1 SPAZI

DEFINIZIONE 1.1: (X, T) si dice **spazio topologico** se $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ è tale che:
- $\emptyset, X \in T$;
- $\mathcal{U}_i \in T \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_i \mathcal{U}_i \in T$;
- $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in T \Rightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in T$.

T si dice **topologia** su X. Gli $\mathcal{U} \in T$ si dicono **aperti**. $\mathcal{C}$ si dice **chiuso** se $X \setminus \mathcal{C} \in T$.

DEFINIZIONE 1.2: (X, d) si dice **spazio metrico** se $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ è tale che:
- $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Una tale d si chiama **distanza** su X.

DEFINIZIONE 1.3: $(X, \|.\|)$ si dice **spazio normato** se $\|.\|: X \to \mathbb{R}^+$ è tale che:
- $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$.

Una tale $\|.\|$ si dice **norma** su X.
Se non è verificato che $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|.\|$ si dice **seminorma** su X e X **spazio seminormato**.

Esempi:
1) $(C([a, b]), \|.\|)$ è uno spazio normato con
$$\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)|.$$
2) $(C(\mathbb{R}), \|.\|_n)$ è uno spazio seminormato $\forall n \in \mathbb{N}$ con
$$\|f\|_n = \max_{[-n,n]} |f(x)|.$$
   Infatti basta scegliere f continua che vale 0 in $[-n, n]$ ed è $\neq 0$ altrove.

Osservazione: $(X, \|.\|)$ spazio vettoriale normato è anche uno spazio metrico con la distanza
$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Osservazione: (X, d) spazio metrico è anche uno spazio topologico con la topologia
$$T = \left\{ \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \,\middle|\, x_i \in X, r_i \in \mathbb{R}^+ \right\},$$
dove
$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x_0, x) < r\}.$$

Notazione: Se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotiamo con $\|.\|_p$, $p > 1$, l'applicazione
$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p}.$$

LEMMA 1.1 (Disuguaglianza di Hölder): Siano $x_1, \dots, x_n \geq 0$, $y_1, \dots, y_n \geq 0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $1 \leq p, q < +\infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Dimostrazione:

$f(x) = x^p$ è convessa in $[0, +\infty)$, dunque, presi $\widetilde{x_1}, \dots, \widetilde{x_n} \in (0, +\infty)$ e $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$ tali che $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$, abbiamo che:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \widetilde{x_i}\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \widetilde{x_i}^p.$$

Riscriviamo la nostra tesi:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q \Leftrightarrow \langle x, y \rangle^p \leq \|x\|_p^p \|y\|_q^p \Leftrightarrow \frac{\langle x, y \rangle^p}{\|y\|_q^p} \leq \|x\|_p^p \Leftrightarrow \langle x, \frac{y}{\|y\|_q} \rangle^p \leq \|x\|_p^p.$$

Dunque, ponendo $w = \frac{y}{\|y\|_q}$, dobbiamo mostrare che:

$$\langle x, w \rangle^p \leq \|x\|_p^p.$$

Riprendiamo la disuguaglianza che avevamo per convessità e poniamo $\mu_i \widetilde{x_i}^p = x_i^p$, $\mu_i = w_i^q$.

Allora $\widetilde{x_i} = x_i w_i^{-\frac{q}{p}} \Rightarrow \mu_i \widetilde{x_i} = x_i w_i^{-\frac{q}{p}+q} = x_i w_i$, quindi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \widetilde{x_i}\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \widetilde{x_i}^p \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^p \Rightarrow \langle x, w \rangle^p \leq \|x\|_p^p.$$

■

LEMMA 1.2 (Disuguaglianza di Minkowski): Siano $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, con $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ $\forall i$ e $p \geq 1$. Allora:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Dimostrazione:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p-1} y_i.$$

Poniamo $S_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p-1} x_i$, $S_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p-1} y_i$.

Allora $S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, con $a_i = (x_i + y_i)^{p-1}$. Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Per la disuguaglianza di Hölder, abbiamo che:

$$S_1 \leq \|a\|_q \|x\|_p,$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ora:

$$\|a\|_q^q = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \|x + y\|_p^p,$$

perciò:

$$S_1 \leq \|a\|_q \|x\|_p = \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_p.$$

Analogamente:

$$S_2 \leq \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} \|y\|_p.$$

Dunque:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = S_1 + S_2 \leq \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) = \|x+y\|_p^{p-1}\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right).$$

Dividendo da entrambe le parti per $\|x+y\|_p^{p-1}$, abbiamo la tesi.

■

PROPOSIZIONE 1.3: $\|.\|_p$ è una norma $\forall p \geq 1$.
Dimostrazione:
Le prime due proprietà sono immediate da dimostrare.
La disuguaglianza triangolare segue direttamente dalla disuguaglianza di Minkowski.

■

Notazione: Denotiamo con $\|.\|_\infty$ la norma $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

DEFINIZIONE 1.4: (X, d) spazio metrico. Si dice che $\bar{x}$ è **limite** della successione $\{x_n\} \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 | d(x_n, x) < \varepsilon \; \forall n > N.$$

In questo caso si scrive $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} \bar{x}$ o semplicemente $x_n \to \bar{x}$.

DEFINIZIONE 1.5: $\{x_n\} \in X$ si dice **di Cauchy** se $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 | d(x_n, x_m) < \varepsilon \; \forall n, m > N$.

DEFINIZIONE 1.6: Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy converge a un elemento dello spazio.

Esempio: $(C([0,1]), d)$, dove $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$, è uno spazio metrico non completo.

DEFINIZIONE 1.7: Uno spazio normato e completo si dice **spazio di Banach**.

DEFINIZIONE 1.8: (X, d) spazio metrico. $f: X \to X$ si dice **contrazione** se $\exists k \in (0,1)$ tale che

$$d\big(f(x), g(x)\big) \leq k d(x, y) \; \forall x, y \in X.$$

DEFINIZIONE 1.9: (X, d) spazio metrico. $f: X \to X$ si dice **non espansiva** se

$$d\big(f(x), g(x)\big) \leq d(x, y) \; \forall x, y \in X.$$

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI: (X, d) spazio metrico completo, f contrazione.
Allora $\exists!\, x^* \in X | f(x^*) = x^*$.
Dimostrazione:
Sia $x_1 \in X$. Poniamo $x_{n+1} = f(x_n) \; \forall n \geq 1$. Allora:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d\big(f(x_{n-1}), f(x)\big) \leq k d(x_{n-1}, x_n) \leq \ldots \leq k^{n-1} d(x_1, x_2).$$

Sia $m > n$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tale che:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \leq (k^{n-1} + \ldots + k^{m-2}) d(x_1, x_2) < \varepsilon \; \forall n, m > N.$$

Quindi $\{x_n\}$ è di Cauchy, ma lo spazio è completo, quindi $\exists x^* | x_n \to x^*$.
Ora:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n),$$

ma f è lipschitziana, dunque continua, perciò:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \Rightarrow x^* = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(x^*).$$
Ci rimane da verificare l'unicità del punto fisso.
Supponiamo che $\exists \tilde{x} | f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Allora:
$$d\big(f(x^*), f(\tilde{x})\big) \le kd(x^*, \tilde{x}) < d(x^*, \tilde{x}),$$
assurdo, poiché $d\big(f(x^*), f(\tilde{x})\big) = d(x^*, \tilde{x})$ in quanto sono punti fissi.

■

DEFINIZIONE 1.10: Sia (X, T) uno spazio topologico. Allora $K \subset X$ si dice **compatto** se, preso un ricoprimento di aperti di K, esiste un sottoricoprimento finito di K.
In altre parole:
$$\forall I \left| \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \supseteq K, \exists J \subseteq I, |J| < +\infty \right| \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j \supseteq K, \mathcal{U}_i \in T\ \forall i.$$

PROPOSIZIONE 1.4: Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$.
Allora K compatto $\Rightarrow \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in K$, x_n ammette almeno un punto di accumulazione.
Dimostrazione:
Supponiamo che $\exists \{x_n\} \in K$ senza punti di accumulazione.
Poniamo $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.
Allora $\forall x \in X, \exists \mathcal{U}_x$ intorno di x tale che $\mathcal{U}_x \cap A = \begin{cases} \emptyset\ se\ x \notin A \\ \{x\}\ se\ x \in A \end{cases}$, in quanto x non è di accumulazione per x_n.
Perciò:
$$\bigcup_{x\in X} \mathcal{U}_x \supseteq K,$$
ma K è compatto, quindi $\exists J = \{x_1, \dots, x_s\} \subset X$ tale che:
$$\bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{U}_{x_i} \supseteq K.$$
Ma $\left|\mathcal{U}_{x_i} \cap A\right| \le 1\ \forall i$, dunque $|K \cap A| = |A| \le s$, assurdo, poiché se la successione si ripetesse allora avrebbe almeno un punto di accumulazione.

■

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS: Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto.
Sia $\{x_n\} \in K$ una successione limitata. Allora $\exists \{x_k\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $x_k \to \bar{x}$.

COROLLARIO 1.5: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto per ricoprimenti $\Leftrightarrow K$ è compatto per successioni.

TEOREMA DI HEINE-BOREL: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow K$ è limitato e chiuso.

TEOREMA DI WEIERSTRASS: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $f: K \to \mathbb{R}$ continua.
Allora $\exists \max_{x\in K} f(x)$ e $\exists \min_{x\in K} f(x)$.

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÁ: Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue tale che:

- $f_n \in (C([a,b]), \|.\|_\infty)\ \forall n$;
- è uniformemente limitata, cioè $\exists M > 0 | |f_n(x)| \leq M\ \forall x \in [a,b], \forall n$;
- è uniformemente equicontinua, cioè $\forall n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 | |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

Allora $\exists \{f_k\} \subseteq \{f_n\}$ uniformemente convergente a f^* (che sarà dunque continua).

Dimostrazione:

PASSO 1: Mostriamo che $\exists \{f_k\} \subseteq \{f_n\}, \exists f^*: \mathbb{Q} \cap [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $f_k(q) \to f^*(q)\ \forall q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$.

Poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile , poniamo $\mathbb{Q} \cap [a,b] = \{q_1, \dots, q_n, \dots\}$.

$\{f_n(q_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali limitata, quindi per Bolzano-Weierstrass $\exists \{f_{1,n}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $f_{1,n}(q_1) \to f^*(q_1)$.

Allo stesso modo, $\{f_{1,n}(q_2)\}$ è una successione di numeri reali limitata, quindi $\exists \{f_{2,n}\} \subseteq \{f_{1,n}\}$ tale che $f_{2,n}(q_2) \to f^*(q_2)$.

Ora $f_{2,n}(q_1)$ è una sottosuccessione di $f_{1,n}(q_1)$, che converge a $f^*(q_1)$, quindi:

$$f_{2,n}(q_1) \to f^*(q_1).$$

Iterando questo procedimento, si ha $\forall k$:

$\{f_{k,n}(q_{k+1})\}$ è limitata, quindi $\exists \{f_{k+1,n}\} \subseteq \{f_{k,n}\}$ tale che $f_{k+1,n}(q_{k+1}) \to f^*(q_{k+1})$.

Inoltre:

$$\{f_{k+1,n}\} \subseteq \{f_{j,n}\}\ \forall 1 \leq j \leq k+1 \Rightarrow f_{k+1,n}(q_j) \to f^*(q_j)\ \forall 1 \leq j \leq k+1.$$

Consideriamo la successione $\{f_{n,n}\} \subseteq \{f_n\}$:

$$f_{n,n}(q_k) \to f^*(q_k)\ \forall k,$$

poiché $\{f_{n,n} | n > k\} \subseteq \{f_{k,n}\}$.

PASSO 2: Mostriamo che la successione $\{f_{n,n}\}$ è di Cauchy in $(C([a,b]), \|.\|_\infty)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ il corrispondente numero dato dall'equicontinuità.

Allora

$$\bigcup_{x \in [a,b]} B(x, \delta) \supseteq [a,b]$$

è un ricoprimento di $[a,b]$, che è compatto e quindi $\exists I = \{y_1, \dots, y_r\} \subseteq [a,b]$ tale che

$$\bigcup_{i=1}^{r} B(y_i, \delta) \supseteq [a,b].$$

Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $[a,b]$, allora $\forall 1 \leq j \leq r\ \exists x_j \in \mathbb{Q} \cap [a,b] | x_j \in B(y_j, \delta)$.

Dunque, $\forall j, \forall x \in B(y_j, \delta)$:

$$|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq \underbrace{|f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_j)|}_{<2\varepsilon} + \underbrace{|f_{n,n}(x_j) - f_{m,m}(x_j)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_{m,m}(x_j) - f_{m,m}(x)|}_{<2\varepsilon} < 5\varepsilon$$

per valori sufficientemente grandi di n, m, in quanto per il termine centrale basta notare che la successione $f_{n,n}(x_j)$ converge poiché x_j è un razionale; per i due termini esterni basta notare che:

$$|f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_j)| < \underbrace{|f_{n,n}(x) - f_{n,n}(y_j)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_{n,n}(y_j) - f_{n,n}(x_j)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon,$$

in quanto $|x - y_j|, |y_j - x_j| < \delta$ e ho il risultato per l'equicontinuità.

Dunque, poiché $(C([a,b]), \|.\|_\infty)$ è completo, la successione $\{f_{n,n}\}$ converge a f^*, ma poiché $\forall \varepsilon > 0$ il valore $|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)|$ è stimato con $5\varepsilon\ \forall x \in [a,b]$, ho che la convergenza è uniforme:

$$f_{n,n} \rightrightarrows f^*.$$

■

TEOREMA 1.6: In $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, cioè $\exists c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq c_2\|x\|_A\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

per ogni coppia di norme $\|.\|_A$ e $\|.\|_B$.

Dimostrazione:

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Sia $\|.\|$ una qualsiasi norma su $\mathbb{R}^n$.

Allora $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, dunque:

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^n \|e_i\|}_{=c_2} = c_2\|x\|_\infty.$$

Ora cerchiamo c_1.

Notiamo che la funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \|x\|$ è continua, poiché se $\|x - x_0\| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| < \delta.$$

Sia $x \in \mathbb{R}^n$. Allora $\left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\|_\infty = 1$, quindi poniamo $y = \frac{x}{\|x\|_\infty}$; $\|y\|_\infty = 1$.

Consideriamo $f: \mathbb{R}^n \supseteq K \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \|x\|$, con $K = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y\|_\infty = 1\}$ che è compatto; per Weierstrass, f avrà un minimo, sia esso c_1.

Allora:

$$\|y\| \geq c_1 \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \geq c_1 \Rightarrow \|x\| \geq c_1\|x\|_\infty.$$

Ci resta da mostrare solo che $c_1 \neq 0$, ma questo è evidente, poiché se $c_1 = 0$, allora $\exists y \in K$, cioè $\exists y | \|y\|_\infty = 1$, tale che $f(y) = \|y\| = 0$, ma $y \neq 0$, assurdo per definizione di norma.

■

2 CONTINUITÁ

DEFINIZIONE 2.1: (X, d) e (Y, d') spazi metrici. Allora $f: X \to Y$ si dice **continua** in un punto $x_0 \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 | d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Osservazione: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 | \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

dove $\|.\|$ è una qualsiasi norma di $\mathbb{R}^n$ (poiché abbiamo visto che sono tutte equivalenti).
Se non viene specificato, per $\|.\|$ intendiamo $\|.\|_2$.

Osservazione: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$$\lim_{\|t\| \to 0} \big(f(x_0 + t) - f(x_0)\big) = 0,$$

o equivalentemente se

$$\|t\| \to 0 \Rightarrow f(x_0 + t) = f(x) + o(1).$$

PROPOSIZIONE 2.1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f(0,0) = 0$ e tale che

$$\forall \rho > 0, |f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))| < c\rho \ \forall \theta$$

per una certa costante c non dipendente da θ, è continua in $(0,0)$.
Dimostrazione:
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Allora:

$$|f(\delta \cos(\theta), \delta \sin(\theta)| < c\delta,$$

cioè

$$|f(x, y)| < \varepsilon \ \forall \|(x, y)\| < \delta,$$

da cui la tesi.

■

Osservazione: La proposizione precedente può essere estesa a tutte le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, semplicemente aggiungendo una costante e traslando opportunamente sull'origine.

PROPOSIZIONE 2.2: Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se esistono due "direzioni di avvicinamento" $y = a_1(x)$ e $y = a_2(x)$ di (x, y) a (x_0, y_0) tali che

$$\lim_{x \to x_0} f\big(x, a_1(x)\big) \neq \lim_{x \to x_0} f\big(x, a_2(x)\big),$$

allora f non è continua in (x_0, y_0).
Dimostrazione:
La tesi segue immediatamente dal teorema di unicità del limite.

■

3 DIFFERENZIABILITÁ

DEFINIZIONE 3.1: Siano $f, g: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$. Diciamo che:

- $f \in o(g)$ per $x \to x_0 \in \mathcal{U}$ se $\lim_{\|x-x_0\|\to 0} \left\|\frac{f(x)}{g(x)}\right\| = 0$;
- $f \in O(g)$ per $x \to x_0 \in \mathcal{U}$ se $\lim_{\|x-x_0\|\to 0} \left\|\frac{f(x)}{g(x)}\right\| < c$ per una certa costante c;
- $f \sim g$ per $x \to x_0 \in \mathcal{U}$ se $f \in O(g)$ e $g \in O(f)$ per $x \to x_0$.

PROPOSIZIONE 3.1: Sia $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e siano $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^m$ tali che $k = Lh + b(h)$, con $\|b(h)\| = o(\|h\|)$.
Allora $o(\|h\|) \supseteq o(\|k\|)$.
Dimostrazione:

$$\|k\| \le \|Lh\| + \|b(h)\| = \|L\|\|h\| + o(\|h\|) \le c\|h\|,$$

dove $\|L\| = \sup_{\lambda \in Sp(L)} |\lambda|$, dunque:

$$f \in o(\|k\|) \Rightarrow \left\|\frac{f}{\|h\|}\right\| \le \left\|\frac{f}{\|k\|}\right\| < \varepsilon \Rightarrow f \in o(\|h\|).$$

■

DEFINIZIONE 3.2: Sia $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$. Allora f si dice **differenziabile** in x_0 se

$$\exists L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m | f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|).$$

Notazione: Denoteremo la precedente applicazione lineare L come $f'(x_0)$ o come $D\,f(x_0)$.

Osservazione: $f'(x_0)$ può essere pensata come matrice $m \times n$.

PROPOSIZIONE 3.2: $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.
Dimostrazione:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|) \Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + o(1),$$

da cui la tesi.

■

DEFINIZIONE 3.3: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Allora l'operatore lineare $L = f'(x_0)$ è tale che $\exists!\, v \in \mathbb{R}^n | Lh = \langle v, h\rangle$.
v si dice **gradiente** di f in x_0.

Notazione: Il gradiente di f in x_0 può essere indicato con $grad\big(f(x_0)\big)$ o con $\nabla f(x_0)$.

DEFINIZIONE 3.4: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$.
Denotiamo con $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e con $\{u_1, \dots, u_m\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^m$.
Denotiamo $f_j: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tale che $f_j(x) = \langle f(x), u_j\rangle\ \forall x \in \mathcal{U}$.
Allora definiamo **derivata parziale** di f_j rispetto a $x_k = \langle x_0, e_k\rangle$

$$\partial_{x_k} f_j(x_0) = \frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_k} = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(x + te_k) - f_j(x)}{t}.$$

PROPOSIZIONE 3.3: Se $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x_0, allora esistono tutte le sue derivate parziali $\partial_{x_k} f_j(x_0)$.
Dimostrazione:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + o(\|h\|) \Rightarrow \underbrace{\langle f(x_0+h), u_j\rangle}_{=f_j(x_0+h)} = \underbrace{\langle f(x_0), u_j\rangle}_{=f_j(x_0)} + \langle Lh, u_j\rangle + o(\|h\|)$$

Poniamo $h = te_k$.
Allora $\|h\| = |t| \to 0$ e:

$$f_j(x_0+te_k) = f_j(x_0) + t\langle Le_k, u_j\rangle + o(t),$$

cioè $\partial_{x_k} f_j(x_0) = \langle Le_k, u_j\rangle$, tesi.

■

Osservazione: Dunque la matrice che rappresenta L ha nel posto (j,k) il valore $\partial_{x_k} f_j(x_0)$.

DEFINIZIONE 3.5: Definiamo matrice Jacobiana di $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabile la matrice $m \times n$:

$$Jf = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \dots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix}$$

Osservazione: Sia $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. L'operatore L relativo a $x_0 \in \mathcal{U}$ può essere visto come vettore, che per l'osservazione precedente è:

$$\nabla f(x_0) = \left(\partial_{x_1} f(x_0), \dots, \partial_{x_n} f(x_0)\right),$$

cioè:

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(x_0) \cdot e_i.$$

DEFINIZIONE 3.6: $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Definiamo **derivata direzionale** rispetto a v

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}.$$

PROPOSIZIONE 3.4: $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in \mathcal{U}$; allora $\forall v \neq 0\ \exists \partial_v f(x_0)$ e

$$\partial_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(x_0) \cdot v_i.$$

Dimostrazione:
$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + o(\|h\|)$ se $\|h\| \to 0$.
Ponendo $h = tv$, si ha che $\|h\| = |t|\|v\| \to 0 \Rightarrow t \to 0$ e:

$$f(x_0+tv) = f(x_0) + t\langle \nabla f(x_0), v\rangle + o(t) \Rightarrow \langle \nabla f(x_0), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t},$$

da cui segue immediatamente la tesi.

