigma$ si restringe a un generatore di ogni fibra di $E|_{W_i}$. Quindi $\rho^* \sigma$ e ψ definiscono la stessa classe di coomologia, cioè

$$\psi - \rho^* \sigma = d\tau$$

per una certa $(k-2)$ -forma τ in $E|_{W_i}$. Applicando s^* ad ambo i membri si ottiene

$$s^* \psi - s^* \rho^* \sigma = s^* d\tau.$$

Per Stokes,

$$\int_{\partial \bar{D}_i} s^* \psi - \int_{\partial \bar{D}_i} s^* \rho^* \sigma = \int_{\partial \bar{D}_i} ds^* \tau = 0.$$

Da ciò si ottiene

$$\int_{\partial \bar{D}_i} s^* \psi = \text{grado locale di } s \text{ in } x_i.$$

Unendo questo risultato alla formula appena trovata per il numero di Eulero, si ottiene ciò che volevamo

$$\int_M e = \sum_i (\text{grado locale di } s \text{ in } x_i).$$

□

Il teorema può essere riformulato in termini di fibrati vettoriali. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale orientato di rango k su una varietà di dimensione k compatta e orientata e s una sezione di E con un numero finito di zeri. La *molteplicità* di uno zero x di s è definito come il grado locale di x come singolarità della sezione $s/||s||$ del

fibrato unitario di E relativo a una struttura Riemanniana. (Osserviamo che questa definizione di indice è indipendente dalla struttura Riemanniana perché il grado locale è un invariante omotopico.) Possiamo pensare la classe di Eulero come *il duale di Poincaré del luogo di zeri Z di s* in cui ogni punto di Z viene contato tante volte quante la sua molteplicità.

5.2 La caratteristica di Eulero e il Teorema di Poincaré-Hopf

In questa sezione concludiamo la nostra trattazione mostrando che il numero di Eulero $\int_M e$ è uguale alla caratteristica di Eulero $\chi(M) = \sum (-1)^q \dim H^q(M)$. Da questo dedurremmo come corollario il Teorema di Poincaré-Hopf. Assumeremo che la varietà M sia orientata e compatta.

Sia $\{\omega_i\}$ una base dello spazio vettoriale $H^*(M)$. Dalla dualità di Poincaré abbiamo che esiste una base $\{\tau_i\}$ con la proprietà che $\int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} rappresenta la delta di Kronecker. Siano inoltre π e ρ le proiezioni di $M \times M$ su M :

$$\begin{array}{ccc} & M \times M & \\ \swarrow \pi & & \searrow \rho \\ M & & M \end{array}$$

Dalla formula di Künneth, $H^*(M \times M) = H^*(M) \otimes H^*(M)$ e $\{\pi^*\omega_i \wedge \rho^*\tau_j\}$ ne è una base. Scriviamo il duale di Poincaré η_Δ della diagonale Δ in $M \times M$ come combinazione lineare di elementi della base $\eta_\Delta = \sum c_{ij} \pi^*\omega_i \wedge \rho^*\tau_j$.

Lemma 5.8. $\eta_\Delta = \sum (-1)^{\deg \omega_i} \pi^*\omega_i \wedge \rho^*\tau_i$.

Dimostrazione. Calcoliamo $\int_\Delta \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_l$ in due modi diversi. Sia $\iota : M \rightarrow \Delta \subset M \times M$ l'inclusione diagonale di M nel prodotto, allora:

$$\int_\Delta \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_l = \int_M \iota^*\pi^*\tau_k \wedge \iota^*\rho^*\omega_l = \int_M \tau_k \wedge \omega_l = (-1)^{(\deg \tau_k)(\deg \omega_l)} \delta_{kl}.$$

