Zeri di una funzione

Calcolare numericamente soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0.$$

- Analisi teorica del problema: esistenza, localizzazione e condizionamento delle soluzioni
- Scelta di un algoritmo adeguato, in base alle informazioni a disposizione, al modello e alle nostre esigenze
- Analisi teorica del metodo numerico: convergenza globale, criterio d'arresto, ecc.

Zeri di polinomi

Se f è un polinomio, il problema è più semplice.

Problemi tipici e algoritmi utilizzati:

- Calcolare tutti gli zeri (Aberth, QR)
- Calcolare uno zero reale o complesso (iterazioni di punto £sso, bisezione)

Nel secondo problema all'algoritmo si premette un'analisi che permette di localizzare lo zero (per esempio trovando un intervallo che lo contiene).

Metodo di bisezione

Se f ha una sola radice ξ in $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$

Si calcolano le successioni a_n e b_n con $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e a ogni passo:

$$c = \frac{a_n + b_n}{2}$$

se $\quad f(c) = 0 \quad$ allora $\quad \xi = c$

se $\quad f(c)f(a_n) > 0 \quad$ allora $\quad a_{n+1} = c, \quad b_{n+1} = b_n$

altrimenti $\quad a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c$

Criterio d'arresto: $|b_n - a_n| < \varepsilon$

Metodo di bisezione

Dalla continuità di $f(x)$ segue che il metodo di bisezione converge ($\lim a_n, b_n = \xi$) e poiché

$$|b_n - a_n| = \frac{|b - a|}{2^n}$$

Il numero di passi necessario perché $|b_n - a_n| < \varepsilon$ è

$$n > \log_2 \left(\frac{|b - a|}{\varepsilon} \right)$$

Convergenza lineare: si guadagna una cifra decimale ogni $\log_2 10$ passi

Metodo di bisezione

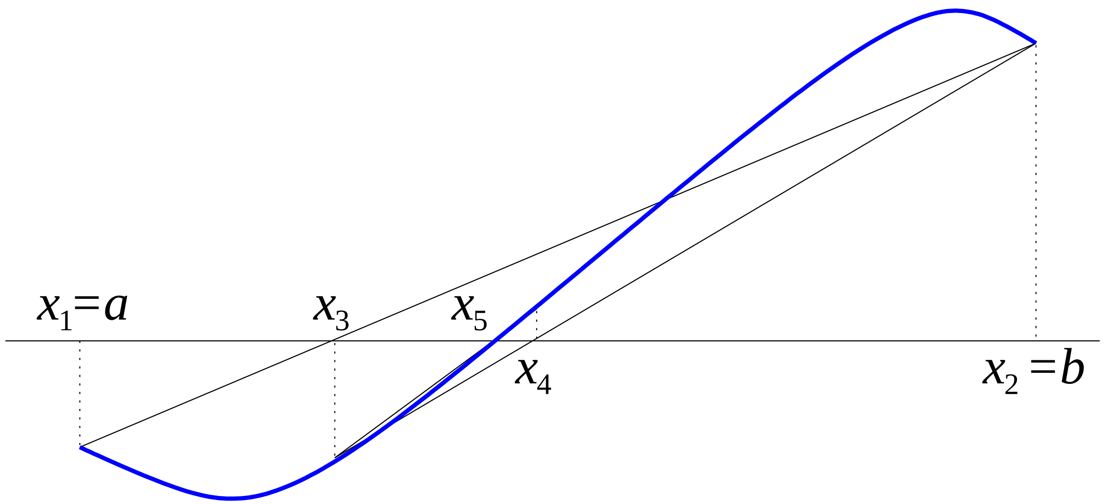
Numero di passi richiesti per $|b-a|=1$:

precisione	prec. di macchina	numero passi
singola	$\varepsilon = 1.19 \cdot 10^{-7}$	24
doppia	$\varepsilon = 2.22 \cdot 10^{-16}$	53
quadrupla	$\varepsilon = 1.93 \cdot 10^{-34}$	112

Il numero di passi non dipende dal condizionamento del problema, ma l'accuratezza della soluzione sì