■

TEOREMA DELLA DIFFERENZIABILITÁ TOTALE: $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, dove $\mathcal{U}$ è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se $\exists \partial_{x_j} f(x)\ \forall j\ \forall x \in \mathcal{U}$ e $\partial_{x_j} f(x)$ è continua $\forall j\ \forall x \in \mathcal{U}$, allora f è differenziabile in x_0.

Dimostrazione:

Per semplicità, consideriamo $n = 2$ e $x_0 = 0$.

Sia $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{U}$ e sia $h^* = (0, h_2) \in \mathcal{U}$. Allora:

$$f(h) - f(0) = f(h) - f(h^*) + f(h^*) - f(0) = f(h_1, h_2) - f(0, h_2) + f(0, h_2) - f(0,0).$$

Fissiamo h_2 come parametro nelle prime due funzioni; allora, posto $f(h_1, h_2) - f(0, h_2) = \varphi_{h_2}(h_1)$ e $f(0, h_2) - f(0,0) = \psi(h_2)$, poiché $\varphi_{h_2}(0) = 0$ e $\psi(0) = 0$, per Lagrange si ha che:

$\varphi_{h_2}(h_1) = \partial_{x_1} \varphi_{h_2}(\xi) \cdot h_1 = \partial_{x_1} f(\xi, h_2) \cdot h_1$, con $|\xi| < |h_1|$ e

$\psi(h_2) = \partial_{x_2} f(0, \eta) \cdot h_2$, con $|\eta| < |h_2|$.

Ma le due derivate parziali sono continue, perciò:

$$\partial_{x_1} f(\xi, h_2) = \partial_{x_1} f(0,0) + o(1)$$
$$\partial_{x_2} f(0, \eta) = \partial_{x_2} f(0,0) + o(1)$$

Dunque:

$$f(h) - f(0) = \partial_{x_1} f(0,0) h_1 + \partial_{x_2} f(0,0) h_2 + \underbrace{o(1) h_1 + o(1) h_2}_{= o(\|h\|)},$$

poiché $o(h_1) \subset o(\|h\|)$ e $o(h_2) \subset o(\|h\|)$.

Da qui ho la tesi.

■

LEMMA 3.5: Siano $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^p$, f differenziabile in $x_0 \in \mathcal{U}$, g differenziabile in $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{V}$. Allora:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Dimostrazione:

Per definizione di differenziabilità abbiamo che:

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) h + o(\|h\|)$,

$g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0) k + o(\|k\|)$,

con $\|h\| \to 0$, $\|k\| \to 0$.

Poniamo $k = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) h + o(\|h\|)$; allora:

$$\|k\| \le \|f'(x_0)\| \|h\| + o(\|h\|) \le 2 \|f'(x_0)\| \|h\| \Rightarrow o(\|k\|) \subset o(\|h\|).$$

Quindi:

$$g\big(f(x_0 + h)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'(y_0) f'(x_0) h + \underbrace{o(\|h\|) + o(\|k\|)}_{= o(\|h\|)},$$

da cui la tesi.

■

Osservazione: Dunque se $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, φ derivabile in t_0 e f differenziabile in $\varphi(t_0)$:

$$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi_1' \partial_{x_1} f(\varphi) + \ldots + \varphi_n' \partial_{x_n} f(\varphi) = \langle \varphi'(t), \nabla f\big(\varphi(t)\big) \rangle.$$

LEMMA 3.6: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathcal{U})$, $x, y \in \mathcal{U}$. Allora:

$$|f(x) - f(y)| \le \sup_{[x,y]} \|\nabla f\| \cdot \|x - y\|$$

Dimostrazione:

Sia $F: t \to f(tx + (1-t)y)$. Allora $F(1) = f(x)$ e $F(0) = f(y)$.
Perciò $|f(x) - f(y)| = |F(1) - F(0)|$.
Ma per Lagrange $|F(1) - F(0)| \leq \sup_{[0,1]} F'$, in quanto $|F(1) - F(0)| = |F'(\xi)| \cdot |1 - 0|$.
Per l'osservazione precedente, $|F'(t)| = |\langle x - y, \nabla f(tx + (1-t)y)\rangle|$, ma per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, $|\langle a, b\rangle| \leq |a| \cdot |b|$, perciò:

$$|F'(t)| \leq \|x - y\| \cdot \|\nabla f(tx + (1-t)y)\|,$$

da cui:

$$\sup_{[0,1]} |F'| \leq \|x - y\| \cdot \sup_{[x,y]} \|\nabla f\|.$$

■

COROLLARIO 3.7: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$, $f \in C^1(\mathcal{U})$, $x, y \in \mathcal{U}$. Allora:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{[x,y]} \sqrt{\sum_{i,j} \left|\partial_{x_j} f_i\right|^2} \cdot \|x - y\|.$$

Dimostrazione:
Per il lemma precedente ho che:

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq \sum_j \sup_{[x,y]} \left\|\nabla f_j\right\| \cdot \|x - y\|^2 \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{[x,y]} \sqrt{\sum_{i,j} \left|\partial_{x_j} f_i\right|^2} \cdot \|x - y\|.$$

■

DEFINIZIONE 3.7: Definiamo **divergenza** di una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} f = \langle \nabla, f\rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(x),$$

dove $\partial_i f_i(x)$ indica la derivata parziale rispetto all'i-esima coordinata della funzione $f_i = \langle f, e_i\rangle$.

DEFINIZIONE 3.8: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definiamo **derivata n-esima** di f rispetto all'i-esima coordinata

$$\partial_i^n f(x) = \partial_i \left(\partial_i^{n-1} f(x)\right).$$

DEFINIZIONE 3.9: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definiamo **operatore di Laplace** (o **laplaciano**) di f

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x).$$

PROPOSIZIONE 3.6: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione radiale, cioè dipendente da $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.
Allora:

$$\Delta f(\|x\|) = f''(\|x\|) + f'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|}.$$

Dimostrazione:

$$\partial_{x_i} f(\|x\|) = f'\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) \cdot \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}},$$

quindi

$$\partial^2_{x_i} f(\|x\|) = \partial_{x_i}\left(f'(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|}\right) = \partial_{x_i} f'(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|} + \frac{f'(\|x\|)}{\|x\|} + x_i f'(\|x\|)\partial_{x_i}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) =$$
$$= f''(\|x\|)\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{f'(\|x\|)}{\|x\|} + x_i f'(\|x\|)\frac{\partial_{x_i}(\|x\|)}{\|x\|} = f''(\|x\|)\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{f'(\|x\|)}{\|x\|} - \frac{x_i}{\|x\|^3} f'(\|x\|).$$

Perciò:

$$\Delta f(\|x\|) = f''(\|x\|)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\|x\|^2} + f'(\|x\|)\frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(\|x\|^2 - x_i^2)}^{=n\|x\|^2-\|x\|^2}}{\|x\|^3} = f''(\|x\|) + f'(\|x\|)\frac{n-1}{\|x\|}.$$

■

Osservazione: Utilizzando la precedente proposizione, si trova che

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^{n-2}} \Rightarrow \Delta f = 0.$$

PROPOSIZIONE 3.7: $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$.
Dimostrazione:
Sia $\nabla f_i = \langle \nabla f, e_i\rangle$.

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \langle \nabla, \nabla f\rangle = \sum_{i=1}^{n}\partial_i(\nabla f_i) = \sum_{i=1}^{n}\partial_i\big(\partial_i f(x)\big) = \sum_{i=1}^{n}\partial_i^2 f(x) = \Delta f.$$

■

Notazione: Indicheremo con $\nabla^2 f = \langle \nabla, \nabla f\rangle = \Delta f$.

LEMMA 3.8 (per il Teorema di Schwarz): Sia $f: \mathbb{R}^2 \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, con $\mathcal{U}$ intorno di x_0, tale che esistono $\partial_{x_1} f(x)$, $\partial_{x_2} f(x)$, $\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x)$, $\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x)$ e sono continue in $\mathcal{U}$, allora:

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x) = \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x).$$

Dimostrazione:
Supponiamo per semplicità $x_0 = 0$.
Sia $h = (t, s)$.
Allora:

$$\underbrace{f(t,s) - f(t,0)}_{\varphi_s(t)} + \underbrace{f(t,0) - f(0,0)}_{\psi_t(0)} = \underbrace{f(t,s) - f(0,s)}_{\psi_t(s)} + \underbrace{f(0,s) - f(0,0)}_{\varphi_s(0)},$$

quindi:

$$\varphi_s(t) - \varphi_s(0) = \psi_t(s) - \psi_t(0).$$

Per Lagrange:

$$\varphi_s(t) - \varphi_s(0) = \partial_t\varphi_s(\xi_1)\cdot t = \Big(\partial_{x_1} f(\xi_1, s) - \partial_{x_1} f(\xi_1, 0)\Big)\, t = \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(\xi_1, \eta_1)\cdot t\cdot s,$$

con $|\xi_1| < |t|, |\eta_1| < |s|$.
Analogamente:

$$\psi_t(s) - \psi_t(0) = \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(\xi_2, \eta_2)\cdot s\cdot t,$$

con $|\xi_2| < |t|, |\eta_2| < |s|$.
Ma $\varphi_s(t) - \varphi_s(0) = \psi_t(s) - \psi_t(0)$, da cui:

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(\xi_1, \eta_1) = \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(\xi_2, \eta_2),$$

ma $t \to 0, s \to 0 \Rightarrow \xi_i, \eta_i \to 0$ per $i = 1,2$, e per questo ho la tesi.

■

Notazioni:

- Denotiamo con $D_{n,k}$ l'insieme delle funzioni da $A = \{1, \dots, k\}$ a $B = \{1, \dots, n\}$. (Osservazione: $|D_{n,k}| = n^k$).
- Denotiamo con $(j_1, \dots, j_k) \in D_{n,k}$ la funzione $j: A \to B$ tale che $j(i) = j_i \in B \; \forall i$ (anche con ripetizioni).
- Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multiindice. Allora denotiamo $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e $\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.
- Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multiindice. Allora denotiamo:
$$D_{n,k,\alpha} := \{j: A \to B \,|\, |j^{-1}(i)| = \alpha_i \; \forall i, |\alpha| = k\}.$$
- Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vettore qualunque e $= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multiindice. Allora denotiamo $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

Esempio: Se $\alpha = (1,2)$, allora $D_{2,3,\alpha} = \{(1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)\}$.

Osservazione: $|D_{n,k,\alpha}| = \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}$.

DEFINIZIONE 3.10: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f \in C^k(\mathcal{U})$ se $\exists \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f$ in $\mathcal{U}$ e sono continue $\forall (j_1, \dots, j_k) \in D_{n,k}$.

TEOREMA DI SCHWARZ: Sia $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tale che $f \in C^k(\mathcal{U})$.
Se $|\alpha| = k$ e $(j_1, \dots, j_k), (l_1, \dots, l_k) \in D_{n,k,\alpha}$, allora:
$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f = \partial_{l_1} \dots \partial_{l_k} f.$$
Dimostrazione:
Utilizzando il LEMMA 3.8, per induzione su k si arriva alla tesi.

■

PROPOSIZIONE 3.9: Se $(x_1, \dots, x_n)$ tale che $x_j x_t = x_t x_j \; \forall j, t$, allora:
$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$
Dimostrazione:
$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{(j_1,\dots,j_n) \in D_{k,n}} x_{j_1} \cdot \dots \cdot x_{j_n} = \sum_{(j_1,\dots,j_k) \in D_{n,k,\alpha}} |D_{n,k,\alpha}| \cdot x_{j_1} \cdot \dots \cdot x_{j_k} =$$
$$= \sum_{(j_1,\dots,j_k) \in D_{n,k,\alpha}} |D_{n,k,\alpha}| \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

■

DEFINIZIONE 3.11: Definiamo $(\partial_1 + \partial_2) f := \partial_1 f + \partial_2 f$.

Osservazione: Per il teorema di Schwarz, la formula della PROPOSIZIONE 3.9 vale anche se gli x_i sono degli operatori derivata.

DEFINIZIONE 3.12: Siano $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$. Si definisce **prodotto vettoriale** di a e b il vettore:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

DEFINIZIONE 3.13: Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Definiamo **rotore** di f:

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1).$$

Osservazione: Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y = \varphi(x)$. Allora:

$$\partial_{x_j} f\big(\varphi(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\partial_{y_k} f\big)\big(\varphi(x)\big) \cdot \partial_{x_j} \varphi_k(x).$$

FORMULA DI TAYLOR (in n variabili): Sia $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $f \in C^k(\mathcal{U})$.
Sia $x_0 \in \mathcal{U}$. Allora $\forall x \in \mathcal{U}$, $\forall N \leq k$:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + o(\|x - x_0\|^N).$$

Dimostrazione:
Poniamo $x = x_0 + th$, con $0 < |t| < \delta$, $\|h\| = 1$.
Sia $\varphi: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(t) = x_0 + th$.
Sia $g(t) = f\big(\varphi(t)\big)$.
Per l'osservazione precedente, e per il fatto che $\varphi'(t) = h$, si ha:

$$\partial_t (f\big(\varphi(t)\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\partial_{x_k} f\big)\big(\varphi(t)\big) \cdot \partial_t \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k \big(\partial_{x_k} f\big)\big(\varphi(t)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_{x_k} f\right)\big(\varphi(t)\big).$$

Dunque:

$$\frac{d}{dt} f\big(\varphi(t)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k\right) f(x)\Bigg|_{x=\varphi(t)}$$

Poniamo $f_1(x) = \frac{d}{dt} f\big(\varphi(t)\big)$.
Allora:

$$\frac{d}{dt} f_1\big(\varphi(t)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k\right) f_1(x)\Bigg|_{x=\varphi(t)}$$

Ricorsivamente, poniamo:

$$f_{j+1}(x) = \frac{d}{dt} f_j(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k\right) f_j(x)\Bigg|_{x=\varphi(t)}.$$

Allora:

$$g'(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k\right) f\big(\varphi(t)\big) = f_1\big(\varphi(t)\big)$$

$$g''(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k\right) f_1\big(\varphi(t)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k\right)^2 f\big(\varphi(t)\big)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$g^{(m)}(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k\right)^m f(\varphi(t)) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{h^\alpha \partial^\alpha f(\varphi(t))}{\alpha!} \cdot m!$$

Ora, per la formula di Taylor in una variabile, si ha che:

$$g(t) = \sum_{m=0}^{N} \frac{g^{(m)}(0) \cdot t^m}{m!} + o(t^N).$$

Ma $th = x - x_0 \Rightarrow t^m h^\alpha = (x - x_0)^\alpha$, perciò:

$$f(x) = f(\varphi(t)) = \sum_{m=0}^{N} \frac{\left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{h^\alpha \partial^\alpha f(\varphi(0))}{\alpha!} \cdot m!\right) \cdot t^m}{m!} + o(t^N) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + o\left(\left(\frac{\|x - x_0\|}{h}\right)^N\right) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + o(\|x - x_0\|^N).$$

■

PROPOSIZIONE 3.10: $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ differenziabile, con $\nabla f = 0$. Allora f è costante in $\mathcal{U}$.
Dimostrazione:
Sia $x_0 \in \mathcal{U}$ e sia $x = x_0 + h$, con $h = (h_1, \dots, h_n)$, tale che $x \in \mathcal{U}$. Allora:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{\partial_{x_1} f(x_0 + \xi)}_{=0} h_1 + \dots + \underbrace{\partial_{x_n} f(x_0 + \xi)}_{=0} h_n = f(x_0),$$

con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tale che $|\xi_i| < |h_i| \; \forall i$.

■

DEFINIZIONE 3.14: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice **punto di massimo relativo** per f se $\exists \delta | f(x) \leq f(x_0)$ $\forall \|x - x_0\| < \delta$.
Se il segno della disuguaglianza è quello opposto si parla di **minimo relativo**.
PROPOSIZIONE 3.11: $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathcal{U})$. $x \in \mathcal{U}$ punto di massimo (minimo) relativo. Allora:
1) $\nabla f = 0$;
2) $\Delta f \leq 0$ ($\Delta f \geq 0$).

Dimostrazione:
Facciamo la dimostrazione solo nel caso del massimo; nell'altro caso si procede analogamente.
1) $f(x_0 + h) = f(x_0) + \partial_{x_1} f(x_0) h_1 + \dots + \partial_{x_n} f(x_0) h_n + o(\|h\|)$.
   Poniamo $h = t \cdot e_i$. Allora:
   $$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \partial_{x_i} f(x_0) + o(1).$$
   Ora, se $t \geq 0$, la frazione (e dunque $\partial_{x_i} f(x_0)$) è ≤ 0, mentre se $t \geq 0$ è ≥ 0.
   Dunque $\partial_{x_i} f(x_0) = 0 \; \forall i \Rightarrow \nabla f = 0$.
2) Procedendo come nel punto precedente, abbiamo che:
   $$f(x_0 + te_i) - f(x_0) = \underbrace{\partial_{x_i} f(x_0)}_{=0} t + \partial_{x_i}^2 f(x_0) \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$
   cioè:
   $$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t^2} = \frac{1}{2} \partial_{x_i}^2 f(x_0) + o(1).$$

La frazione è negativa, dunque $\forall i, \partial^2_{x_i} f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta f \leq 0$.

■

DEFINIZIONE 3.15: $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathcal{U})$. Definiamo **matrice Hessiana** di f:

$$Hf = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} f & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f & \dots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1} f & \partial^2_{x_2} f & \dots & \partial_{x_2}\partial_{x_n} f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f & \partial_{x_n}\partial_{x_2} & \dots & \partial^2_{x_n} f \end{pmatrix},$$

cioè tale che $[Hf]_{ij} = \partial_{x_i}\partial_{x_j} f \ \forall i, j$.

Osservazione: Per il teorema di Schwarz, la matrice Hessiana è sempre simmetrica.

PROPOSIZIONE 3.12: $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathcal{U})$, $x_0 \in \mathcal{U}$. Se $\nabla f = 0$ e la matrice Hessiana in x_0 è definita negativa (positiva), allora x_0 è punto di massimo (minimo) relativo.
Dimostrazione:
Facciamo solo il caso del massimo.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{\partial_{x_1} f(x_0)}_{=0} h_1 + \ldots + \underbrace{\partial_{x_n} f(x_0)}_{=0} h_n + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x_0) h_i h_j + o(\|h\|^2) =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)h, h\rangle + o(\|h\|^2).$$

Ma $\langle Hf(x_0)h, h\rangle \leq 0 \ \forall h$, quindi $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \ \forall h$, cioè x_0 è punto di massimo.

■

DEFINIZIONE 3.16: Sia $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Allora possiamo parametrizzare la sua frontiera $\partial\mathcal{U}$ con **archi** $A_1, \dots, A_k$, in cui ciascun arco A_j è parametrizzato da una funzione continua $\varphi_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dove $\varphi_j([0,1]) = A_j$.

DEFINIZIONE 3.17: Definiamo **massimo vincolato** di $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ il valore $\max_{\partial\mathcal{U}} f(t) = \max_j \max_{A_j} f(t)$, dove $\max_{A_j} f(t) = \max_{t \in [0,1]} f\left(\varphi_j(t)\right)$.
Analogamente definiamo il **minimo vincolato**.

DEFINIZIONE 3.18: Definiamo **massimo assoluto** di $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ il valore $\max\{max_{\mathcal{U}} f, max_{\partial\mathcal{U}} f\}$.

Osservazione: In due variabili, il vincolo è rappresentato da una equazione $b(x, y) = 0$.
Dunque il massimo vincolato non è altro che $\max_{b(x,y)=0} f(x, y)$.
Ora, se riesco a scrivere $b(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$, calcolare il massimo vincolato è semplice, poiché $\max_{b(x,y)=0} f(x, y) = \max f\big(x, g(x)\big)$, dove $f\big(x, g(x)\big)$ è una funzione di una variabile.
In generale, però, è difficile scrivere questa $y = g(x)$, quindi mostriamo un metodo univoco per risolvere problemi di massimo e minimo vincolato.

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE: Sia $f: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.
Allora $x_0 \in \mathcal{U}$ è punto di massimo (minimo) vincolato da $b(x) = 0$, dove $b: \mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi di Dini, se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che la **Lagrangiana**

$$\Lambda(x,\lambda) \coloneqq f(x) - \lambda b(x)$$
ha derivate nulle rispetto a $x_1, \dots, x_n, \lambda$, cioè:
$$\nabla\Lambda(x,\lambda) = 0.$$
Dimostrazione:
Per semplicità, facciamo la dimostrazione solo nel caso $n = 2$.
⇒) Per il teorema del Dini, abbiamo che $b(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ per una certa funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dunque abbiamo che $f(x,y) = f\big(x, g(x)\big)$ in un intorno di x_0.
Ora:
$$\partial_x f\big(x, g(x)\big) = \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) \cdot g'(x) = 0$$
e:
$$\partial_x b\big(x, g(x)\big) = \partial_x b(x,y) + \partial_y b(x,y) \cdot g'(x) = 0,$$
perciò troviamo che il vettore $v = \big(1, g'(x)\big)$ è ortogonale a ∇f e a ∇b.
Poiché ∇f e ∇b sono ortogonali allo stesso vettore in $\mathbb{R}^2$, allora sono paralleli, dunque $\exists\lambda$ tale che $\nabla f - \lambda\nabla b = 0$, cioè $\nabla(f - \lambda b) = 0$, cioè $\nabla\Lambda(x,y,\lambda) = 0$.
⇐) Abbiamo che $b(x_0,y_0) = 0$, dunque $\nabla f(x_0,y_0) = 0$, cioè che (x_0,y_0) è un massimo o un minimo vincolato da $b(x,y) = 0$.