Inoltre, grazie alla definizione del duale di Poincaré:

$$\begin{aligned} \int_\Delta \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_l &= \int_{M \times M} \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_l \wedge \eta_\Delta \\ &= \sum c_{ij} \int_{M \times M} \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_l \wedge \pi^*\omega_i \wedge \rho^*\tau_j \\ &= c_{ij} (-1)^{(\deg \tau_k + \deg \omega_l)(\deg \omega_i)} \int_{M \times M} \pi^*(\omega_i \wedge \tau_k) \rho^*(\omega_l \wedge \tau_j) \\ &= (-1)^{(\deg \tau_k + \deg \omega_l) \deg \omega_k} c_{kl}. \end{aligned}$$

Uguagliando le due equazioni otteniamo

$$c_{kl} = \delta_{kl} (-1)^{\deg \omega_k},$$

come volevamo. □

Lemma 5.9. *Il fibrato normale N_Δ della diagonale Δ in $M \times M$ è isomorfo al fibrato tangente T_Δ .*

Dimostrazione. Poiché l'inclusione diagonale ι manda M in modo diffeomorfo su Δ , $\iota^*T_\Delta = T_M$. Dal seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_\Delta & \longrightarrow & T_{M \times M}|_\Delta & \longrightarrow & N_\Delta \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & T_M & \longrightarrow & T_M \oplus T_M & \longrightarrow & T_M \longrightarrow 0 \end{array}$$

segue che $N_\Delta \simeq T_M \simeq T_\Delta$. □

Ricordiamo che il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa e orientata S è rappresentato dalla classe di Thom di un intorno tubolare su S . Quindi, grazie a quanto appena dimostrato e alla Proposizione 4.9,

$$\begin{aligned} \int_\Delta \eta_\Delta &= \int_\Delta \Phi(N_\Delta) \\ &= \int_\Delta e(N_\Delta) \\ &= \int_\Delta e(T_\Delta) \\ &= \int_M e(T_M). \end{aligned}$$

Possiamo adesso dare un'ulteriore interpretazione del numero di Eulero di M come il numero di auto-intersezioni della diagonale Δ in $M \times M$. (Ovvero il numero $\int_\Delta \eta_\Delta = \int_{M \times M} \eta_\Delta \wedge \eta_\Delta$.)

Usando il Lemma 5.8 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_\Delta \eta_\Delta &= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_\Delta \pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_i \\ &= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M \iota^* \pi^* \omega_i \wedge \iota^* \rho^* \tau_i \\ &= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M \omega_i \wedge \tau_i \\ &= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \\ &= \sum_q (-1)^q \dim H^q(M) \\ &= \chi(M). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 5.10. *Il numero di Eulero di una varietà compatta e orientata $\int_M e(T_M)$ è uguale alla caratteristica di Eulero $\chi(M) = \sum_q (-1)^q \dim H^q(M)$.*

Da questa proposizione possiamo derivare in modo semplice il Teorema di Poincaré-Hopf. Sia V un campo vettoriale con zeri isolati su M . Chiamiamo *indice* di V rispetto allo zero u il grado locale della mappa $V/\|V\|$ in u come sezione del fibrato tangente unitario di M relativo a una qualche metrica Riemanniana. Dal Teorema 5.6 abbiamo che la somma degli indici di V è il numero di Eulero di M . Grazie all'uguaglianza tra numero di Eulero e caratteristica di Eulero appena dimostrata abbiamo il seguente teorema.

Teorema 5.11 (Teorema di Poincaré-Hopf). *La somma degli indici di un campo vettoriale su una varietà compatta e orientata M è uguale alla caratteristica di Eulero di M .*

Bibliografia

- [BT95] R. Bott and L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1995.
- [GP10] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, AMS Chelsea Publishing, AMS Chelsea Pub., 2010.
- [HPoM02] A. Hatcher, Cambridge University Press, and Cornell University. Dept. of Mathematics, *Algebraic topology*, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.
- [Kos93] Antoni A. Kosinski, *Differential manifolds*, 1st ed., Pure and applied mathematics 138, Academic Press, 1993.
- [Mar] Bruno Martelli, *Manifolds*.
- [Spi99] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, no. v. 1, Publish or Perish, Incorporated, 1999.