Idea dei metodi iterativi

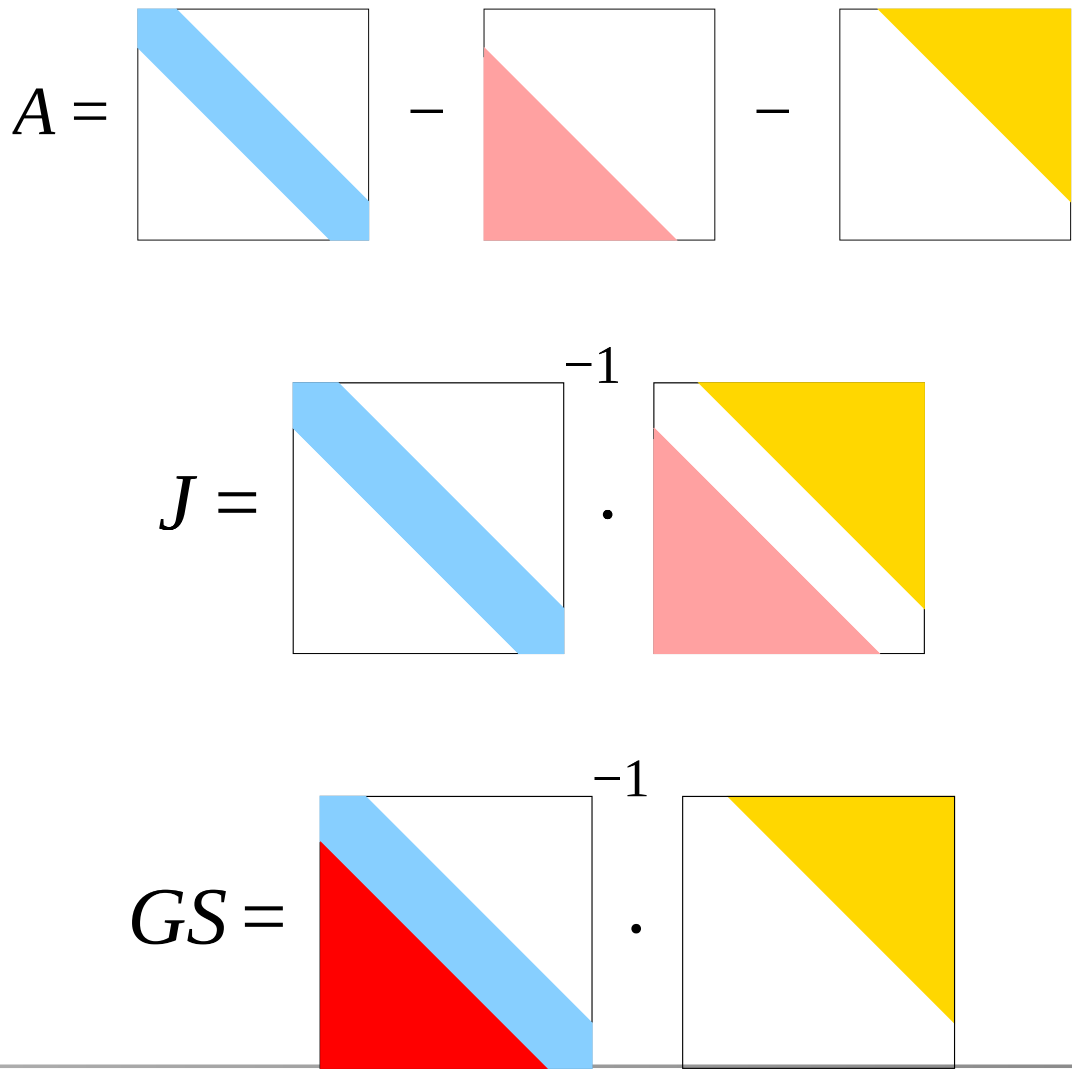
Problema: trovare la soluzione $\boldsymbol{x}^*$ del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = b$

Se $A = M - N$, e $P = M^{-1}N$, $q = M^{-1}b$

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = P\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{q}$$

è una iterazione che ha punto fisso $\boldsymbol{x}^*$ e quindi potrebbe convergere a $\boldsymbol{x}^*$

Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel: idea grafica



Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel: formule

Metodo di Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Metodo di Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Da LaTeX a Fortran

Occorre un ciclo per l'iterazione

```
DO k=1,maxiter
   calcolo il valore x^(k)
   se ||x^(k) - x^(k-1)|| < ε termino
END DO
```

Il criterio d'arresto si può ottenere come al solito definendo due variabili `xold` e `xnew` che rappresentano il vettore all'entrata del ciclo e il vettore aggiornato (*moralmente* $\boldsymbol{x}^{(k-1)}$ e $\boldsymbol{x}^{(k)}$)

L'istruzione immediatamente prima dell'uscita dal ciclo sarà `xold=xnew`

Da LaTeX a Fortran

La condizione

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\| < \varepsilon$$

diventa

```
IF (MAXVAL(ABS(xold-xnew))<1.d-12) EXIT
```

Da $\LaTeX$ a Fortran

Ad ogni passo k occorre calcolare le n componenti di `xnew`, occorre un ciclo

```
DO i=1,n
   calcolo il valore x_i^(k)
END DO
```

dove

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Da \LaTeX a Fortran

Per calcolare $x_i^{(k)}$ occorre calcolare le due sommatorie

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}$$

questo si può fare con un terzo ciclo

```
somma=0
DO j=1,i-1
   somma=somma+a(i,j)*xold(j)
END DO
DO j=i+1,n
   somma=somma+a(i,j)*xold(j)
END DO
```

Da $\LaTeX$ a Fortran

Più furbescamente, usando i comandi aggregati, si può sostituire

```
somma=0
DO j=1,i-1
   somma=somma+a(i,j)*xold(j)
END DO
DO j=i+1,n
   somma=somma+a(i,j)*xold(j)
END DO
```

con il più comodo

```
somma=SUM(a(i,1:i-1)*xold(1:i-1))
+SUM(a(i,i+1:n)*xold(i+1:n))
```