■

DEFINIZIONE 3.19: f si dice **omogenea** di ordine k se $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 3.13: $f: \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, f omogenea di ordine k e derivabile ⇒ $\partial_{x_j} f$ è omogenea di ordine $k-1$ per ogni j.
Dimostrazione:
$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \lambda\partial_{x_j} f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k \partial_{x_j} f(x_1, \dots, x_n)$.
Dividendo per λ abbiamo la tesi.

■

IDENTITÁ DI EULERO: Se f è omogenea di ordine k, allora:
$$\langle\nabla f(x), x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{x_j} f(x) = k \cdot f(x).$$
Dimostrazione:
$f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$, dunque uguagliamo le derivate rispetto a λ dei due membri:
$$\partial_\lambda f(\lambda x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f(\lambda x) \cdot x_j\,;$$
$\partial_\lambda\big(\lambda^k f(x)\big) = k\lambda^{k-1} f(x)$, dunque ponendo $\lambda = 1$ si ha la tesi.

■

4 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE 4.1: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n+1}$ aperto connesso.
Definiamo **equazione differenziale** di ordine $n > 1$, $F: \Omega \to \mathbb{R}$ continua,
$F\left(t, u(t), \dots, u^{(n)}(t)\right) = 0$, con $t \in I$ e $u(t) \in C^n(I)$, $I \subseteq \Omega$ piccolo intervallo.
Se $u(t)$ con tali caratteristiche soddisfa $F\left(t, u(t), \dots, u^{(n)}(t)\right) = 0$, diciamo che $u(t)$ è **soluzione** dell'equazione differenziale F.

DEFINIZIONE 4.2: Definiamo **forma normale** di un'equazione differenziale la scrittura
$u^{(n)}(t) = G\left(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\right)$, dove $G: \omega \to \mathbb{R}$ è continua, $\omega \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}$ aperto connesso.

PROPOSIZIONE 4.1: Si può passare dalla forma normale di un'equazione differenziale di ordine n, $u^{(n)}(t) = G\left(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\right)$, a un sistema di equazioni $n \times n$, $\vec{u}' = \vec{f}(t, \vec{u})$.
Dimostrazione:
Poniamo $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$, dove $u_j(t) = u^{(j-1)}(t)$. Dunque $u_j'(t) = u_{j+1}(t)$, $j = 1, \dots, n-1$.
Se $j = n$, $u_n(t) = \left(u^{(n-1)}(t)\right)' = G\big(t, \vec{u}(t)\big)$. Quindi:

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ G(t, \vec{u}) \end{pmatrix} := f(t, \vec{u}),$$

dove $\vec{u}: I \to \mathbb{R}^n$, $\vec{u}(t) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

■

DEFINIZIONE 4.3: Il sistema di equazioni differenziali di ordine 1 $\vec{u}'(t) = \vec{f}(t, \vec{u})$ si dice autonomo se $\vec{f}$ non dipende da t.

DEFINIZIONE 4.4: $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$. Definiamo $e^A := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$.

Osservazioni: $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$.
- $e^{A \cdot 0} = I$
- $t, s \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$
- $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$
- In generale $e^{A_1 + A_2} \neq e^{A_1} e^{A_2}$, ma l'uguaglianza vale se $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

PROPOSIZIONE 4.2: Il sistema di equazioni di ordine 1, $u'(t) = Au$, dove $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ha per soluzioni le $u(t) = v_0 e^{At}$, con $v_0 \in \mathbb{R}$.
Dimostrazione:
Sia $v(t) = e^{-At} u(t)$.

$$v'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{-At}\right) u(t) + e^{-At} u'(t) = -A e^{-At} u(t) + e^{-At} \underbrace{u'(t)}_{=Au(t)} = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u(t) = v_0 e^{At}$, tesi.

■

DEFINIZIONE 4.5: Se $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$, definiamo $\int \varphi(s)ds := (\int \varphi_1(s)ds, \dots, \int \varphi_n(s)ds)$.

LEMMA 4.3: $u \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$, $I \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di t_0, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$, $u(t_0) = u_0$,
$f: I \times J = \{(t,y) \mid |t - t_0| < a, \|y - u_0\| < b\}$.
$u(t)$ è soluzione del sistema di Cauchy $\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\forall t \in I, u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds.$$

Dimostrazione:
$u_j'(t) = f_j(t,u(t)) \Rightarrow u_j(t) - u_j(t_0) = \int_{t_0}^{t} u_j'(s)ds \;\; \forall j$, dunque per la definizione precedente ho la tesi.

■

TEOREMA DI CAUCHY-LIPSCHITZ: $t_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in \mathbb{R}^n$.
$f: I \times J = \{(t,y) \mid |t - t_0| < a, \|y - u_0\| < b\}$, $u(t_0) = u_0$, $f \in C^1$ ed è Lipschitziana rispetto a J, cioè $\exists L > 0 \mid \|f(t,u) - f(t,v)\| \le L\|u - v\| \; \forall t \in I, u, v \in J \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists T > 0, \exists y(t): (t_0 - T, t_0 + T) \to \mathbb{R}^n \in C^0((t_0 - T, t_0 + T))$ tale che vale

$$y(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds.$$

Dimostrazione:
$\forall T < a, \{y(t) \in C([t_0 - T, t_0 + T];\mathbb{R}^n) \mid \sup_{|t-t_0|\le T}\|y(t) - u_0\|_{C^0} < b\} := B$.
Sia $K(y) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \;\; \forall y \in B$.
Cerchiamo K in modo che $K: B \to B$ sia una contrazione: in questo modo avremmo che $\exists y(t) \in B$ tale che $K(y(t)) = y(t)$, cioè la tesi.
Cerchiamo $T > 0$ per cui $K: B \to B$.

$$\|K(y) - u_0\|_{C^0} \le \sup_{|t-t_0|\le T}\|K(y)(t) - u_0\| = \sup_{|t-t_0|\le T}\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\right\|$$
$$\le \sup_{|t-t_0|\le T}\int_{t_0}^{t}\|f(s,y(s))ds\| \le \sup_{|t-t_0|\le T} M(t - t_0) = TM \le b,$$

dove $M = \sup_{(t,u)\in \bar{I}\times\bar{J}}\|f(t,u)\|$, dunque basta porre $T \le \frac{b}{M}$.
Vediamo per quali $T > 0$, K è contrazione:

$$\|K(y) - K(\tilde{y})\|_{C^0} \le \sup_{|t-t_0|\le T}\left\|\int_{t_0}^{t}\Big(f(s,y(s)) - f(s,\tilde{y}(s))\Big)ds\right\| \le$$

$$\leq \sup_{|t-t_0|\leq T} \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s)) - f(s,\tilde{y}(s))\| ds \leq L \sup_{|t-t_0|\leq T} \int_{t_0}^{t} \|y(s)-\tilde{y}(s)\| ds \leq LT\|y-\tilde{y}\|_{C^0}.$$

Dunque K è contrazione se $T < \frac{1}{L}$.
Scegliendo $0 < T < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{L}, a\right)$, si ha la tesi.

■

LEMMA DI GRONWALL: $v(t) \in C([0,T])$, $\varphi(t) \in C([0,T])$, $\varphi(t) \geq 0$. Allora, se $A \neq 0$,

$$v(t) \leq A + \int_0^t \varphi(s)v(s)ds \Rightarrow v(t) \leq Ae^{\int_0^t \varphi(s)ds}.$$

Dimostrazione:
Sia $w(t) = A + \int_0^t \varphi(s)v(s)ds$, dunque $w(t) \in C^1(0,T) \cap C([0,T])$ e $v(t) \leq w(t)$.
$w'(t) = \varphi(t)v(t) \leq \varphi(t)w(t)$. Mostriamo che $w(t) \leq w(0)e^{\int_0^t \varphi(s)ds}$ (e avremmo la tesi, in quanto $w(0) = A$ e $v(t) \leq w(t)$).
Sicuramente $w(0) \neq 0$.
Sia $\chi(t) = w(0)e^{\int_0^t \varphi(s)ds} \Rightarrow \chi(t) \neq 0\ \forall t$.

$$\left(\frac{w(t)}{\chi(t)}\right)' = \frac{w'(t)\chi(t) - \chi'(t)w(t)}{\chi^2(t)} \leq \frac{\varphi(t)w(t)\chi(t) - \varphi(t)\chi(t)w(t)}{\chi^2(t)} = 0,$$

poiché $w'(t) \leq \varphi(t)w(t)$ e $\chi'(t) = \varphi(t)\chi(t)$, dunque la funzione $\frac{w(t)}{\chi(t)}$ è monotona decrescente, e quindi $\frac{w(t)}{\chi(t)} \leq \frac{w(0)}{\chi(0)} = 1 \Rightarrow w(t) \leq \chi(t) = w(0)e^{\int_0^t \varphi(s)ds}$, tesi.

■

COROLLARIO 4.4: La soluzione locale di un problema di Cauchy che soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz è unica.
Dimostrazione:
Se $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$ soddisfano $y(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s,y(s))ds$, allora:

$$y(t) - \tilde{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f(s,y(s)) - f(s,\tilde{y}(s))\Big) ds \Rightarrow \|y(t)-\tilde{y}(t)\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s,y(s)) - f(s,\tilde{y}(s))\Big) ds \right\| \leq L \int_{t_0}^{t} \|y(s)-\tilde{y}(s)\| ds,$$

dunque, se $v(t) = \|y(t)-\tilde{y}(t)\|$, si ha che $v(t) \leq L\int_{t_0}^t v(s)ds \Rightarrow v(t) \leq \frac{1}{n} + \int_{t_0}^t Lv(s)ds\ \ \forall n$.
Per Gronwall, si ha che $v(t) \leq \frac{1}{n}e^{\int_{t_0}^t L} = \frac{e^{L(t-t_0)}}{n}$ $\forall n$, dunque $v(t) = 0\ \forall t$, cioè $y(t) = \tilde{y}(t)$.

■

Esercizio: Trovare la soluzione $y(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy
$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ in un intorno di t_0.
Dimostrazione:
Sia $A(t)$ tale che $A'(t) = a(t)$. Moltiplico l'equazione del problema per $e^{A(t)}$:

$\underbrace{e^{A(t)}y' + e^{A(t)}a(t)y}_{=\frac{d}{dt}(ye^{A(t)})} = e^{A(t)}b(t)$, dunque integrando si ha:

$$y(t)e^{A(t)} - y(t_0)e^{A(t_0)} = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)ds \Rightarrow y(t) = y_0 e^{A(t_0)-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)ds,$$

che è dunque la soluzione (unica) del problema.

TEOREMA 4.5: Dato il sistema $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, con f definita su D aperto e Lipschitziana di costante L rispetto a y, allora esiste una soluzione del sistema su $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, dove $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, dove $M = \max_D f$.

Dimostrazione:

Sia $T(y) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$, con $T: C^0([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]) \to C^0([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha])$ (in quanto $\alpha \le \frac{b}{M}$ e dunque T mappa $C^0([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha])$ in se stesso).

Sia $y_1 = T(y_0) = t_0 + \int_0^t f(s, y_0(s))ds$. Allora:

$$|y_1(t) - y_0| = \int_0^t f(s, y_0(s))ds \le \int_0^t M = Mt.$$

Sia $y_2(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_1(s))ds$. Allora:

$$|y_2(t) - y_1(t)| = \int_0^t |f(s, y_0) - f(s, y_1)|ds \le L \int_0^t |y_1 - y_0|ds \le \frac{LMt^2}{2}.$$

In generale poniamo $y_{n+1}(t) = T(y_n(t))$ e dunque si può vedere che:

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \le \frac{L^n M t^n}{n!}.$$

Mostriamo che y_n è di Cauchy: se $n > k \gg 1$ si ha

$$\sup|y_k(t) - y_n(t)| \le \sum_{m=k}^{n} \frac{L^m M t^m}{m!} < \varepsilon,$$

dunque y_n converge nello spazio delle funzioni continue a un punto fisso di T, da cui la tesi.

■

TEOREMA DI ESISTENZA DI PEANO: Dato il sistema $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, con f definita su $K_{a,b}$ (come nel teorema di Cauchy) e continua, esiste una soluzione del sistema in $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, dove $\alpha = \left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, dove $M = \max_{K_{a,b}} f$.

Dimostrazione:

Per Stone-Weierstrass e per compattezza di $K_{a,b}$, ho che $\exists f_n \rightrightarrows f$, con $f_n \in C^\infty$.

Considero i problemi di Cauchy $\begin{cases} y_n' = f_n(x, y_n) \\ y_n(x_0) = y_0 \end{cases}$ e trovo (per il teorema precedente) una successione di soluzioni y_n definite su $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Le y_n sono limitate perché a valori in $[y_0 - b, y_0 + b]$ e anche le derivate lo sono, in quanto $|y_n'| = |f_n(x, y_n(x)| < M$.

Dunque y_n soddisfa le ipotesi di Ascoli-Arzelà e dunque $\exists \{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\} | y_{n_k} \rightrightarrows \bar{y}$.

Vediamo che $\bar{y}$ è effettivamente soluzione del problema iniziale.

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_n(s, y_n(s))ds \Rightarrow \underbrace{y_{n_k}}_{\to \bar{y}} = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f_{n_k}\left(s, y_{n_k}(s)\right) ds}_{\to \int_{x_0}^{x} f(s,\bar{y}(s))ds},$$

in quanto per convergenza uniforme si può passare sotto il segno di integrale e poiché $f_n(s, y_n(s)) \rightrightarrows f(x, \bar{y}(x))$, in quanto:

$$|f_n(x, y_n(x)) - f(x, \bar{y}(x))| = \left|\underbrace{f_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))}_{<\varepsilon} + \underbrace{f(x, y_n(x)) - f(x, \bar{y}(x))}_{<\varepsilon\ per\ uniforme\ continuità}\right| < 2\varepsilon.$$

■

PROPOSIZIONE 4.6: Se $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ è diagonalizzabile, cioè $\exists P | P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Allora $e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Dimostrazione:

Denotiamo $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Allora $A = PCP^{-1}$, dunque $e^A = e^{PCP^{-1}}$.

$$e^{PCP^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(PCP^{-1})^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{PC^iP^{-1}}{i!} = P\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C^i}{i!}\right)P^{-1} = Pe^CP^{-1}.$$

Ma osserviamo che:

$$e^C = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^i}{i!} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^i}{i!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

tesi.

■

Notazione: Indicheremo con $J_{\lambda,k} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ il blocco di Jordan $k \times k$ relativo a λ.

Osservazione: $J_{\lambda,k} = \lambda I_k + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. Denotiamo quest'ultima matrice N_k.

Notiamo inoltre che le matrici λI_k e N_k commutano, dunque $e^{J_{\lambda,k}} = e^{\lambda I_k} e^{N_k}$.

Osservazione: N_k^i ha tutti gli elementi nulli tranne che per la $(i-1)$-esima sovradiagonale in cui ci sono 1. In particolare, $N_k^i = 0$ se $i \geq k$.

PROPOSIZIONE 4.7: $e^{tJ_{\lambda,k}}$ è una matrice triangolare superiore dove negli elementi della j-esima sovradiagonale c'è $\frac{t^j e^{t\lambda}}{j!}$.
Dimostrazione:

$e^{J_{\lambda,k}} = e^{\lambda I_k} e^{N_k} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda} \end{pmatrix} e^{N_k}$. Calcoliamo e^{N_k}:

$$e^{N_k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} N_k^j = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} N_k^j = I + N_k + \frac{1}{2!} N_k^2 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} N_k^{k-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$e^{tJ_{\lambda,k}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2 e^{t\lambda}}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1} e^{t\lambda}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2 e^{t\lambda}}{2!} \\ & & & \ddots & te^{t\lambda} \\ & & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

■

PROPOSIZIONE 4.8: Sia $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$. Allora la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ è $y(t) = y_0 e^{tA}$.
Dimostrazione:
Interpretiamo il problema risolvendo prima il problema
$\begin{cases} \dot{B} = AB \\ B(0) = I \end{cases}$ e osservando che $y(t) = y_0 B(t)$, dove $B(t)$ è la soluzione del nuovo problema, è soluzione del problema dell'enunciato.
Inoltre la soluzione del nuovo problema è $B(t) = e^{tA}$, tesi.

■

Osservazione: Dunque se la matrice A è triangolabile, cioè ha il polinomio caratteristico completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}[t]$, allora è semplice risolvere il problema di Cauchy della proposizione precedente.
Anche se p_A ha soluzioni in $\mathbb{C}[t]$, si procede in modo analogo, ricordando l'uguaglianza $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$.
Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, allora $A = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$, dove $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

Dunque $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

TEOREMA DI PROLUNGAMENTO: Sia $f: I \times J \to \mathbb{R}^n$ con le stesse ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz, e sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy associato. Allora si verifica una ed una sola delle seguenti possibilità:

1) $\exists T_{max}$ e $\exists!\, u(t): [t_0 - T, t_0 + T_{max}) \to \mathbb{R}^n$, $u \in C^0$ tale che $\lim_{t \nearrow T_{max}} u(t) \in \partial J$, cioè $\left\| \lim_{t \nearrow T_{max}} u(t) - u_0 \right\| = b$, e tale che $u(t)$ è un prolungamento di $y(t)$, cioè $u(t) = y(t)\ \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$;
2) $\exists u!\,(t) \in C^0\big([t_0 - T, t_0 + a)\big)$ prolungamento massimale di $y(t)$.

Dimostrazione:
Riscriviamo il problema di Cauchy in forma integrale:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f\big(s, u(s)\big) ds.$$

Sia $S = \{T_1 | \exists soluzione\ u(t): [t_0 - T, t_0 + T_1)\ del\ problema\}$.
$T \in S$ per il teorema di Cauchy-Lipschitz $\Rightarrow S \neq \emptyset$. Sia $T_{max} = \sup_S T_1$.
Se $T_1, T_2 \in S$, $0 < T_1 < T_2 \Rightarrow$ esistono due soluzioni, $u_1(t)$ per T_1 e $u_2(t)$ per T_2, ma per Gronwall $u_1(t) = u_2(t)\ \forall t \leq T_1$, dunque il prolungamento è unico.
Sicuramente $T_{max} \leq a$; se $T_{max} = a$, allora verifichiamo la tesi nel caso 2).
Se $T_{max} < a$, allora, per verificare la tesi nel caso 1), mostriamo che $\left\| \lim_{t \nearrow T_{max}} u(t) - u_0 \right\| = b$.
Poniamo $u^* = \lim_{t \nearrow T_{max}} u(t)$, che supponiamo esistere.
Se $\|u^* - u_0\| < b \Rightarrow$ per il teorema di Cauchy-Lipschitz esiste una soluzione locale del problema di Cauchy nell'intervallo $(T_{max} - \varepsilon, T_{max} + \varepsilon) \times (b - \delta_1, b + \delta_2) \subseteq I \times J$, che per Gronwall coincide con $u(t)$, dunque $u(t)$ è prolungabile oltre T_{max}, assurdo, poiché $T_{max} = \sup_S T_1$.

■

Osservazione: Abbiamo trattato il teorema di prolungamento solo per prolungamenti a destra, ma in modo del tutto analogo si può prolungare la soluzione a sinistra.

LEMMA DI GRONWALL 2: Siano $\varphi(t), a(t): [0, T) \to [0, +\infty)$, $\varphi(t) \in C^1$, $a(t) \in C^0$ tali che $\varphi'(t) \leq a(t)\varphi^\alpha(t)$ con $0 < \alpha < 1$.
Se $\int_0^t a(s)ds < +\infty\ \forall t \in [0, T)$, allora $\varphi(t) < +\infty\ \forall t \in [0, T)$.
Se $\int_0^t a(s)ds < M\ \forall t \in [0, T)$, allora $\varphi(t) < M'\ \forall t \in [0, T)$.
Dimostrazione:
Se $\psi(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \varphi(s)$, abbiamo che:

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + \int_0^t a(s)\varphi^\alpha(s)ds \leq \varphi(0) + \int_0^t a(s)\psi^\alpha(s)ds \leq \varphi(0) + \psi^\alpha(t) \int_0^t a(s)ds.$$

Vediamo che il membro più a destra è una funzione crescente, dunque abbiamo che

$$\psi(t) \leq \varphi(0) + \psi^\alpha(t) \int_0^t a(s)ds.$$

Applicando la disuguaglianza di Young $A^{1-\alpha}B^{\alpha} \leq (1-\alpha)A + \alpha B$ a $A = \sqrt[1-\alpha]{\int_0^t a(s)ds}$ e $B = \psi(t)$, si ha:

$$\psi(t) \leq \varphi(0) + (1-\alpha)\sqrt[1-\alpha]{\int_0^t a(s)ds} + \alpha\psi(t),$$

cioè:

$$\psi(t) \leq \frac{\varphi(0)}{1-\alpha} + \sqrt[1-\alpha]{\int_0^t a(s)ds},$$

da cui si ottiene la tesi.

■

Esempio: Dire se la soluzione del problema di Cauchy
$\begin{cases} y'(t) = t^{2014} - y^3(t) \\ y(0) = 2014 \end{cases}$ è globale.
Moltiplicando per $y(t)$, si ha $y'(t)y(t) = t^{2014}y(t) - y^4(t) \leq t^{2014}y(t)$.
Dunque, ponendo $E(t) = \frac{y^2(t)}{2}$ e notando che $E'(t) = y'(t)y(t)$, si ha:

$$E'(t) \leq ct^{2014}\sqrt{E(t)},$$

dove $c \in \mathbb{R}^+$ è una costante.
Per il lemma di Gronwall 2, si ha che $E(t)$ non scoppia in un tempo limitato, dunque anche $y(t)$ non scoppia in un tempo limitato, dunque la soluzione è globale.