Metodo delle secanti

Ad ogni passo si costruisce la retta per $(x_i, f(x_i))$ e $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, e la si interseca con l'asse delle ascisse



$$x_{i+1} = x_i + f(x_i)\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

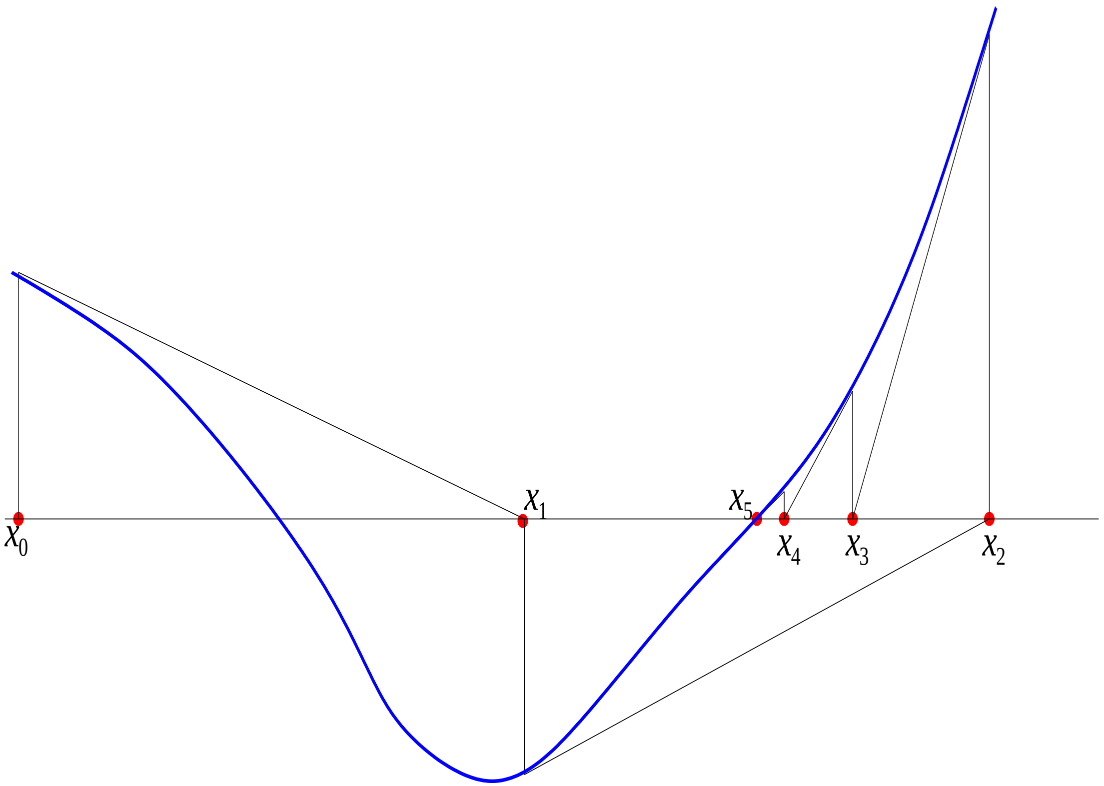
Metodo delle secanti

Il metodo ha ordine di convergenza pari alla sezione aurea

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Metodo di Newton (o delle tangenti)

Ad ogni passo si costruisce la tangente al gra£co nel punto $(x_k, f(x_k))$, e la si interseca con l'asse delle ascisse:



Metodo di Newton

Il passo dell'iterazione è dato da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

La scelta del punto iniziale richiede un'analisi a priori. Se f è un polinomio l'iterazione è razionale.

- Per radici semplici l'ordine di convergenza è almeno quadratico
- Per radici multiple l'ordine di convergenza è lineare

Metodo di Halley

È l'iterazone data da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[1 - \frac{2f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2} \right]^{-1}$$

- Per radici semplici l'ordine di convergenza è almeno cubico
- Per radici multiple l'ordine di convergenza è lineare

Metodo di Ruf£ni-Horner

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, si costruisce:

$$\begin{cases} b_n = a_n, \\ b_{n-1} = b_n x + a_{n-1}, \\ \vdots \\ b_{n-k} = b_{n-k+1} x + a_{n-k}, \\ \vdots \\ b_1 = b_2 x + a_1, \\ b_0 = b_1 x + a_0, \end{cases}$$

Si dimostra che $b_0 = p(x)$ e il costo è di $2n$ operazioni aritmetiche.

Calcolo delle derivate di un polinomio

Analogamente, con basso costo computazionale:

$$\begin{cases} c_n = b_n, \\ c_{n-1} = c_n x + b_{n-1}, \\ \vdots \\ c_{n-k} = c_{n-k+1} x + b_{n-k}, \\ \vdots \\ c_2 = c_3 x + b_2, \\ c_1 = c_2 x + b_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} d_n = c_n, \\ d_{n-1} = d_n x + c_{n-1}, \\ \vdots \\ d_{n-k} = d_{n-k+1} x + c_{n-k}, \\ \vdots \\ d_2 = d_3 x + c_2. \end{cases}$$

Si dimostra che $c_1 = p'(x)$, $d_2 = p''(x)/2$, in modo analogo si ottengono i coef£cienti del polinomio di Taylor