PROPOSIZIONE 4.9: Sia dato il sistema
$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$, dove $[A(t)]_{ij} \coloneqq a_{ij}(t) \in C^0(\mathbb{R})$.
Allora $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists!$ soluzione $u(t) \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ che è globale.
Dimostrazione:
La soluzione locale $\exists$ ed è unica per Cauchy-Lipschitz e Gronwall. Inoltre:

$$\left(\frac{\|u(t)\|^2}{2}\right)' = \langle u(t), u'(t)\rangle = \langle u(t), A(t)u(t)\rangle \leq 2\|A(t)\|\frac{\|u(t)\|^2}{2},$$

dunque, se poniamo $E(t) = \frac{\|u(t)\|^2}{2}$, per la variante 1 di Gronwall si ha che:

$$E(t) \leq E(0)e^{\int_0^t 2\|A(s)\|ds},$$

ma poiché $\int_0^t \|A(s)\|ds < +\infty\ \forall t$, si ha che $E(t)$ e quindi $u(t)$ non scoppia in un tempo finito.
Dunque per il teorema di prolungamento la soluzione è globale.

■

Osservazione: Per la proposizione precedente, il sistema
$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$, dove $[A(t)]_{ij} \coloneqq a_{ij}(t) \in C^0(\mathbb{R})$, ha soluzione $\forall u_0$ e quindi in particolare per $u_0 = e_1, \dots, e_n$, dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.
Denotiamo $f_1(t), \dots, f_n(t)$ le soluzioni di questi problemi, cioè $f_j(0) = e_j$ e $f_j' = Af_j\ \forall j$.

DEFINIZIONE 4.6: Definiamo **matrice Wronskiana** di f la matrice

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE 4.7: Definiamo Wronskiano di f

$$W(t) := \det\big(\Phi(t)\big).$$

Osservazione: $\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \cdot tr(A) + o(\varepsilon)$ se $\varepsilon \to 0$.

LEMMA 4.10: $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.
Dimostrazione:
Definendo $e^A := \lim_{k\to\infty}\left(I + \frac{A}{k}\right)^k$ (si può mostrare che questa definizione coincide con l'altra), allora:

$$\det(e^A) = \det\left(\lim_{k\to\infty}\left(I + \frac{A}{k}\right)^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}tr(A)\right)^k = e^{tr(A)}.$$

■

LEMMA DI LIOUVILLE: $W'(t) = tr\big(A(t)\big)W(t)$.
Dimostrazione:
Sia $t_0 \in \mathbb{R}$.

$$f_j(t) = f_j(t_0) + f_j'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) = f_j(t_0) + A(t_0)f_j(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) = \\ = \big(I + A(t_0)(t - t_0)\big)f_j(t_0) + o(|t - t_0|).$$

Poiché $\forall j$ ho questa rappresentazione, allora:

$$\Phi(t) = \big(I + A(t_0)(t - t_0)\big)\Phi(t_0) + o(|t - t_0|),$$

quindi:

$$W(t) = \det\big(\Phi(t)\big) = \det\Big(\big(I + A(t_0)(t - t_0)\big)\Phi(t_0) + o(|t - t_0|)\Big) = \\ = \Big(1 + (t - t_0)tr\big(A(t_0)\big)\Big)W(t_0) + o(|t - t_0|).$$

Ma allora:

$$\frac{W(t) - W(t_0)}{t - t_0} = tr\big(A(t_0)\big)W(t_0) + o(1) \Rightarrow W'(t_0) = tr\big(A(t_0)\big)W(t_0).$$

Poiché questo discorso può essere ripetuto $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, ho la tesi.

■

COROLLARIO 4.11: Se $e_1, \dots, e_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $W(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, cioè le $f_i(t)$ sono linearmente indipendenti.
Dimostrazione:
Poiché $W'(t) = tr\big(A(t)\big)W(t)$, integrando si ha:

$$W(t) = W(0)e^{\int_0^t tr(A(s))ds},$$

ma poiché $W(0) = \det\big(\Phi(0)\big) = \det\big(f_1(0)| \dots |f_n(0)\big) = \det(e_1| \dots |e_n) = \det(I) = 1$ e l'esponenziale non è mai 0, allora $W(t) \neq 0 \ \forall t$.

■

PROPOSIZIONE 4.12: $u(t)$ è soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(0) = g \end{cases}$, con $g \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n | u(t) = c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, dove $\begin{cases} f_j'(t) = A(t)f_j(t) \\ f_j(0) = e_j \end{cases}$ ed $e_1, \dots, e_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione:

L'implicazione da sinistra a destra è ovvia prendendo c_i in modo che $g = \sum c_i e_i$.

Vediamo il viceversa.

Abbiamo che $g = \sum c_k e_k$ e la scelta dei c_k è unica. Sia $U(t) = \sum c_k f_k(t)$.

Vediamo che $U(t)$ è soluzione del problema di Cauchy, poiché:

$$f_k'(t) = A(t)f_k(t) \Rightarrow U'(t) = \sum c_k f_k'(t) = \sum c_k A(t) f_k(t) = A(t)U(t),$$

ma per l'unicità della soluzione globale si ha che $U(t) = u(t)$.

■

PROPOSIZIONE 4.13: Tutte e sole le soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

sono del tipo $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$, dove i c_i sono costanti e i λ_i sono le soluzioni **dell'equazione caratteristica**

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Se una radice λ ha molteplicità r, allora le soluzioni corrispondenti sono $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{r-1}e^{\lambda t}$.

Dimostrazione:

Vediamo che effettivamente sono soluzioni.

Se le radici hanno tutte molteplicità 1, allora:

$$\left(e^{\lambda_i t}\right)^{(n)} + a_1 \left(e^{\lambda_i t}\right)^{(n-1)} + \dots + a_n \left(e^{\lambda_i t}\right) = e^{\lambda_i t}(\lambda_i^n + a_1 \lambda_i^{n-1} + \dots + a_n) = 0.$$

Se invece λ ha molteplicità 2:

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(te^{\lambda t}\right) = n\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \lambda^n t e^{\lambda t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = (\lambda^n t + a_1 \lambda^{n-1} t + \dots + a_n t) + (n\lambda^{n-1} + a_1 (n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_n)$$

Ma il primo addendo è 0, e il secondo anche perché non è altro che l'espressione $y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$ derivata una volta, e poiché la radice aveva molteplicità 2, annulla anche la derivata prima.

Analogamente se la molteplicità è r.

Dunque ho trovato n soluzioni linearmente indipendenti, e per il teorema precedente (ponendo $u = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$) so che lo spazio delle soluzioni è:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i - 1} c_{ij} t^j e^{\lambda_i t},$$

con $c_{ij} \in \mathbb{R}$, λ_i soluzioni dell'equazione caratteristica e $r_1 + \dots + r_s = n$.

■

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI: Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t) = A(t)u(t) + F(t),$$

con $A(t)$ matrice $n \times n$ e $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Sia $u(t) = c_1(t)f_1(t) + \ldots + c_n(t)f_n(t)$, dove $\begin{cases} f_j'(t) = A(t)f_j(t) \\ f_j(0) = e_j \end{cases}$.

Allora:

$u'(t) = c_1'(t)f_1(t) + \ldots + c_n'(t)f_n(t) + f_1'(t)c_1(t) + \ldots + f_n'(t)c_n(t) =$
$= c_1'(t)f_1(t) + \ldots + c_n'(t)f_n(t) + \underbrace{c_1(t)A(t)f_1(t) + \ldots + c_n(t)A(t)f_n(t)}_{=A(t)u(t)}.$

Ma $u'(t) = A(t)u(t) + F(t) \Rightarrow c_1'(t)f_1(t) + \ldots + c_n'(t)f_n(t) = F(t)$.
Risolvendo quest'ultimo sistema $n \times n$, si trovano i $c_i'(t)$, da cui, integrando, si trovano i $c_i(t)$.
Sostituendo queste funzioni in $u(t)$, si trova lo spazio delle soluzioni.

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI PER EQUAZIONI: Consideriamo l'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t).$$

Le soluzioni saranno del tipo $S + y_p$, dove S è lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata e y_p è una soluzione particolare.
Per trovare una soluzione particolare, trasformiamo l'equazione in un sistema di equazioni di ordine 1 e applichiamo il metodo della variazione delle costanti; otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c_1'f_1 + \ldots + c_n'f_n = 0 \\ c_1'f_1' + \ldots + c_n'f_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'f_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'f_n^{(n-1)} = f(t) \end{cases},$$

dove $f_1, \ldots, f_n$ sono le soluzioni particolari.
Definiamo **Wronskiano** delle funzioni $f_1, \ldots, f_n$

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Poiché le funzioni $f_1, \ldots, f_n$ sono linearmente indipendenti, allora si può vedere che $W(t) \neq 0$ $\forall t$.
Dunque utilizzando la formula di Cramer, si ha che:

$$c_i'(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)},$$

dove $W_i(t)$ è la matrice $W(t)$ in cui si è sostituito all'i-esima colonna il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$.

Dunque si ha che:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt.$$

DEFINIZIONE 4.8: Diciamo che $z(x)$ è **sottosoluzione** (**soprasoluzione**) dell'equazione differenziale $y' = f\big(x, y(x)\big)$ se $z'(x) \leq f\big(x, z(x)\big)$ $\big(z'(x) \geq f\big(x, z(x)\big)\big)$.

PROPOSIZIONE 4.14: Se $\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} v' \leq f(x,v) \\ v(x_0) = v_0 \end{cases}$, con $v_0 \leq u_0 \Rightarrow v \leq u \ \ \forall x \geq x_0$.

Dimostrazione:

Supponiamo che per assurdo $\exists \xi > x_0 | v(\xi) - u(\xi) > 0$.

Per il teorema di esistenza degli zeri, ho che $\exists x_1, \dots, x_n$ fra x_0 e ξ in cui $v(x_i) = u(x_i)$.

Scelgo, fra gli x_i, quello più vicino a ξ, sia esso ξ^*.

Dunque $v - u > 0 \ \forall x \in (\xi^*, \xi]$. Ora:

$$v' - u' \leq f(x,v) - f(x,u) \Rightarrow \int_{\xi^*}^{x} (v' - u') \leq \int_{\xi^*}^{x} \big(f(x,v) - f(x,u)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) - u(x) - \big(v(\xi^*) - u(\xi^*)\big) \leq \int_{\xi^*}^{x} |f(x,u) - f(x,v)| \leq L \sup|u(x) - v(x)| \cdot |\xi^* - x|,$$

in quanto f è Lipschitziana rispetto alla seconda variabile.

Ma $v(\xi^*) = u(\xi^*) \Rightarrow v(x) - u(x) \leq L \sup|u(x) - v(x)| \cdot |\xi^* - x|$.

Poiché $v - u$ è positiva nell'intervallo $(\xi^*, \xi]$, allora:

$$|v(x) - u(x)| \leq L \sup|u(x) - v(x)| \cdot |\xi^* - x|.$$

Scelgo un $x \in (\xi^*, \xi]$ abbastanza vicino a ξ^*, tale che $L|\xi^* - x| < 1$; allora:

$$\sup|v(x) - u(x)| < \sup|u(x) - v(x)|,$$

da cui un assurdo.

■

DEFINIZIONE 4.9: Diciamo che $u^* \in \mathbb{R}^n$ è **punto di equilibrio** per il sistema di equazioni differenziali $u' = f(u)$ se $f(u^*) = 0$.

DEFINIZIONE 4.10: $u^* \in \mathbb{R}^n$ è punto di **equilibro stabile** (secondo Lyapunov) del sistema $\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 | \|u_0 - u^*\| \leq \delta \Rightarrow \exists u(t) \in C^0([0, +\infty); \mathbb{R}^n) | \|u(t) - u^*\| \leq \varepsilon$.

DEFINIZIONE 4.11: $u^* \in \mathbb{R}^n$ si dice **punto di stabilità asintotica** se è di equilibrio stabile e $\|u(t) - u^*\| \xrightarrow{t \to \infty} 0$.

TEOREMA 4.15: Se $f'(t) = A$ è tale che $\exists \sigma_0 > 0 | \forall \lambda \in Sp(A)$, $\Re\mathfrak{e}(\lambda) < -\sigma_0$, allora se u^* è punto di equilibrio del sistema $\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$, u^* è punto di stabilità asintotica.

Dimostrazione:

$$u' = f(u) = \underbrace{f(u^*)}_{=0} + A(u - u^*) + o(\|u - u^*\|) = A(u - u^*) + r(u),$$

dove $r(u) \in o(\|u - u^*\|)$.

Poniamo $v = u - u^*$. Allora $v' = u'$.

Dunque $v' = Av + r(v + u^*)$, con $r(v + u^*) \in o(\|v\|)$.

Inoltre $v(0) = u_0 - u^* \coloneqq v_0$ e $R(v) \coloneqq r(v + u^*)$.

Allora abbiamo:

$$\begin{cases} v' = Av + R(v) \\ v(0) = v_0 \end{cases}.$$

$\langle v', v \rangle = \left(\frac{\|v\|^2}{2}\right)'$, quindi facendo il prodotto scalare con l'altro membro, si ha:

$$\left(\frac{\|v\|^2}{2}\right)' = \langle Av, v \rangle + \underbrace{\langle R(v), v \rangle}_{\in o(\|v\|^2)}.$$

Ma $\langle Av, v \rangle \leq -\sigma_0 \|v\|^2 \Rightarrow \langle Av, v \rangle + o(\|v\|^2) \leq -\frac{\sigma_0}{2}\|v\|^2$, dunque ponendo $E(t) \coloneqq \frac{\|v\|^2}{2}$:

$$E'(t) \leq -\frac{\sigma_0}{2}\|v(t)\|^2 = -\sigma_0 E(t) \Rightarrow E(t) \leq E(0)e^{-\sigma_0 t},$$

quindi $\|E(t)\| \to 0$, da cui $\|v(t)\| \to 0$, cioè $\|u(t) - u^*\| \to 0$.

■

DEFINIZIONE 4.12: Definiamo **integrale primo** del sistema $y' = f(y)$ una funzione $H(t)$ tale che $H\big(y(t)\big) = c\ \forall t$, dove c è una costante.

Osservazione: Se $H(t)$ è un integrale primo di $v(t)' = f\big(v(t)\big)$, allora $\langle \nabla H, f(v) \rangle = 0$.
Infatti $H\big(v(t)\big) = c \Rightarrow \langle \nabla H, v' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla H, f(v) \rangle = 0$.
Dunque l'integrale primo rappresenta le curve di livello delle soluzioni del problema differenziale e aiuta a stabilire la forma delle traiettorie vicino a un punto fissato.

PROPOSIZIONE 4.16: Se $u'' = f(u)$ e g è tale che $g'(u) = f(u)$, allora un integrale primo per l'equazione differenziale è $H(v_1, v_2) = \frac{v_2^2}{2} - g(v_1)$.
Dimostrazione:
Se $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \Rightarrow H\big(v(t)\big) = \frac{u'(t)^2}{2} - g\big(u(t)\big) \Rightarrow H\big(v(t)\big)' = u'u'' - f(u)u' = 0$.

■

Esempio: Studiare la stabilità in (0,0) dell'equazione $u'' = \sin(u)$.
Secondo la precedente proposizione, si ha che un integrale primo è $H(v) = \frac{v_2^2}{2} + \cos(v_1)$.
Se v_1 e v_2 sono vicini a 0, allora

$$\frac{v_2^2}{2} + \underbrace{\cos(v_1)}_{\sim 1 - \frac{v_1^2}{2}} \sim 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = \varepsilon,$$

dunque le traiettorie vicino a 0 sono delle iperboli.

Esempio: Studiare la stabilità in (0,0) dell'equazione $u'' = -\sin(u)$ (equazione del pendolo).
Analogamente a prima:

$$\frac{v_2^2}{2} - \underbrace{\cos(v_1)}_{\sim -1 + \frac{v_1^2}{2}} \sim -1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} = \varepsilon,$$

dunque le traiettorie vicino a 0 sono ellittiche (e dunque il moto è periodico).

5 MISURA DI PEANO-JORDAN E INTEGRALE DI RIEMANN

DEFINIZIONE 5.1: Sia Ω un insieme. Definiamo **algebra** su Ω un sottoinsieme $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- $\emptyset \in \mathfrak{F}, \Omega \in \mathfrak{F}$
- $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, \Omega \backslash A \in \mathfrak{F}$.

DEFINIZIONE 5.2: Un'algebra su Ω si dice **$\boldsymbol{\sigma}$-algebra** se è chiusa per unione numerabile, cioè

$$A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}.$$

DEFINIZIONE 5.3: Sia $\mathfrak{F}$ un'algebra su Ω. Definiamo **misura** una funzione $m: \mathfrak{F} \to [0, +\infty]$ per cui vale il principio di additività, cioè:
$A_1, A_2 \in \mathfrak{F}, A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

Osservazione: Dunque se $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}, A_j \cap A_k = \emptyset\ \forall i \neq j \Rightarrow m(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$.
Inoltre $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$, poiché $B = A \cup (B \backslash A) \Rightarrow m(B) = m(A) + m(B \backslash A) \geq m(A)$.

DEFINIZIONE 5.4: Sia $\mathfrak{F}$ una σ-algebra su Ω. Definiamo **$\boldsymbol{\sigma}$-misura** una funzione $m: \mathfrak{F} \to [0, +\infty]$ per cui vale il principio di σ-additività, cioè:

$$A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{F}, A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j \Rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

DEFINIZIONE 5.5: Definiamo **intervallo** $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$, con $a_i, b_i \in \mathbb{R}\ \forall i$.

Osservazione: L'insieme degli intervalli non è un'algebra, infatti ad esempio l'unione di due rettangoli non è in generale un rettangolo.

DEFINIZIONE 5.6: Definiamo **misura** di $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$m(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Osservazione: Dunque, se $I \subseteq \mathbb{R}^n, J \subseteq \mathbb{R}^m$ sono intervalli, allora $m(I \times J) = m(I)m(J)$.

DEFINIZIONE 5.7: Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ha **misura di Peano-Jordan 0** se $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ un ricoprimento $A \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$, con $I_j \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallo $\forall j$, tale che $\sum_{j=1}^N m(I_j) < \varepsilon$.

Osservazione: Un punto ha sempre misura 0.

LEMMA 5.1: Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura 0, allora, se $I \subseteq \mathbb{R}^m$ è un intervallo, $A \times I \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ha misura 0.
Dimostrazione:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \{I_j\}_{j=1}^N$ famiglia di intervalli di $\mathbb{R}^n$ tali che $A \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$ e $\sum_{j=1}^N m(I_j) < \varepsilon$.
Allora $\{I_j \times I\}_{j=1}^N$ è una famiglia di intervalli di $\mathbb{R}^{n+m}$ tali che $A \times I \subseteq \bigcup_{j=1}^N (I_j \times I)$ e

$$\sum_{j=1}^N m(I_j \times I) = \sum_{j=1}^N \left(m(I_j) \cdot m(I)\right) = m(I) \cdot \sum_{j=1}^N m(I_j) < m(I) \cdot \varepsilon,$$

dunque ho la tesi perché $m(I) < +\infty$.

■

COROLLARIO 5.2: Se $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è un intervallo, allora $m(\partial I) = 0$.
Dimostrazione:
Poiché la frontiera di un intervallo è unione di segmenti, che sono a loro volta prodotti di un punto per un intervallo, e che quindi per il lemma precedente hanno misura 0, ho la tesi.

■

Osservazione: Se $m(A) = 0$ e $B \subseteq A$, allora $m(B) = 0$.

DEFINIZIONE 5.8: Se $I_1, \dots, I_k \in \mathbb{R}^n$ sono intervalli, definiamo **pluriintervallo** $I = \bigcup_{i=1}^k I_i$.

Osservazione: L'insieme di tutti i pluriintervalli è un'algebra.

DEFINIZIONE 5.9: $A, B \in \mathbb{R}^n$ si dicono **quasi disgiunti** se $m(A \cap B) = 0$.

Osservazione: Un pluriintervallo è unione di un numero finito di intervalli quasi disgiunti.

DEFINIZIONE 5.10: Sia $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervallo.
Sia $\mathcal{P}_k = \left\{a_k = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{n_k}^{(k)} = b_k\right\}$ una partizione del k-esimo intervallo e denotiamo $\Delta_{k,j} := \left[x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}\right]$, con $1 \leq j \leq n_k$.
Definiamo $\mathcal{P} = \{\Delta = \Delta_{1,j_1} \times \dots \times \Delta_{n,j_n} | j_i \in \{1, \dots, n_i\} \ \forall i\}$ **partizione** dell'intervallo I.

PROPOSIZIONE 5.3: Sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervallo, $I = \bigcup_{j=1}^N I_j$, con gli I_j quasi disgiunti.
Allora $m(I) = \sum_{j=1}^N m(I_j)$.
Dimostrazione:
Scegliamo una partizione $\mathcal{P}$ di I tale che $I_j = \bigcup_{\Delta \subseteq I_j} \Delta \ \forall j$.
Quindi se $\Delta \not\subseteq I_j$, allora $m(\Delta \cap I_j) = 0$.
Dunque $m(I_j) = \sum_{\Delta \subseteq I_j} m(\Delta)$.
Ma poiché $m(I) = \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} \Delta$, si ha:

$$m(I) = \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} m(\Delta) = \sum_{j=1}^N \sum_{\Delta \subseteq I_j} m(\Delta) = \sum_{j=1}^N m(I_j).$$

■

PROPOSIZIONE 5.4: Se $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è un pluriintervallo e $I = \bigcup_{j=1}^{N} I_j = \bigcup_{j=1}^{M} \widetilde{I_j}$, con gli I_j quasi disgiunti e gli $\widetilde{I_j}$ quasi disgiunti, allora $\sum_{j=1}^{N} m(I_j) = \sum_{j=1}^{M} m(\widetilde{I_j})$.
Dimostrazione:
Si procede come prima prendendo una partizione di I che contiene esattamente gli I_j e gli $\widetilde{I_j}$.
■

DEFINIZIONE 5.11: Definiamo **misura di un pluriintervallo** come la somma delle misure degli intervalli disgiunti che lo costituiscono.

Osservazione: Abbiamo visto che è una buona definizione.

DEFINIZIONE 5.12: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiamo **misura esterna** di A
$$m^*(A) = \inf_{P \supseteq A} m(P),$$
dove P è un pluriintervallo.

DEFINIZIONE 5.13: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiamo **misura interna** di A
$$m_*(A) = \sup_{P \subseteq A} m(P),$$
dove P è un pluriintervallo.

Osservazione: La misura esterna è subadditiva, cioè se $A \cap B = \emptyset$, allora $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.
Infatti $\forall \varepsilon > 0$, trovo $P \supseteq A$ e $Q \supseteq B$ pluriintervalli tali che $m(A) \leq m(P) < m(A) + \varepsilon$ e $m(B) \leq m(Q) < m(B) + \varepsilon$.
Ma allora $P \cup Q \supseteq A \cup B$, dunque:
$$m(A \cup B) \leq m(P \cup Q) = m(P) + m(Q) < m(A) + m(B) < 2\varepsilon.$$
Ma poiché ε è arbitrario, allora $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$.
Analogamente la misura interna è superadditiva.

DEFINIZIONE 5.14: $A \subseteq I_0$, con I_0 intervallo di $\mathbb{R}^n$, si dice **misurabile** se $m^*(A) = m_*(A)$.

INSIEME DI CANTOR: Se $A \subset \mathbb{R}$, denotiamo $A + n \coloneqq \{a + n | a \in A\}$ e $\lambda A \coloneqq \{\lambda a | a \in A\}$.
Sia $C_0 = [0,1]$.
Definiamo $C_{k+1} = \frac{C_k}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_k}{3}\right) \subset C_k \ \forall k \geq 0$.
Non è difficile vedere che $m(C_{k+1}) = \frac{2}{3} m(C_k)$.
Definiamo **insieme di Cantor**:
$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Osservazione: $m^*(C) \leq \inf_k m(C_k) = \inf_k \left(\frac{2^k}{3^k}\right) = 0$ e $m_*(C) = 0$, dunque C è misurabile e $m(C) = 0$.

Osservazione: C non è un pluriintervallo, poiché se $C = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$, con $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, allora $C^\circ \neq \emptyset$, assurdo, poiché altrimenti avrebbe misura non nulla.
Dunque notiamo che i pluriintervalli non sono gli unici insiemi misurabili.

FUNZIONE DI CANTOR: Sia $f_0(x) = x \ \ \forall x \in [0,1]$.
Definiamo:

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} f_k(3x) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 1 & se\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 1 + 3f_k\left(x - \frac{2}{3}\right) & se\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si può vedere che f_k è di Cauchy, dunque $f_k \rightrightarrows f$. Questa f, che è continua perché limite della convergenza uniforme di funzioni continue, si chiama **funzione di Cantor**.

Nel seguito, $I_0 \subset \mathbb{R}^n$ sarà l'intervallo massimale in cui lavoreremo.

PROPOSIZIONE 5.5: $A \subseteq I_0$ è misurabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists I_1, I_2$ pluriintervalli, $I_1 \subseteq A \subseteq I_2$, tali che $0 \leq m(I_2) - m(I_1) < \varepsilon$.
Dimostrazione:
Le due implicazioni derivano direttamente dalla definizione di insieme misurabile.

■

PROPOSIZIONE 5.6: $A \subseteq I_0$ è misurabile $\Leftrightarrow m(\partial A) = 0$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) A misurabile e $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists I_1, I_2$ pluriintervalli, $I_1 \subseteq A \subseteq I_2$, tali che $0 \leq m(I_2) - m(I_1) < \varepsilon$.
Per I_1 e I_2 esiste una partizione P tale che $\Delta \in P \Rightarrow \Delta \subseteq I_2 \vee m(\Delta \cap I_2) = 0$.
Ma se $\Delta \subseteq I_2 \Rightarrow \Delta \subseteq I_1 \vee (\Delta \subseteq I_2 \wedge m(\Delta \cap I_1) = 0)$.
Sia $\alpha = \{\Delta \in P | \Delta \subseteq I_2 \wedge m(\Delta \cap I_1) = 0\}$; allora $\partial A \subseteq \bigcup_{\Delta\in\alpha} \Delta$ e dunque:

$$m(\partial A) \leq m\left(\bigcup_{\Delta\in\alpha} \Delta\right) = \sum_{\Delta\in\alpha} m(\Delta) = m(I_2) - m(I_1) < \varepsilon,$$

da cui $m(\partial A) = 0$.
$\Leftarrow$) Sia $\varepsilon > 0$. $m(\partial A) = 0 \Rightarrow \exists I_1, \dots, I_k$ intervalli che coprono ∂A e $m\left(\bigcup_j I_j\right) < \varepsilon$.
Sia J_0 un intervallo che copre A. Allora $J = J_0 \cup \left(\bigcup_j I_j\right)$ è un pluriintervallo che copre A.
Sia P una partizione tale che:

$$I_j = \bigcup_{\substack{\Delta\in P \\ \Delta\cap I_j\neq\emptyset}} \Delta \ \ \forall j,$$

cioè tale che partizioni ogni intervallo I_j.
Definiamo $\Lambda = \left\{\Delta \in P \middle| \Delta \subseteq \bigcup_j I_j\right\}$ e $\Omega = \{\Delta \in P | \Delta \subseteq int(A)\}$.
Siano $P_1 = \bigcup_{\Delta\in\Omega} \Delta$ e $P_2 = \bigcup_{\Delta\in\Lambda\cup\Omega} \Delta$; allora $P_2 \backslash P_1 = \bigcup_j I_j \supseteq \partial A$, da cui:

$$m(P_2) - m(P_1) = \sum_j m(I_j) < \varepsilon,$$

quindi per la proposizione precedente abbiamo la tesi.

■

DEFINIZIONE 5.15: $f: I_0 \to \mathbb{R}^m$ si dice assolutamente continua se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ tale che $\sum_{j=1}^{N} m(I_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} m\left(f(I_j)\right) < \varepsilon$.

PROPOSIZIONE 5.7: Se A ha misura 0 e $f: A \to B$ è assolutamente continua, allora $m(f(A)) = 0$.
Dimostrazione:

$$m(A) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 | \bigcup_{j=1}^{N} I_j \supseteq A, \sum_{j=1}^{N} m(I_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} m\left(f(I_j)\right) < \varepsilon$$

(per assoluta continuità), dunque $m(f(A)) = 0$.

■

Osservazione: In generale se f non è assolutamente continua, la proposizione precedente non vale.

PROPOSIZIONE 5.8: Se $f \in C^1(I_0; \mathbb{R})$, allora f è assolutamente continua.
Dimostrazione:
Sia $\sum_{j=1}^{N} m(I_j) < \delta$, dove gli I_j sono intervalli.
Sia $I_j = \left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right] \times \ldots \times \left[a_n^{(j)}, b_n^{(j)}\right]$ $\forall j$.
Sia $M = \max_{I_0} f'$. Allora:

$$\sum_{j=1}^{N} m\left(f(I_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{N} M^N \cdot m(I_j) = M^N \cdot \sum_{j=1}^{N} m(I_j) < M^N \varepsilon,$$

da cui la tesi.

■

PROPOSIZIONE 5.9: $I \subset I_0$ misurabile e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ assolutamente continua e invertibile, con f^{-1} continua $\Rightarrow f(I)$ è misurabile.
Dimostrazione:
Abbiamo che, se $f(I) = K$, $f(\partial I) = \partial K$, e $f^{-1}(\partial K) = \partial I$.
Dunque, poiché $m(\partial I) = 0$, $\exists \{I_j\}$ ricoprimento di ∂I tale che $\sum_j m(I_j) < \delta$.
Ma allora $m(\partial K) = \sum_j m\left(f(I_j)\right) < \varepsilon$ per assoluta continuità.

■

DEFINIZIONE 5.16: Sia $f: I_0 \to \mathbb{R}$ limitata. Sia P una partizione di I_0, $P = \{\Delta\}$, con i Δ intervalli.
Definiamo **somma superiore** di f secondo P:

$$S(P, f) \coloneqq \sum_{\Delta \in P} \left(\sup_{x \in \Delta} f(x)\right) m(\Delta)$$

e **somma inferiore** di f secondo P:

$$s(P, f) \coloneqq \sum_{\Delta \in P} \left(\inf_{x \in \Delta} f(x)\right) m(\Delta).$$

Osservazione: Se P e Q sono due partizioni qualsiasi di I_0, allora $s(P, f) \leq S(Q, f)$.

Dunque $\sup_P s(P,f) \leq \inf_P S(P,f)$.

DEFINIZIONE 5.17: $f: I_0 \to \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** ($f \in \mathcal{R}(I_0)$) se $\sup_P s(P,f) = \inf_P S(P,f)$. In tale caso, si scrive che:

$$\sup_P s(P,f) = \inf_P S(P,f) := \int_{I_0} f(x)dx.$$

PROPOSIZIONE 5.10: $f \to \int_{I_0} f(x)dx$ è un operatore lineare.

PROPOSIZIONE 5.11: Se $\forall \varepsilon > 0\ \exists P$ partizione tale che $0 \leq S(P,f) - s(P,f) < \varepsilon \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I_0)$.

PROPOSIZIONE 5.12: $f \in C^0(I_0) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I_0)$.

LEMMA 5.13: $f: I_0 \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann $\Rightarrow \Gamma(f) := \{(x, f(x)) | x \in I_0\}$ ha misura 0.
Dimostrazione:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists P = \{\Delta_j\}_{j=1}^N$ tale che $0 \leq S(P,f) - s(P,f) < \varepsilon$. Sia $m_j = \min_{\Delta_j} f$, $M_j = \max_{\Delta_j} f$.

$$\Gamma(f) \subseteq \bigcup_j \Delta_j \times [m_j, M_j] \Rightarrow m(\Gamma(f)) \leq \sum_j m(\Delta_j \times [m_j, M_j]) = \sum_j m(\Delta_j)(M_j - m_j) =$$
$$= S(P,f) - s(P,f) < \varepsilon.$$

■

LEMMA 5.14: $f_1, f_2: I_0 \to \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(I_0)$, $f_2 < f_1 \Rightarrow \{(x,y) | x \in I_0, f_2(x) < y < f_1(x)\}$ è misurabile.
Dimostrazione:
Segue dalla PROPOSIZIONE 5.6 e dal precedente lemma.

■

DEFINIZIONE 5.18: Un insieme del tipo $\{(x,y) | x \in I_0, f_2(x) < y < f_1(x)\}$ si dice **normale**.

DEFINIZIONE 5.19: $K \subset I_0$ compatto misurabile, $f: K \to \mathbb{R}$.
Sia $F(x): I_0 \to \mathbb{R}$ tale che:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in K \\ 0 & se\ x \notin K \end{cases}$$

Allora f si dice **integrabile secondo Riemann** se F è integrabile secondo Riemann in I_0.
Indichiamo l'integrale di f in K come $\int_K f(x)dx := \int_{I_0} F(x)dx$.

Notazione: Indichiamo con $\chi_K(x)$ la funzione caratteristica di K.

PROPOSIZIONE 5.15: $K \subset I_0$ è di misura 0 $\Leftrightarrow \int_K \chi_K(x)dx = 0$.
Dimostrazione:
$\Leftarrow$) $\forall \varepsilon$, possiamo trovare una partizione $P = \{I_j\}$ di I_0 tale che $S(P, \chi_K) < \varepsilon$.
Sia $\tilde{J}$ l'insieme delle j per cui $I_j \cap K \neq \emptyset$; allora $m(K) = \sum_{j \in \tilde{J}} m(I_j) < \varepsilon$.
$\Rightarrow$) Siano $I_1, \dots, I_s$ quasi disgiunti che ricoprono K, $\sum_j m(I_j) < \varepsilon$.
Sia P una partizione di I_0 che contiene come elementi anche $I_1, \dots, I_s$; allora:

$$S(P,\chi_K) = \sum_j m(I_j) < \varepsilon.$$

■

PROPOSIZIONE 5.16: $K \subset I_0$ misurabile $\Leftrightarrow \chi_K(x)$ è integrabile secondo Riemann.
Inoltre:

$$\int_{I_0} \chi_K(x)dx = m(K).$$

Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Siano $P_1 \subseteq K \subseteq P_2$ pluriintervalli, $m(P_2) - m(P_1) < \varepsilon$. Sia $P = \{I_j\}_{j=1}^n$ una partizione di I_0 tale che $\exists \alpha, \beta \subset \{1, \dots, n\}$ per cui $P_1 = \bigcup_{j\in\alpha} I_j$ e $P_2 = \bigcup_{j\in\beta} I_j$, con $\alpha \subset \beta$.
Ora:

$$s(P,\chi_K) = \sum_{j\in\beta} \left(\inf_{I_j} \chi_k(x)\right) m(I_j) \geq \sum_{j\in\alpha} m(I_j) = m(P_1)$$
$$S(P,\chi_K) = \sum_{j\in\beta} \left(\sup_{I_j} \chi_k(x)\right) m(I_j) \leq \sum_{j\in\beta} m(I_j) = m(P_2)$$

da cui $S(P,\chi_K) - s(P,\chi_K) < \varepsilon$.
$\Leftarrow$) Sia $P = \{I_j\}_{j=1}^n$ è una partizione tale che $S(P,\chi_K) - s(P,\chi_K) < \varepsilon$, siano $\alpha, \beta \subset \{1, \dots, n\}$ tali che $j \in \alpha \Leftrightarrow I_j \subseteq K$ e $j \in \beta \Leftrightarrow I_j \cap K \neq \emptyset$. Poniamo $P_1 = \bigcup_{j\in\alpha} I_j$ e $P_2 = \bigcup_{j\in\beta} I_j$.
Evidentemente $P_1 \subseteq K \subseteq P_2$ e:

$$m(P_1) = \sum_{j\in\alpha} m(I_j) = \sum_{j\in\beta} \left(\inf_{I_j} \chi_k(x)\right) m(I_j) = s(P,\chi_K)$$
$$m(P_2) = \sum_{j\in\beta} m(I_j) = \sum_{j\in\beta} \left(\sup_{I_j} \chi_k(x)\right) m(I_j) = S(P,\chi_K).$$

A questo punto è immediato vedere che $\int_{I_0} \chi_K(x)dx = m(K)$.

■

DEFINIZIONE 5.20: $f: I_0 \to \mathbb{R}$ si dice **semplice** se $Im(f) = \{c_1, \dots, c_n\}$ e $K_i \coloneqq \{x \in I_0 | f(x) = c_i\}$ è misurabile $\forall i$.

Osservazione: Se f è semplice, $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{K_j}(x)$, dunque f è integrabile secondo Riemann e:

$$\int_{I_0} f(x)dx = \sum_{j=1}^n c_j m(K_j).$$

TEOREMA DI FUBINI-TONELLI (Formula di riduzione): $I \subseteq \mathbb{R}^n$, $J \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: I \times J \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $I \times J$ e $g(y) \coloneqq \int_I f(x)dx$ esiste ed è integrabile secondo Riemann in J. Allora:

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_J \left(\int_I f(x)dx\right) dy.$$

Dimostrazione:
Sia $\varepsilon > 0$. Sia $P = \{I_n \times J_t\}$ partizione di $I \times J$.

Per definizione di estremo superiore, si hanno le relazioni $\forall n\ \forall y \in J_n$:

$$\sup_{x\in I_n} f(x,y) \le \sup_{(x,y)\in I_n\times J_t} f(x,y)$$
$$\inf_{x\in I_n} f(x,y) \ge \inf_{(x,y)\in I_n\times J_t} f(x,y),$$

da cui:

$$\sum_n \left(\inf_{(x,y)\in I_n\times J_t} f(x,y)\right) m(I_n) \le \sum_n \left(\inf_{x\in I_n} f(x,y)\right) m(I_n) \le g(y) \le \sum_n \left(\sup_{x\in I_n} f(x,y)\right) m(I_n) \le$$
$$\le \sum_n \left(\sup_{(x,y)\in I_n\times J_t} f(x,y)\right) m(I_n).$$

Ma allora:

$$\sum_t \left(\sup_{y\in J_t} g(y)\right) m(J_t) \le \sum_{n,t} \left(\sup_{(x,y)\in I_n\times J_t} f(x,y)\right) m(I_n)m(J_t) = S(P,f)$$
$$\sum_t \left(\inf_{y\in J_t} g(y)\right) m(J_t) \ge \sum_{n,t} \left(\inf_{(x,y)\in I_n\times J_t} f(x,y)\right) m(I_n)m(J_t) = s(P,f).$$

Ma

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy - \varepsilon < s(P,f) \le S(P,f) < \iint_{I\times J} f(x,y)dxdy + \varepsilon$$

e

$$\sum_t \left(\inf_{y\in J_t} g(y)\right) m(J_t) \le \int_J g(y)dy \le \sum_t \left(\sup_{y\in J_t} g(y)\right) m(J_t)$$

portano, grazie alle precedenti disuguaglianze, a:

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy - \varepsilon < s(P,f) \le \int_J g(y)dy \le S(P,f) < \iint_{I\times J} f(x,y)dxdy + \varepsilon.$$

■

PROPOSIZIONE 5.17: Sia $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ misurabile e siano $\varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)\ \forall y \in K$. Sia $\Omega = \{(y, x_n) | y \in K, \varphi_1(y) \le x_n \le \varphi_2(y)\}$ insieme normale. Allora $\forall f : \Omega \to \mathbb{R}$ si ha:

$$\iint_\Omega f(x)dx = \int_K \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(y,x_n)dx_n\right) dy.$$

Dimostrazione:
Sia $I_0 \supseteq K$ intervallo e $J_0 = [a,b]$ un intervallo per cui $\Omega \subseteq I_0 \times J_0$.
Sia $F(y,x_n) = f(y,x_n)$ in Ω e $F(y,x_n) = 0$ in $I_0 \times J_0 \backslash \Omega$.
Allora:

$$\iint_{I_0\times J_0} F(x)\,dx = \int_\Omega f(x)dx$$

e

$$\int_a^b F(y,x_n)dx_n = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(y,x_n)dx_n$$

se $y \in K$, altrimenti $\int_a^b F(y,x_n)dx_n = 0$.
Applicando Fubini-Tonelli, si ha la tesi.

■

PROPOSIZIONE 5.18: Sia $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare, $\det(A) \neq 0$, e sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervallo. Allora $A(I)$ è misurabile e:

$$m\big(A(I)\big) = |\det(A)| \cdot m(I).$$

Dimostrazione:

Poniamo per semplicità $I = [0,1]^n$; altrimenti la dimostrazione è analoga.

Vogliamo mostrare la tesi nel caso:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 \neq 0$; infatti, data $A \in \mathcal{M}(n)$, esistono $E_1, \dots, E_k$ matrici della forma precedente (a meno di scambi di vettori di base) tali che $A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_k$.

Dunque, se mostriamo la tesi nel caso particolare, si avrebbe:

$$\begin{aligned} m\big(A(I)\big) &= m\big(E_1 \cdot \ldots \cdot E_k(I)\big) = |\det E_1| \cdot m\big(E_2 \cdot \ldots \cdot E_k(I)\big) = \ldots = \\ &= |\det(E_1)| \cdot \ldots \cdot |\det(E_k)| \cdot m(I) = |\det(A)| \cdot m(I). \end{aligned}$$

Poniamo $f_i = Ae_i$; allora si può parametrizzare $A(I)$:

$$A(I) = \{c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n | 0 \leq c_i \leq 1\}.$$

Ma

$$c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = (c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n)e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n = \overline{c_1} e_1 + \ldots + \overline{c_n} e_n$$

con $\overline{c_1} = c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n$ e $\overline{c_i} = c_i$ se $i \geq 2$.

Quindi:

$$A(I) = \{\overline{c_1} e_1 + \ldots + \overline{c_n} e_n | 0 \leq \overline{c_i} \leq 1\ \forall i \geq 2, \overline{c_1} \in [\overline{c_2}\lambda_2 + \ldots + \overline{c_n}\lambda_n, \lambda_1 + \overline{c_2}\lambda_2 + \ldots + \overline{c_n}\lambda_n]\}.$$

Per la formula di riduzione, posto $I' = [0,1]^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $c' = (\overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n})$:

$$m\big(A(I)\big) = \int_{I'} \left(\int_{\overline{c_2}\lambda_2 + \ldots + \overline{c_n}\lambda_n}^{\lambda_1 + \overline{c_2}\lambda_2 + \ldots + \overline{c_n}\lambda_n} d\overline{c_1} \right) dc' = \int_{I'} \lambda_1 dc' = \lambda_1 = \det(A).$$

■

PROPOSIZIONE 5.19: Sia $B = B_\infty(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, ε piccolo e $f\colon B \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(B, \mathbb{R}^n)$, $\det\big(Jf(x)\big) \neq 0\ \forall x \in B$. Allora $f(B)$ è misurabile e:

$$m\big(f(B)\big) = \int_B \left|\det\big(Jf(x)\big)\right| dx.$$

Dimostrazione:

Come nella precedente dimostrazione, supponiamo che $y = f(x) \Leftrightarrow y_1 = \sigma(x), y_i = x_i$ se $i \geq 2$; mostrando la tesi in questo caso particolare, si arriva facilmente al caso generale.

$\det\big(Jf(0)\big) = \partial_{x_1}\sigma(0) \neq 0$, quindi $\partial_{x_1}\sigma(0) > 0$ o $\partial_{x_1}\sigma(0) < 0$. I due casi sono analoghi, quindi vediamo il secondo.

Ponendo $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x')$ e $y = (y_1, \dots, y_n) = (y_1, y')$, si ha che $y_1 = \sigma(x)$ è decrescente in tutto B (poiché ε è piccolo) e quindi:

$$f(B) = \{(y_1, y') | \sigma(\varepsilon, x') \leq y_1 \leq \sigma(-\varepsilon, x'), \|x'\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

Posto $B' = B_\infty(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, per la formula di riduzione si ha:

$$\begin{aligned} m\big(f(B)\big) &= \int_{B'} \left(\int_{\sigma(\varepsilon, x')}^{\sigma(-\varepsilon, x')} dy_1 \right) dx' = \int_{B'} \left(\int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \partial_{x_1}\sigma(x) dx_1 \right) dx' = -\int_B \partial_{x_1}\sigma(x) dx = \\ &= \int_B \left|\det\big(Jf(x)\big)\right| dx. \end{aligned}$$

■

PROPOSIZIONE 5.20 (Formula di cambiamento di variabili): Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto misurabile e $F: K \to \mathbb{R}^n$ una funzione C^1 e invertibile tale che $F^{-1}: F(K) \to K$ è C^1. Sia $f: F(K) \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann. Allora:

$$\int_{F(K)} f(x)dx = \int_K f\big(F(x)\big)\big|\det\big(JF(x)\big)\big|dx.$$

Osservazione: Per parametrizzare la sfera $S^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid \|\omega\|_2 = 1\}$, si può usare la parametrizzazione ricorsiva:

$$\omega(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1)\,\omega' \end{pmatrix},$$

dove $\omega'(\theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \in S^{n-2}$. Infatti $\|\omega\|_2 = \sqrt{\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)\,\|\omega'\|} = 1$.
Poniamo $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$.

LEMMA 5.21: I vettori $v_1 = \omega(\theta), v_2 = \partial_{\theta_1}\big(\omega(\theta)\big), \dots, v_n = \partial_{\theta_{n-1}}\big(\omega(\theta)\big)$ sono ortogonali.
Dimostrazione:
Poiché $\langle\omega(\theta), \omega(\theta)\rangle = 1$, allora $\partial_{\theta_j}\big(\omega(\theta), \omega(\theta)\big) = \langle\omega(\theta), \partial_{\theta_j}\big(\omega(\theta)\big)\rangle = 0$.
Se $\theta' = (\theta_2, \dots, \theta_n)$, analogamente a prima si ha che $\langle\omega'(\theta'), \partial_{\theta_j}\big(\omega'(\theta')\big)\rangle = 0$, e basta notare che $\langle\partial_{\theta_1}\big(\omega(\theta)\big), \partial_{\theta_j}\big(\omega(\theta)\big)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle\omega'(\theta'), \partial_{\theta_j}\big(\omega'(\theta')\big)\rangle = 0$.

■

LEMMA 5.22: Sia $J = J(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ la matrice Jacobiana associata al cambiamento di variabili sferiche. Allora $\det(J) = r^{n-1}\sin(\theta_1)^{n-2} \cdot \dots \cdot \sin(\theta_{n-2})$.
Dimostrazione:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -r\sin(\theta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \sin(\theta_1)\,\omega' & r\cos(\theta_1)\omega' & r\sin(\theta_1)\partial_{\theta_2}\omega' & \cdots & r\sin(\theta_1)\partial_{\theta_{n-1}}\omega' \end{pmatrix} = (v_1 \quad rv_2 \quad \dots \quad rv_n).$$

Poiché per il lemma precedente i vettori sono ortogonali, allora $\det(J)$, cioè il volume dell'iperparallelepipedo con lati $v_1, rv_2, \dots, rv_n$, non è altro che il prodotto delle norme di questi vettori.
Ora $\|v_1\|_2 = 1$, $\|rv_2\|_2 = r$, $\|rv_3\|_2 = r\sin(\theta_1)$,…,$\|rv_n\|_2 = r\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{n-2})$; infatti nella k-esima colonna si mette in evidenza un fattore $r\sin(\theta_1)\dots\sin(\theta_{k-2})$ e rimane un vettore di S^{n-1}, che ovviamente ha norma 1.

■

PROPOSIZIONE 5.23: Sia $V_n(R)$ il volume della sfera n-dimensionale di raggio R. Allora:

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n,$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione gamma di Eulero.
Dimostrazione:
Passando in coordinate sferiche (notiamo che in coordinate sferiche i θ_j con $1 \le j \le n-2$ variano fra 0 e π, mentre l'ultimo fra 0 e 2π):

$$V_n(R) = \int_{S^{n-1}} dx = \int_0^R \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} |\det(J)|\,d\theta_{n-1}\dots d\theta_1 dr.$$

Dunque:

$$V_n(R) = \int_0^R \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} r^{n-1} \sin(\theta_1)^{n-2} \cdot \dots \cdot \sin(\theta_{n-2})\, d\theta_{n-1} \dots d\theta_1 dr =$$
$$= \int_0^R r^{n-1} \cdot \int_0^\pi \sin(\theta_1)^{n-2}\, d\theta_1 \cdot \dots \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} = \frac{R^n}{n} \beta\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot 2\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

dove $\beta(x,y) \coloneqq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\, d\theta$ è la funzione beta di Eulero.
Usando la nota uguaglianza:

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

si vede che:

$$V_n(R) = 2\frac{R^n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\frac{R^n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n,$$

dove abbiamo usato le relazioni $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

∎

6 INTEGRALI SU CURVE E SUPERFICI E FORME DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE 6.1: Si definisce **curva** γ una applicazione $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $|a|, |b| < +\infty$, continua. φ si dice **parametrizzazione** di γ.
Se $\varphi \in C^k([a,b])$, γ si dice **di classe C^k**.

DEFINIZIONE 6.2: $\gamma \in C^1$ curva si dice **regolare** se $\varphi'(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$.

DEFINIZIONE 6.3: γ curva si dice **semplice** (o **senza autointersezione**) se $\varphi: (a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi: [a,b) \to \mathbb{R}^n$ sono iniettive.

Osservazione: La parametrizzazione di γ non è unica.

DEFINIZIONE 6.4: $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi_1: [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$ si dicono **equivalenti**, $\varphi \sim \varphi_1 \Leftrightarrow \exists \chi: [a,b] \to [a_1,b_1]$ diffeomorfismo, cioè funzione C^1 tale che $\chi'(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$, tale che $\varphi = \varphi_1 \circ \chi$.

DEFINIZIONE 6.5: Sia $\gamma: \varphi: \Delta \to \mathbb{R}^n$ una curva. Sia $\mathcal{F} = \{\varphi_1 | \varphi_1 \sim \varphi\}$.
Allora $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$, dove $\mathcal{F}^\pm := \{\varphi_1 | \varphi_1 \sim \varphi\ tramite\ \chi, \chi'(t) \gtreqless 0\}$ (infatti se la derivata cambiasse segno, per Weierstrass avrebbe un punto di derivata zero).
Se $\varphi_1 \in \mathcal{F}^+$, si dice che l'**orientazione** di φ_1 è **positiva**; altrimenti è **negativa**.

PROPOSIZIONE 6.1: Se $\gamma: \varphi_0: \Delta_0 \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare e semplice, allora $\varphi_1 \sim \varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_1: \Delta_1 \to \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione regolare, semplice e $\varphi_0(\Delta_0) = \varphi_1(\Delta_1)$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Ovvia.
$\Leftarrow$) Per il teorema della funzione implicita, $\forall t_0 \in \Delta_0$, $\exists \varepsilon > 0 | \exists \chi: \{|t - t_0| < \varepsilon\} \to \Delta_1$ tale che $\varphi_0(t) = \varphi_1(\chi(t))$; inoltre tale χ è una funzione C^1 ed è invertibile.
"Unendo" i vari pezzi di χ, si ottiene il diffeomorfismo cercato.

■

Osservazione: A meno di riscalare, la parametrizzazione di ogni curva può avere dominio $[0,1]$.

DEFINIZIONE 6.6: Siano $\gamma_1: \varphi_1: [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2: \varphi_2: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curve tali che $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$.
Definiamo **somma** di γ_1 e γ_2:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2: \varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(2t) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_2(2t-1) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Osservazione: $\varphi_1 \sim \overline{\varphi_1}$, $\varphi_2 \sim \overline{\varphi_2} \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = \overline{\varphi_1} \sim \overline{\varphi_2}$.

DEFINIZIONE 6.7: $\gamma: \varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Definiamo $-\gamma: \psi: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\psi(t) = \varphi(1-t)\ \forall t$.

DEFINIZIONE 6.8: γ: φ: $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva. Definiamo **lunghezza** di γ:

$$L(\gamma) := \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} \|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\|,$$

dove $P: a = t_0 < t_1 <\ldots< t_{n-1} < t_n = b$ è una partizione di $[a,b]$.
Inoltre, se $L(\gamma) < +\infty$, γ si dice **rettificabile**.

Osservazione: Se $|a|,|b| < +\infty$ e φ è C^1 $\Rightarrow \gamma$ è rettificabile e:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|dt.$$

Osservazione: γ_1,γ_2 rettificabili $\Rightarrow L(\gamma_1 + \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ e $L(-\gamma) = L(\gamma)$.

CURVA DI PEANO: La curva di Peano è una curva p: $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ continua e surgettiva.

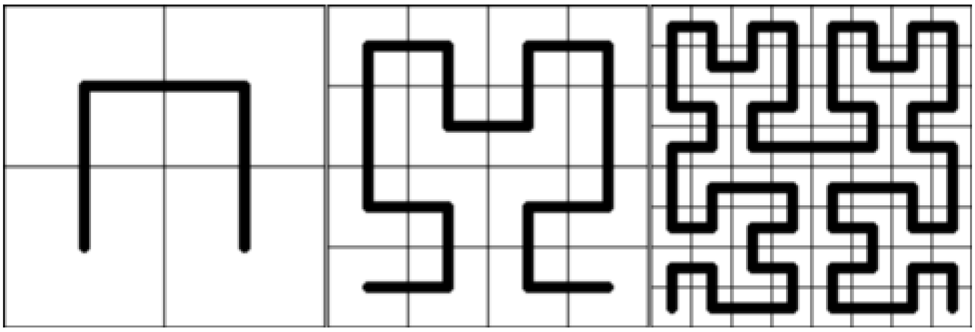


Figura 6.1:Prime iterazioni della curva di Peano

Vediamo che, iterando la curva, al passo n, $\forall (x,y) \in I \times I$, in $B\left((x,y), \frac{1}{2^n}\right)$ c'è un pezzetto di curva di Peano. Questo implica che, posta f_n la curva al passo n, $f_n \rightrightarrows f$, è continua e surgettiva.
Un modo formale per definire la curva di Peano è questo: sia $C \subset [0,1]$ l'insieme di Cantor.
Prendiamo per buono il fatto che esiste un omeomorfismo $\varphi: C \to C \times C$.
Sia $f: C \to I$ la funzione di Cantor; definiamo $F(x,y) = \big(f(x), f(y)\big): C \times C \to I \times I$.
Allora, presa la funzione $F \circ \varphi: C \to I \times I$ ed estesa linearmente a una funzione $P: I \to I \times I$ tale che, se $I \setminus C = \bigcup_n \Delta_n$, con $\Delta_n = (a_n, b_n)$, $P(\Delta_n)$ è il segmento che unisce $(F \circ \varphi)(a_n)$ e $(F \circ \varphi)(b_n)$, otteniamo una funzione continua che "riempie il quadrato".

Osservazione: La curva di Peano è continua ma non è differenziabile in nessun punto.

PROPOSIZIONE 6.2: $\varphi: I \to I \times I$ surgettiva $\Rightarrow \varphi$ non è rettificabile.
In generale, se $\forall (x,y) \in I \times I$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t \in [0,1]$ tale che $\|(x,y) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, allora φ non è rettificabile.
Dimostrazione:
Dividendo $I \times I$ in M^2 quadrati di lato $\frac{1}{M}$, denotiamo con $A(k,l)$ il centro del quadrato in posizione (k,l), $1 \leq k,l \leq M$.
φ deve contenere almeno un collegamento da $A(k,l)$ a $A(k',l')$, con $k' \neq k$, $l' \neq l$, che sarà lungo almeno $\frac{1}{M}$, dunque:

$$L(\varphi) \geq \sum_{\substack{k,l \\ k',l'}} d\big(A(k,l), A(k',l')\big) \geq \sum_{\substack{k,l \\ k',l'}} \frac{1}{M} \geq \frac{1}{M}(M^2) = M$$

per qualunque M, da cui la tesi.

■

Osservazione: La curva di Peano non è rettificabile.

DEFINIZIONE 6.9: $\gamma: \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva, $\gamma \in C^1$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Definiamo **integrale curvilineo di prima specie** di f lungo γ:

$$\int_\gamma f \coloneqq \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\|\varphi'(t)\|dt.$$

Osservazione: Per la formula di cambiamento di variabili, l'integrale di f lungo γ non dipende dalla parametrizzazione φ di γ.

Osservazione: γ_1,γ_2 "unibili"; allora:

- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$;
- $\int_{-\gamma} f = \int_\gamma f$.

DEFINIZIONE 6.10: $\gamma: \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1$, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua.

$$\int_\gamma F \coloneqq \int_a^b \langle F\big(\varphi(t)\big), \varphi'(t)\rangle dt.$$

Osservazione: γ_1,γ_2 "unibili"; allora:

- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$;
- $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$.

Notazione: Visto che l'integrale dipende dall'orientazione, denoteremo con:

$$\int_{\gamma^\pm} F$$

l'integrale a seconda che la parametrizzazione di γ sia positiva o negativa.
Inoltre, se γ è chiusa (cioè $\varphi(a) = \varphi(b)$), useremo la notazione:

$$\int_\gamma F = \oint_\gamma F.$$

DEFINIZIONE 6.11: Definiamo **1-forma** un'applicazione $\omega: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$.

Notazione: Denotiamo $dx_j \coloneqq e_j^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ tale che $e_j^*(e_i) = \delta_{ji}$.

Osservazione: $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ è una base di $(\mathbb{R}^n)^*$, dunque, $\forall \omega$ 1-forma, si ha

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) dx_j$$

per certe 1-forme $\omega_1, \dots, \omega_n$.

DEFINIZIONE 6.12: Una 1-forma $\omega: U \to \mathbb{R}$ si dice **esatta** se esiste una funzione $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\omega_j = \partial_j F\ \forall j$.

DEFINIZIONE 6.13: Sia $\gamma: \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia $\omega: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una 1-forma di classe C^0. Definiamo l'integrale di ω su γ:

$$\int_\gamma \omega := \sum_{j=1}^n \int_a^b \omega_j\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Osservazione: Date γ_1, γ_2 curve "unibili", si ha:

- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_1} \omega$;
- $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$.

TEOREMA 6.3: Sia $\omega: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ aperto una 1-forma di classe C^0. Allora sono fatti equivalenti:

1) ω è esatta;
2) $\forall \gamma$ curva chiusa di classe C^1, si ha:
$$\oint_\gamma \omega = 0;$$
3) $\forall \gamma_1, \gamma_2: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curve di classe C^1 tali che $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ e $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, si ha:
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dimostrazione:

1) ⇒ 2): Sia $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tale che $\partial_j F = \omega_j\ \forall j$. Sia γ una curva chiusa parametrizzata da $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Allora si ha:
$$\frac{dF\big(\varphi(t)\big)}{dt} = \nabla F\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \partial_j F\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t).$$
Dunque:
$$\oint_\gamma \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b \omega_j\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_a^b \frac{dF\big(\varphi(t)\big)}{dt}dt = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = 0,$$
in quanto γ è chiusa.

2) ⇒ 3): $\gamma_1 - \gamma_2$ è chiusa, dunque:
$$0 = \oint_{\gamma_1-\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

3) ⇒ 1): Sia $x_0 \in \mathcal{U}$. Denotiamo $F(x) = \int_{\gamma(x_0,x)} \omega$, dove $\gamma(x)$ è un qualsiasi cammino fra x_0 e x.
Vogliamo vedere che $\partial_{x_j} F(x) = \omega_j$, dove $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$.
Scegliendo $x^* \in \mathcal{U}$ tale che $\|x - x^*\| < \varepsilon$, con ε abbastanza piccolo, possiamo scrivere:
$$\int_{\gamma(x_0,x)} \omega = \int_{\gamma(x_0,x^*)} \omega + \int_{\gamma(x^*,x)} \omega,$$
$\int_{\gamma(x_0,x^*)} \omega$ è una costante, dunque $\partial_{x_j} \int_{\gamma(x_0,x^*)} \omega = 0\ \forall j$. Denotiamo $F^*(x) = \int_{\gamma(x^*,x)} \omega$.
Denotato $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $x^* = (x_1^*, x^{*\prime})$, $x^{*\prime} = (x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Sia $\varphi_1(t) = \big(x_1^* + t(x_1 - x_1^*), x' - x^{*\prime}\big)$ un cammino; se ε è abbastanza piccolo affinché $B(x^*, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, allora, posto $\gamma(x^*, x) \colon \varphi_1(t) = \big(x^* + t(x - x^*), x' - x^{*\prime}\big)$, abbiamo che:

$$\partial_{x_1}\left(\int_{\gamma(x^*,x)} \omega\right) = \partial_{x_1}\left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \omega_j\big(\varphi_1(t)\big)(\varphi_1')_j(t)\, dt\right) =$$

$$\partial_{x_1}\left(\int_0^1 \omega_1\big(\varphi_1(t)\big)(x_1 - x_1^*)\, dt\right) = \partial_{x_1}\left(\int_0^1 \omega_1\big(x_1^* + t(x_1 - x_1^*), x' - x^{*\prime}\big)(x_1 - x_1^*)\, dt\right),$$

in quanto $\varphi_1'(t) = (x_1 - x_1^*, 0, \dots, 0)$.
Con il cambio di variabili $s = x_1^* + (x_1 - x_1^*)t \Rightarrow ds = (x_1 - x_1^*)dt$:

$$\partial_{x_1}\left(\int_{\gamma(x^*,x)} \omega\right) = \partial_{x_1}\left(\int_0^{x_1} \omega_1(s, x' - x^{*\prime}) ds\right) = \omega_1(x_1, x') = \omega_1(x),$$

in quanto $\partial_{x_1}\big(\int_0^{x_1} \omega_1(s, x' - x^{*\prime}) ds\big) = \partial_{x_1}\big(\int_0^{x_1} \omega_1(s, x') ds\big)$, poiché $x^{*\prime}$ è fissato.
Ponendo $\varphi_j(t)$ come $\varphi_1(t)$, ma con la combinazione convessa al posto j-esimo, si vede che $\partial_{x_j} F^*(x) = \omega_j(x)\ \forall j$, cioè la tesi.

■

DEFINIZIONE 6.14: Sia $\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j dx_j$ una 1-forma di classe C^1, si dice **chiusa** se:

$$\partial_{x_k} \omega_j = \partial_{x_j} \omega_k\ \forall j, k.$$

DEFINIZIONE 6.15: Data ω una 1-forma, γ una curva chiusa, definiamo **indice di avvolgimento**

$$\nu(\gamma, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega.$$

Osservazione: Se ω è esatta, $\nu(\gamma, \omega) = 0$.

Osservazione: Per il teorema di Schwarz, $\partial_{xy} F = \partial_{yx} F$ per qualsiasi funzione F, dunque ω esatta implica ω chiusa.
Il viceversa è falso; un controesempio può essere $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = \omega_1 dx + \omega_2 dy$ in $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, con $\omega_1 = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\omega_2 = -\frac{x}{x^2+y^2}$
Infatti ω è chiusa:

$$\partial_x \omega_2 = -\frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y \omega_1,$$

ma non è esatta, perché, posto $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$, $\gamma \colon x^2 + y^2 = 1$,

$$\nu(\gamma, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{x^2+y^2=1} \frac{ydx}{x^2 + y^2} - \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))\, d\theta = -1.$$

DEFINIZIONE 6.16: Siano $\gamma_1 \colon \varphi_1 \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 \colon \varphi_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curve di classe C^0, con $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ e $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$, si dicono **omotope** se $\exists F \colon [a, b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tale che:

- $F(t, 0) = \varphi_1(t)$
- $F(t, 1) = \varphi_2(t)$
- $F(a, s) = \varphi_1(a)$, $F(b, s) = \varphi_1(b)\ \forall s \in [0,1]$.

F si dice **omotopia** fra γ_1 e γ_2.

DEFINIZIONE 6.17: $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa è omotopa a un punto.

LEMMA 6.5: Siano $\gamma_1: \varphi_1: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2: \varphi_2: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curve omotope. Allora esiste una successione $\{\psi_n\}_0^N: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tale che:

- $\psi_0 = \varphi_1, \psi_N = \varphi_2$;
- $\psi_1, \dots, \psi_{N-1}$ sono lineari a tratti;
- ψ_j e ψ_{j+1} sono linearmente omotope (cioè sono omotope tramite una applicazione lineare) $\forall j = 0, \dots, N-1$.

Osservazione: Per il lemma si può sempre costruire un'omotopia di classe C^∞, in quanto composizione di funzioni lineari e dunque C^∞.

TEOREMA 6.6: Se $\mathcal{U}$ è semplicemente connesso, ω chiusa $\Rightarrow$ ω esatta.
Dimostrazione:
Vogliamo dimostrare che, date γ_0, γ_1 curve fra a e b, allora:

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Poiché $\mathcal{U}$ è semplicemente connesso, γ_0 e γ_1 sono omotope. Sia $F(t, s)$ una omotopia fra γ_0 e γ_1.
Supponiamo che F sia di classe C^2 per il lemma precedente.
Poniamo $\gamma_s: \varphi_s(t) = F(t, s)$ e $I(s) = \int_{\gamma_s} \omega$. Se vedo che $I'(s) = 0$, ho la tesi.

$$I(s) := \int_{\gamma_s} \omega = \int_a^b \sum_{j=1}^n \omega_j\big(F(t, s)\big)\partial_t F_j(t, s)dt,$$

ma, visto che $I'(s) = \partial_s \left(\int_{\gamma_s} \omega\right)$:

$$I'(s) = \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \partial_k \omega_j\big(F(t, s)\big)\partial_s F_k(t, s)\partial_t F_j\,(t, s)\right)dt\right) + \sum_{j=1}^n \int_a^b \omega_j\big(F(t, s)\big)\partial_{ts}^2 F_j(t, s)dt.$$

Ma ω è chiusa, perciò $\partial_k \omega_j\big(F(t, s)\big) = \partial_j \omega_k\big(F(t, s)\big)$ (scambiamo j con k):

$$I'(s) = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \omega_k\big(F(t, s)\big)\partial_s F_k(t, s)\partial_t F_j\,(t, s)\right)dt\right) + \sum_{j=1}^n \int_a^b \omega_j\big(F(t, s)\big)\partial_{ts}^2 F_j(t, s)dt.$$

Notando che:

$$\sum_{j=1}^n \partial_j \omega_k\big(F(t, s)\big)\partial_t F_j\,(t, s) = \frac{d}{dt}\Big(\omega_k\big(F(t, s)\big)\Big),$$

si ha:

$$I'(s) = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b \left(\frac{d}{dt}\Big(\omega_k\big(F(t, s)\big)\Big)\,\partial_s F_k(t, s)\right)dt\right) + \sum_{j=1}^n \int_a^b \omega_j\big(F(t, s)\big)\partial_{ts}^2 F_j(t, s)dt.$$

Accorpando le due sommatorie, notiamo che:

$$I'(s) = \int_a^b \left(\partial_t \left(\sum_{k=1}^n \Big(\omega_k\big(F(t, s)\big)\partial_s F_k(t, s)\Big)\right)\right)dt = \left[\sum_{k=1}^n \Big(\omega_k\big(F(t, s)\big)\partial_s F_k(t, s)\Big)\right]_a^b.$$

Ponendo

$$H(t,s)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\big(F(t,s)\big)\partial_s F_k(t,s),$$

si ha:

$$I'(s)=H(b,s)-H(a,s).$$

Ma $F(a,s)$ e $F(b,s)$ sono costanti $\forall s \Rightarrow$ lo sono anche $F_k(a,s)$ e $F_k(b,s) \Rightarrow$
$\Rightarrow \partial_s F_k(a,s)=\partial_s F_k(b,s)=0$, da cui:

$$I'(s)=0-0=0.$$

■

LEMMA 6.7 (di Jordan): Ogni curva chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2$ divide $\mathbb{R}^2$ in U_+ e U_- aperti connessi, cioè $\mathbb{R}^2\backslash Im(\gamma)=U_+\sqcup U_-$ ($\sqcup$ indica l'unione disgiunta), con U_+ limitato e U_- illimitato.

LEMMA 6.8 (di Schoenflies): Sia γ una curva chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2$; allora U_+ è omeomorfo a $\mathbb{D}=\{\|x\|<1\}$, mentre U_- è omeomorfo a $\mathbb{R}^2\backslash\overline{\mathbb{D}}=\{\|x\|>1\}$.

PROPOSIZIONE 6.9: Se $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$ è tale che ogni forma chiusa è esatta, allora $\mathcal{U}$ è semplicemente connesso.
Dimostrazione:
Dimostriamo la contronominale; sia γ curva chiusa non omotopa a un punto.
Allora $\exists x\in U_+$ tale che $x\notin\mathcal{U}$, altrimenti γ starebbe in U_+, che è semplicemente connesso perché omeomorfo al disco e dunque sarebbe omotopa al punto.
Poniamo per semplicità $x=0$.
Ora $U_+\cap\mathcal{U}\cong\mathbb{D}\backslash\{0\}$, dunque consideriamo in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ la forma $\omega=\frac{x_1dx_2-x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2}$.
Come abbiamo già visto, questa forma è chiusa ma non esatta, in quanto ha indice di avvolgimento rispetto alla circonferenza $\neq 0$.

■

Esempio: Calcolare $\int_\gamma (x+y)ds$, dove $\gamma: r=\sqrt{\cos(2\varphi)}$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.
Abbiamo, in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x=r\cos(\varphi)=\sqrt{\cos(2\varphi)}\cos(\varphi)\\ y=r\sin(\varphi)=\sqrt{\cos(2\varphi)}\sin(\varphi)\end{cases}$$

e dunque $ds=\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2}d\varphi$.
Vediamo che, in generale, se $\gamma: r=\Phi(\varphi)$ e $\rho(\varphi)=\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$, si ha che:

$$\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2}=\sqrt{\Phi'(\varphi)^2+\Phi(\varphi)^2}.$$

Si ha che $\binom{x(\varphi)}{y(\varphi)}=\Phi(\varphi)\rho(\varphi)$ e $\big(\Phi(\varphi)\rho(\varphi)\big)'=\Phi'(\varphi)\rho(\varphi)+\Phi(\varphi)\rho'(\varphi)$, dunque:

$$\begin{aligned} x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2&=\|\Phi'(\varphi)\rho(\varphi)+\Phi(\varphi)\rho'(\varphi)\|^2=\|\Phi'(\varphi)\rho(\varphi)\|^2+\|\Phi(\varphi)\rho'(\varphi)\|^2=\\ &=\Phi'(\varphi)^2+\Phi(\varphi)^2,\end{aligned}$$

dove le ultime due uguaglianze seguono da Pitagora (poiché $\langle\rho(\varphi),\rho'(\varphi)\rangle=0$) e dal fatto che $\|\rho(\varphi)\|=\|(\rho'(\varphi)\|=1$.

Dunque, tornando all'esercizio, $\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2}=\sqrt{\left(\frac{-\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}\right)^2+\cos(2\varphi)}=\frac{1}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}$, da cui:

$$\int_\gamma (x+y)ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos(2\varphi)}\,(\sin(\varphi)+\cos(\varphi))\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin(\varphi)+\cos(\varphi))d\varphi = \sqrt{2}.$$

Osservazione: Poiché $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, scriveremo $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$.
Dunque, se $\omega = f_1(z)dz + f_2(z)d\bar{z}$ e $\gamma: z: [a,b] \to \mathbb{C}$, avremo che:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f_1\big(z(t)\big)z'(t) + f_2\big(z(t)\big)\bar{z}'(t)dt.$$

Esempi: Sia $\gamma: z(t) = Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Allora:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Rie^{it}dt = 2\pi i.$$

Oppure:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(Re^{it})^2} Rie^{it}dt = \frac{i}{R}\int_0^{2\pi} e^{-it}dt = \frac{i}{R}\left[\frac{e^{-it}}{-i}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

DEFINIZIONE 6.18: $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ aperto. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** in $z_0 \in \mathcal{U}$ se esiste

$$f'(z_0) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

DEFINIZIONE 6.19: $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** se è olomorfa in ogni punto di $\mathcal{U}$.

Osservazione: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.
$\omega = f(z)dz \Rightarrow f = u + iv$, $dz = dx + idy$, $f \in C^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega = (u+iv)(dx+idy) = \underbrace{(u+iv)}_{\omega_1}dx + \underbrace{(iu-v)}_{\omega_2}dy.$
Dunque ω è chiusa $\Leftrightarrow \partial_y(u+iv) = \partial_x(iu - v) \Leftrightarrow \boxed{\partial_y u = -\partial_x v}$ e $\boxed{\partial_y v = \partial_x u}$, ottenute uguagliando parte reale e immaginaria.
Queste formule prendono il nome di **equazioni di Cauchy-Riemann**.

PROPOSIZIONE 6.10: f olomorfa $\Rightarrow \omega = f(z)dz$ chiusa.
Dimostrazione:
$f = u + iv$, e sappiamo che il limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ non deve cambiare se $h = \varepsilon \in \mathbb{R}$ o se $h = i\varepsilon$.
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow f(z_0 + i\varepsilon) = u(x_0, y_0+\varepsilon) + iv(x_0, y_0 + \varepsilon)$, dunque:

$$\lim_{i\varepsilon\to 0} \frac{f(z_0+i\varepsilon) - f(z_0)}{i\varepsilon} = \frac{1}{i}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\varepsilon) - f(x_0,y_0)}{\varepsilon} + i\cdot\frac{1}{i}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\varepsilon) - f(x_0,y_0)}{\varepsilon} =$$
$$= \frac{\partial_y\big(u(z_0)\big)}{i} + \partial_y\big(v(z_0)\big) = \partial_y\big(v(z_0)\big) - i\partial_y\big(u(z_0)\big).$$

Inoltre:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(z_0+\varepsilon) - f(z_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u(x_0+\varepsilon,y_0) - f(x_0,y_0)}{\varepsilon} + i\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{v(x_0+\varepsilon,y_0) - f(x_0,y_0)}{\varepsilon} =$$
$$= \partial_x\big(u(z_0)\big) + i\partial_x\big(v(z_0)\big).$$

Ma i valori devono coincidere, dunque:

$$\partial_y\big(v(z_0)\big) - i\partial_y\big(u(z_0)\big) = \partial_x\big(u(z_0)\big) + i\partial_x\big(v(z_0)\big),$$

da cui si ottiene Cauchy-Riemann uguagliando parte reale e immaginaria. ■

PROPOSIZIONE 6.11: Se u, v soddisfano Cauchy-Riemann $\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$, dove $\Delta f = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) f$ è il laplaciano.
Dimostrazione:
Fra poco vedremo che $f \in C^1$ nei complessi $\Rightarrow f \in C^\infty$, dunque supponiamo $u, v \in C^2$.
$\partial_x u = \partial_y v \Rightarrow \partial_x^2 u = \partial_{yx} u = \partial_{xy} u = -\partial_x^2 u$, da cui $\partial_x^2 u = 0$.
Analogamente per v.

■

Osservazione: $f(z)$ olomorfa $\Rightarrow \frac{f(z)}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, in quanto rapporto di funzioni olomorfe con denominatore mai nullo.
Dunque, se γ_1 e γ_2 sono curve (con orientazione oraria) che circondano 0, γ_1 e γ_2 sono omotope e quindi:

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z} dz.$$

PROPOSIZIONE 6.12: $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz.$$

Dimostrazione:
Notiamo innanzitutto che l'integrale non dipende da γ; dunque poniamo $\gamma_\varepsilon: z(\varphi) = \varepsilon e^{i\varphi}$ e calcoliamo l'integrale rispetto a questa curva.
Per Taylor, $f(z) = f(0) + f'(0)z + o(|z|) \Rightarrow \frac{f(z)}{z} = \frac{f(0)}{z} + f'(0) + o(1)$.
Inoltre $dz = \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi$, dunque:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{f(0)}{\varepsilon e^{i\varphi}} + O(1)\right) \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = i\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) f(0) + O(\varepsilon),$$

in quanto $O\left(\varepsilon e^{i\varphi}\right) = O(\varepsilon)$ poiché $e^{i\varphi}$ è limitato.
Ma il valore dell'integrale non cambia $\forall \varepsilon$, dunque, se $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) \cdot 2\pi i.$$

■

Osservazione: Se f non è olomorfa in $z_0 \neq 0$, con un calcolo analogo al precedente si vede che:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

PROPOSIZIONE 6.13: $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow f \in C^\infty(\mathcal{U})$.
Dimostrazione:
Per la proposizione precedente, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, ma $\exists f'(z_0)$, dunque applicando ricorsivamente che $f^{(k)}(z_0)$ e $z - z_0$ sono C^∞, si vede che $\forall k$, $\exists f^{(k+1)}(z_0)$.

■

Osservazione: In particolare:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz.$$

PROPOSIZIONE 6.14: f olomorfa in $\mathcal{U} = B(z_0, R)$. Allora la serie di Taylor:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

converge in $\mathcal{U}$ e la convergenza è uniforme in $B(z_0, R-\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$.
Dimostrazione:
$\gamma: \zeta(\varphi) = z_0 + Re^{i\varphi}$. $f(z)$ è limitata, dunque $|f(z)| \leq c$ $\forall z \in B(z_0, R)$ e $|z - z_0| = R - \varepsilon < R$, quindi:

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta\right| \leq \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c\left|Rie^{i\varphi}\right|d\varphi}{R^{k+1}} = k!\cdot\frac{c}{R^k}.$$

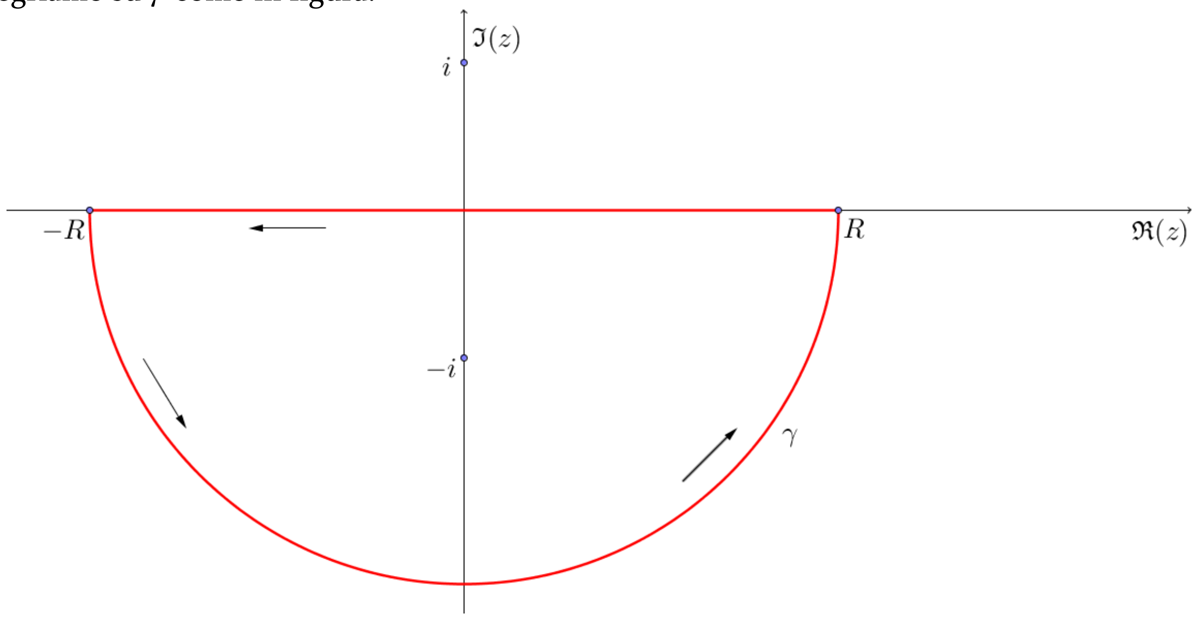
Perciò:

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right| \leq \frac{c}{R^k}\cdot(R-\varepsilon)^k = c\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^k,$$

da cui la serie di Taylor converge per la serie geometrica.

■

Esempio: Calcolare $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.
Sia $\tilde{f}(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. $(1+z^2)^2 = (z+i)^2(z-i)^2$.
Integriamo su γ come in figura:



$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2}dz = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$, dunque, se $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$, questa è olomorfa dentro γ perché il punto di singolarità è all'esterno; quindi:

$$\int_\gamma \frac{\frac{1}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz = 2\pi i f'(-i).$$

Ma $f'(z) = \left(\frac{1}{(z-i)^2}\right)' = -\frac{2}{(z-i)^3} \Rightarrow 2\pi i f'(-i) = 2\pi i \frac{-2}{-8i^3} = -\frac{\pi}{2}$.
Ora notiamo che $\gamma = \tilde{\gamma} \cup \alpha$, dove α è l'arco di circonferenza, parametrizzato da $\alpha: z(\varphi) = Re^{i\varphi}$, con $\pi \leq \varphi \leq 2\pi \Rightarrow |z| = R\ \forall z \in \alpha$; dunque:

$$\int_\alpha \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \leq \frac{\pi R}{R^4} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Da questo segue che:

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi, poiché l'orientazione è opposta, si trova che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA: Sia $F: \mathbb{R}^n \supset I \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(I)$, I intervallo aperto, $\det(Jf(x_0)) \neq 0, x_0 \in I \Rightarrow \exists \mathcal{U} \subset I$, $x_0 \in \mathcal{U}$, $\exists G: F(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$, $G \in C^1(F(\mathcal{U}))$ tali che $F \circ G = id$ e $\forall y \in F(\mathcal{U})$, $G'(y) = F'(x)^{-1}$, dove $y = F(x)$.
Dimostrazione:
Innanzitutto notiamo che, se F_1 e F_2 soddisfano la tesi, la soddisfa anche $F_1 \circ F_2$.
Dunque, data F qualunque, la scomponiamo in componenti:

$$F = F_1 \circ \ldots \circ F_n, \text{ dove } F_j = \begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_j = f_j(x_j) + r(x) \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}, \text{ con } r(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Vediamo che possiamo supporre $f_j = id$ e $r(x) = o(\|x\|)$: poniamo $y_0 = F(x_0)$ e $y = F(x)$, e sia A una matrice $n \times n$ invertibile; allora:

$$y = F(x) \Leftrightarrow A(y - y_0) = A(F(x) - F(x_0)),$$

dunque, cambiando le variabili $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = A(y - y_0)$, e ponendo $\Phi(\tilde{x}) = A(F(x_0 + \tilde{x}) - F(x_0)) = A(JF(x_0)\tilde{x}) + \|\tilde{x}\|$, si ha:

$$y = F(x) \Leftrightarrow \tilde{y} = \Phi(\tilde{x}).$$

Scegliendo $A = JF(x_0)^{-1}$, che esiste, poiché la matrice $JF(x_0)$ ha determinante non nullo, si ha finalmente:

$$y = F(x) \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{x} + \|\tilde{x}\|.$$

A questo punto basta notare che, per il teorema della funzione inversa per una variabile, ogni funzione F_j soddisfa la tesi, da cui, per l'osservazione iniziale, segue la tesi.

■

TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA: $I \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in I$, $J \subset \mathbb{R}^k$ aperto, $u_0 \in J$, $F: I \times J \to K$, $F \in C^1(I \times J)$, $rk(\partial_x F(x_0, u_0)) = n$.
Allora $\exists W = K_1 \times J_1 \subset K \times J$, con $y_0 = F(x_0, u_0) \in K_1$, $u_0 \in J_1$, $\exists \mathcal{U} \subset I$, $\exists G: W \to I$, $G \in C^1(W)$ tale che $\forall (y, u) \in W$, $\exists!\, x = G(y, u) \in U | y = F(x, u)$, e $\partial_y G(y, u) = (\partial_x F(x, u))^{-1}$ $\forall y = F(x, u)$.[******]

DEFINIZIONE 6.20: Definiamo **superficie** Σ uno spazio di Hausdorff tale che $\forall x \in \Sigma$, $\exists \Sigma \supset U_x \ni x$ intorno di x, $\exists \varphi_x: U_x \to W_x \subset \mathbb{R}^n$ omeomorfismo, detto **carta locale**.

DEFINIZIONE 6.21: L'insieme $\mathcal{F} = \{\varphi_k: U_k \to W_k\}$ di carte locali si dice **atlante** per Σ se valgono le seguenti proprietà:

- $\bigcup_k U_k \supseteq \Sigma$
- le carte sono coerenti, cioè $\forall j, k$ tale che $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, esiste un diffeomorfismo $\chi_{jk}: \varphi_j^{-1}(U_j \cap U_k) \to \varphi_k^{-1}(U_j \cap U_k)$ tale che $\varphi_j = \varphi_k \circ \chi_{jk}$.

In questo caso, Σ si dice **superficie regolare**.

Osservazione: Se Σ è compatto, si può scegliere un atlante finito.

DEFINIZIONE 6.22: Una carta locale $\varphi_x: I_x \to \mathcal{U}_x$ si dice **regolare** se $\varphi_x \in C^1$ e $rk(J\varphi_x)$ è massimo.

DEFINIZIONE 6.23: Due carte regolari $\varphi_1: U \to W_1$, $\varphi_2: U \to W_2$ si dicono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo $\chi: W_1 \to W_2$ tale che $\varphi_2 = \chi \circ \varphi_1$.
In particolare, se $\det(J\chi) > 0$, si dice che φ_1, φ_2 hanno la **stessa orientazione**, altrimenti si dice che hanno **orientazione opposta**.

DEFINIZIONE 6.24: Sia $(\Sigma, \mathcal{F})$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ una superficie regolare di dimensione 2. Allora sappiamo che $\forall x_0 \in \Sigma$, esiste un piccolo intorno di 0, $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\|_\infty \leq 1\}$ tale che $\varphi: I_\varepsilon \to U_{x_0}$ è un omeomorfismo e $\varphi(0) = x_0$.
Allora i due vettori $\tau_1 = \partial_{x_1}\varphi(0,0)$ e $\tau_2 = \partial_{x_2}\varphi(0,0)$ definiscono un piano, detto **piano tangente** alla superficie (ed è appunto tangente).

DEFINIZIONE 6.25: Sia $(\Sigma, \mathcal{F})$ una superficie in $\mathbb{R}^n$. Si dice che $\mathcal{F} = \{\varphi_k: U_k \to W_k\}$ è un **atlante localmente finito** se $\forall x_0 \in \Sigma$ esiste un intorno $I_0 \ni x_0$ che interseca un numero finito di W_k.

PROPOSIZIONE 6.15: Ogni superficie regolare ammette un atlante localmente finito.

DEFINIZIONE 6.26: Sia $(\Sigma, \mathcal{F})$ una superficie in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \{\varphi_k: U_k \to W_k\}$.
Si dice che una funzione $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ è **di classe C^k** se lo è la funzione $f \circ \varphi_k: U_k \to \mathbb{R}\ \forall k$.

DEFINIZIONE 6.27: Sia $(\Sigma, \mathcal{F})$ una superficie in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \{\varphi_k: U_k \to W_k\}$.
Un insieme $\{f_j\}$ di funzioni, $f_j: \Sigma \to \mathbb{R}\ \forall j$, si dice **partizione dell'unità** di classe C^k se:

- $f_j \in C^k\ \forall j$;
- $supp(f_j) \subset W_j\ \forall j$;
- $\forall x_0 \in \Sigma$ esiste solo un numero finito di f_j tali che $f_j(x_0) \neq 0$;
- $\sum_j f_j(x) = 1\ \forall x \in \Sigma$ (e la somma è ben definita per la condizione precedente).

PROPOSIZIONE 6.16: Ogni superficie regolare $(\Sigma \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{F} = \{\varphi_k: U_k \to W_k\})$, $\varphi_k \in C^h\ \forall k$, ammette una partizione dell'unità di classe C^h.
Dimostrazione:
Denotiamo $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tale che $\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(1-x)^2}} & se\ |x| < 1 \\ 0 & se\ |x| \geq 1 \end{cases}$. Osserviamo che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Ogni aperto W_k contiene un aperto $D(x_k, \delta_k)$ tale che $\bigcup_k D(x_k, \delta_k) = \Sigma$ è un ricoprimento di Σ (localmente finito perché possiamo supporre $\mathcal{F}$ localmente finito).
Ma allora, denotate $g_k(x) = \psi\left(\frac{\|x-x_k\|}{\delta_k}\right)$ e normalizzate, cioè $f_k(x) = \frac{g_k(x)}{G(x)}$, dove $G(x) = \sum_k g_k(x)$, abbiamo che $\{f_k\}$ è una partizione dell'unità.

■

DEFINIZIONE 6.28: Sia $(\Sigma, \mathcal{F})$ una superficie in $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \{\varphi_k : U_k \to W_k\}$.
Σ si dice **orientabile** se $\forall j \neq k$, il diffeomorfismo $\chi_{jk} : \varphi_j^{-1}(W_j \cap W_k) \to \varphi_k^{-1}(W_j \cap W_k)$ mantiene l'orientazione.

Osservazione: Se $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 | f(x) = 0\}$, dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 tale che $\nabla f(x) \neq 0\ \forall x \in \Sigma$, allora per il teorema della funzione implicita la superficie è regolare e, posta $N : \Sigma \ni x \to N(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$, la tripla $(\tau_1, \tau_2, N(x))$ definisce un'orientazione univoca $\forall x$.
La mappa N si chiama **mappa di Gauss** e il versore $N(x)$ si dice **versore normale esterno** a x rispetto a Σ.

Si può mostrare il seguente risultato:

TEOREMA 6.17: Una superficie è orientabile $\Leftrightarrow$ la mappa di Gauss è continua.

DEFINIZIONE 6.29: Una superficie si dice **con bordo** (o **con frontiera**) se $\partial\Sigma \neq \emptyset$.

Useremo il seguente teorema:

TEOREMA 6.18: Sia $\varphi : I \to \Sigma$ la parametrizzazione di una superficie. Allora $\varphi|_{\partial I} : \partial I \to \partial\Sigma$.

Osservazione: Se un aperto $W \subset \Sigma$ superficie in $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a un aperto $I \subset \mathbb{R}^m$, allora ∂W è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^{m-1}$. In altre parole, il bordo di una superficie m-dimensionale è una superficie $(m-1)$-dimensionale.

PROPOSIZIONE 6.19: $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ superficie 2-dimensionale orientabile $\Rightarrow \partial\Sigma$ orientabile.
Dimostrazione:
Σ orientabile $\Rightarrow$ la mappa di Gauss è ben definita su ogni punto di Σ, dunque in particolare su ogni punto di $\partial\Sigma$. $\partial\Sigma$ è una superficie di dimensione 1, dunque possiamo prendere una parametrizzazione $\varphi : I_\varepsilon^+ \to \Sigma$ in modo che $\varphi|_{\{u_2=0\}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial\Sigma$; allora, in ogni punto $x_0 \in \partial\Sigma$, i versori $N(x_0) = N(\varphi(u_0)) = \frac{\partial_{u_1}\varphi(u_0) \wedge \partial_{u_2}\varphi(u_0)}{\|\partial_{u_1}\varphi(u_0) \wedge \partial_{u_2}\varphi(u_0)\|}$ e $\tau(x_0) = \frac{\partial_{u_1}\varphi(u_1, 0)}{\|\partial_{u_1}\varphi(u_1, 0)\|}$ definiscono l'orientazione di $\partial\Sigma$.

■

DEFINIZIONE 6.30: Sia $L^k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutte le applicazioni k-lineari.
Definiamo $A^k(\mathbb{R}^n) \subset L^k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutte le applicazioni k-lineari antisimmetriche, cioè $\alpha \in A^k(\mathbb{R}^n)$ è tale che $\alpha : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$.

Osservazione: Per la formula di polarizzazione:
$$\alpha(u,v)+\alpha(v,u)=\frac{\alpha(u+v,u+v)-\alpha(u-v,u-v)}{2}.$$

DEFINIZIONE 6.31: Siano $\alpha_1 \in A^{k_1}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_2 \in A^{k_2}(\mathbb{R}^n)$. Definiamo **prodotto tensore** fra α_1 e α_2 $\alpha_1 \otimes \alpha_2 \in L^{k_1+k_2}(\mathbb{R}^n)$ tale che:
$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)\big(v_1,\dots,v_{k_1},w_1,\dots,w_{k_2}\big)=\alpha_1\big(v_1,\dots,v_{k_1}\big)\alpha_2\big(w_1,\dots,w_{k_2}\big).$$

DEFINIZIONE 6.32: Sia $\alpha \in L^k(\mathbb{R}^n)$. Definiamo **antisimmetrizzazione** di α l'applicazione antisimmetrica $\mathcal{A}(\alpha) \in A^k(\mathbb{R}^n)$ tale che:
$$\mathcal{A}(\alpha)(v_1,\dots,v_k)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn(\sigma)\alpha\big(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}\big).$$

DEFINIZIONE 6.33: Siano $\alpha_1 \in A^{k_1}(\mathbb{R}^n), \alpha_2 \in A^{k_2}(\mathbb{R}^n)$. Definiamo **prodotto esterno** di α_1,α_2 l'applicazione $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \mathcal{A}(\alpha_1 \otimes \alpha_2) \in A^{k_1+k_2}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione: Avevamo definito le 1-forme come uno spazio vettoriale con base i $dx_j \in A^1(\mathbb{R}^n)$. Definiamo ora le 2-forme.

DEFINIZIONE 6.34: Definiamo 2-forma una applicazione $\alpha: x \to \alpha(x) \in A^2(\mathbb{R}^n)$, spazio che è generato da:
$$\mathcal{B}=\big\{dx_j \wedge dx_k \in A^2(\mathbb{R}^n)\big|1\le j<k\le n\big\}.$$

Osservazione: $\mathcal{B}$ è una base perché, per definizione di applicazione antisimmetrica, si ha che $dx_j \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_j$ e $dx_j \wedge dx_j = 0 \ \ \forall j,k$.
Inoltre si può verificare che:
$$\big(dx_j \wedge dx_k\big)(e_i,e_h)=\begin{cases}0 & se\ \{j,k\}\neq\{i,h\}\\ 1 & se\ (j,k)=(i,h)\\ -1 & se\ (j,k)=(h,i)\end{cases}.$$
Dunque in generale, se $\alpha \in A^2(\mathbb{R}^n)$, si ha:
$$\alpha(x)=\sum_{1\le j<k\le n}\alpha_{j,k}(x)dx_j\wedge dx_k,$$
dove $\alpha_{j,k}(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione: Possiamo definire una 0-forma come una generica funzione $\theta: \mathbb{R}^n \supset \mathcal{U} \to \mathbb{R}$; dunque, se $\mathcal{U}=\Sigma$ superficie, e $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset I \times J \to \Sigma$ è una parametrizzazione della superficie, si ha che la parametrizzazione della 0-forma diventa:
$$\varphi^*(\theta)(u) \stackrel{\text{def}}{=} \theta\big(\varphi(u)\big).$$
Analogamente, se ω è una 1-forma, la parametrizzazione diventa:
$$\varphi^*(\omega)(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \omega_j\big(\varphi(u)\big)\varphi_j'(u)du.$$

DEFINIZIONE 6.35: Sia $\alpha(x): \mathbb{R}^n \supset \Sigma \to \mathbb{R}$, con Σ superficie, una 2-forma. Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset I \times J \to \Sigma$ una parametrizzazione di Σ. Definiamo **pull-back** la funzione $\varphi^*: A^2(\mathbb{R}^n) \to A^2(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\varphi^*(\alpha)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1\le j<k\le n} \alpha_{jk}\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi^*\big(dx_j\big)(x)\wedge\varphi^*(dx_k)(x),$$

dove:

$$\varphi^*\big(dx_j\big)(x) = dx_j\big(\varphi(x)\big)\varphi_j'(x)dx.$$

LEMMA 6.21: $\alpha = dx_j \wedge dx_k \in A^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \supset I\times J \to \mathbb{R}^n = \big(\varphi_1(u_1,u_2),\dots,\varphi_n(u_1,u_2)\big)$.
Allora:

$$\varphi^*(\alpha) = \det\big(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k\big)\,du_j\wedge du_k.$$

Dimostrazione:
Per definizione, $\varphi^*(\alpha) = \varphi^*\big(dx_j\big)\wedge\varphi^*(dx_k)$, dunque:

$$\varphi^*(\alpha) = \sum_{\substack{k_1\in\{j,k\}\\ k_2\in\{j,k\}}} \Big(\big(\partial_{u_{k_1}}\varphi_j\big)\,du_{k_1}\wedge\big(\partial_{u_{k_2}}\varphi_k\big)\,du_{k_2}\Big) = \sum_{\substack{k_1\in\{j,k\}\\ k_2\in\{j,k\}}} \Big(\big(\partial_{u_{k_1}}\varphi_j\cdot\partial_{u_{k_2}}\varphi_k\big)\,du_{k_1}\wedge du_{k_2}\Big).$$

Posto $a_{i,h} = \partial_{u_i}\varphi_h$, e posto $A = \big(a_{i,h}\big)$, si ha subito:

$$\varphi^*(\alpha) = \det(A)\,du_j\wedge du_k,$$

in quanto $du_j\wedge du_k = -du_k\wedge du_j$ e $du_j\wedge du_j = 0$.

■

Osservazione: Per il lemma precedente, in generale si ha:

$$\varphi^*(\alpha) = \sum_{1\le j<k\le n} \alpha_{jk}\big(\varphi(u)\big)\det\big(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k\big)\,du_j\wedge du_k.$$

DEFINIZIONE 6.36: Sia $\big(\Sigma,\mathcal{F} = \{\varphi_k:\mathbb{R}^2\supset I_{\varepsilon_k}\to W_k\}\big)$ una superficie in $\mathbb{R}^n$ senza bordi parametrizzata da un atlante in $\mathbb{R}^2$.
Sia $\alpha = \sum_{1\le i<j\le n}\alpha_{ij}dx_i\wedge dx_j$ una 2-forma, e sia $\{\psi_k(x)\}$ una partizione dell'unità, tale che $supp(\psi_k)\subseteq W_k$.
Allora definiamo **l'integrale della 2-forma α sulla superficie Σ**:

$$\int_\Sigma \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \int_{I_{\varepsilon_k}} \varphi_k^*(\alpha)(u)\psi_k\big(\varphi(u)\big).$$

PROPOSIZIONE 6.22: Sia $\mathcal{F} = \{\varphi:\mathbb{R}^2\supset I_\varepsilon\to\Sigma\}$ un atlante di Σ composto da una sola carta, e sia $\mathcal{G} = \{\psi:\mathbb{R}^2\supset J_\varepsilon\to\Sigma\}$ un altro atlante equivalente al primo, cioè $\exists\chi: I_\varepsilon\to J_\varepsilon$ un diffeomorfismo tale che $\chi: I_\varepsilon\ni u\to v\in J_\varepsilon$. Allora, se α è una 2-forma:

$$\int_{I_\varepsilon}\varphi^*(\alpha)(u) = \int_{J_\varepsilon}\psi^*(\alpha)(u),$$

cioè l'integrale non dipende dalla parametrizzazione della superficie.
(Osservazione: Il ragionamento può essere esteso a qualsiasi atlante).
Dimostrazione:
Innanzitutto notiamo che:

$$\partial_{u_j}\psi\big(\chi(u)\big) = \sum_{k=1}^{2}\partial_{v_k}\psi\cdot\partial_{u_j}\chi_k(u),$$

da cui:

$$\nabla_u \psi = J\chi \cdot \nabla_v \psi.$$

Quindi:

$$\det(\nabla_u \varphi_1, \nabla_u \varphi_2) = \det(J\chi \cdot \nabla_v \psi_1, J\chi \cdot \nabla_v \psi_2) = \det(J\chi)\det(\nabla_v \psi_1, \nabla_v \psi_2).$$

Ora, per la formula di cambiamento di variabili:

$$\int_{J_\varepsilon} \psi^*(\alpha)(u) = \sum_{1\le j<k\le n} \int_{J_\varepsilon} \alpha_{jk}\big(\psi(v)\big)\det\big(\nabla_v \psi_j, \nabla_n \psi_k\big)\, dv_1 \wedge dv_2 =$$

$$= \sum_{1\le j<k\le n} \int_{I_\varepsilon} \alpha_{jk}\left(\psi\big(\chi(u)\big)\right)\det\big(\nabla_v \psi_j, \nabla_v \psi_k\big)\det(J\chi)\, du_1 \wedge du_2,$$

da cui:

$$\int_{J_\varepsilon} \psi^*(\alpha)(u) = \sum_{1\le j<k\le n} \int_{I_\varepsilon} \alpha_{jk}\big(\varphi(u)\big)\det(\nabla_u \varphi_1, \nabla_u \varphi_2)\, du_1 \wedge du_2 = \int_{I_\varepsilon} \varphi^*(\alpha)(u).$$

■

TEOREMA DI STOKES (per 1-forme su superfici con bordo): α 1-forma, $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ orientabile, regolare e connessa. Allora vale:

$$\int_\Sigma d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha.$$

Dimostrazione:
(Supponiamo che Σ sia parametrizzata da una sola carta; se il numero di carte è maggiore basta applicare questo ragionamento a ciascuna carta.)
Sia $x_0 \in \partial\Sigma$ e $\varphi\colon I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|u\|_\infty < \varepsilon, u_2 \le 0\} \to \Sigma \cap W$.
$\alpha = \sum_{j=1}^3 \alpha_j(x)dx_j$, $\alpha_j(x) \in C^1$, $supp\left(\alpha_j(x)\right) \subset W\ \forall j$.
Allora:

$$\varphi^*(d\alpha) = \varphi^*\left(\sum_{i,j=1}^3 \partial_i \alpha_j(x) dx_i \wedge dx_j\right) = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \alpha_j\big(\varphi(u)\big) d\varphi_i(u) \wedge d\varphi_j(x) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 \left(\partial_i \alpha_j\big(\varphi(u)\big) \cdot \sum_{k_1,k_2=1}^2 \left(\partial_{u_{k_1}} \varphi_i \partial_{u_{k_2}} \varphi_j du_{k_1} \wedge du_{k_2}\right)\right).$$

Ora, per la formula della derivata del prodotto:

$$\sum_i \partial_i \alpha_j\big(\varphi(u)\big)\partial_{u_{k_1}} \varphi_i = \partial_{u_{k_1}} \alpha_j\big(\varphi(u)\big),$$

dunque:

$$\varphi^*(d\alpha) = \sum_j \sum_{k_1,k_2} \partial_{u_{k_1}} \alpha_j\big(\varphi(u)\big)\partial_{u_{k_2}} \varphi_j du_{k_1} \wedge du_{k_2}.$$

Con questo:

$$\int_\Sigma d\alpha = \int_{I_\varepsilon^-} \varphi^*(d\alpha) = \sum_j \sum_{k_1,k_2} \iint_{I_\varepsilon^-} \partial_{u_{k_1}} \alpha_j\big(\varphi(u)\big)\partial_{u_{k_2}} \varphi_j du_{k_1} \wedge du_{k_2}.$$

Integrando per parti, si ha (in quanto φ è definita in I_ε^-):

$$\int_{-\varepsilon}^0 \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \partial_{u_1} \alpha_j \partial_{u_2} \varphi_j du_1 \wedge du_2 = -\int_{-\varepsilon}^0 \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \alpha_j \partial_{u_1} \partial_{u_2} \varphi_j du_1 \wedge du_2,$$

mentre:

$$\int_{-\varepsilon}^{0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_{u_2}\alpha_j\partial_{u_1}\varphi_j du_2\wedge du_1 = -\int_{-\varepsilon}^{0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_{u_2}\alpha_j\partial_{u_1}\varphi_j du_1\wedge du_2 =$$
$$= -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\alpha_j\big(\varphi(u_1,0)\big)\partial_{u_1}\varphi_j(u_1,0)du_1 + \int_{-\varepsilon}^{0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\alpha_j\partial_{u_2}\partial_{u_1}\varphi_j du_1\wedge du_2.$$
Per il teorema di Schwarz, i due integrali doppi si semplificano, da cui:
$$\int_{\Sigma}\varphi^*(d\alpha) = -\sum_{j}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\alpha_j\big(\varphi(u_1,0)\big)\partial_{u_1}\varphi_j(u_1,0)du_1.$$
Ora, se si pone $\psi(u_1)=\varphi(u_1,0)$, abbiamo:
$$\int_{\partial\Sigma}\alpha = \int_{I_\varepsilon^-\cap\{u_2=0\}}\psi^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{3}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\alpha_j\big(\psi(u_1)\big)d\psi_j(u_1) = \sum_{j=1}^{3}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\alpha_j\big(\psi(u_1)\big)\partial_{u_1}\psi_j(u_1)du_1.$$
A questo punto basta cambiare l'orientazione di ψ, ed abbiamo la tesi.

■

TEOREMA DI STOKES (per 2-forme su superfici con bordo): U aperto connesso limitato con $\partial U = \Sigma_1\cup\ldots\cup\Sigma_k$, Σ_i connesso, regolare, orientabile $\forall i$.
$\beta = \beta_1(x)dx_2\wedge dx_3 - \beta_2(x)dx_1\wedge dx_3 + \beta_3(x)dx_1\wedge dx_2$;
$d\beta = (\partial_1\beta_1+\partial_2\beta_2+\partial_3\beta_3)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 = div(\beta)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ (in quanto gli altri elementi sono 0 e il + nasce dal cambiamento da $dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3$ a $x_1\wedge dx_2\wedge dx_3$).
Allora:
$$\int_U d\beta = \int_{\partial U}\beta.$$
Dimostrazione:
La dimostrazione è piuttosto noiosa, e ricalca esattamente la precedente; dunque la evitiamo.

■

TEOREMA DI STOKES (forma alternativa): Sia $\alpha = \sum_{j=1}^{3}A_j(x)dx_j$.
Dunque $d\alpha = \sum_{j,k}F_{jk}dx_j\wedge dx_k$, dove $F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$, cioè $\sum_{j,k}F_{jk} = \nabla\times A = rot(A)$.
Allora:
$$\int_\Sigma d\alpha = \iint_\Sigma \langle N, rot(A)\rangle dS,$$
dove $N = \frac{\partial_{u_1}\varphi\times\partial_{u_2}\varphi}{\|\partial_{u_1}\varphi\times\partial_{u_2}\varphi\|}$ è il versore normale uscente alla superficie.
Dimostrazione:
$$\varphi^*(d\alpha) = \sum_{k_1,k_2}G_{k_1,k_2}du_{k_1}\wedge du_{k_2},$$
dove:
$$G_{k_1,k_2} = \sum_{i,j}\partial_j A_i\partial_{u_{k_1}}\varphi_j\partial_{u_{k_2}}\varphi_i.$$
Dunque:
$$\varphi^*(d\alpha) = (G_{12}-G_{21})du_1\wedge du_2.$$
Se $\partial_{u_1}\varphi = a = (a_1,a_2,a_3)$ e $\partial_{u_2}\varphi = b = (b_1,b_2,b_3)$,
$$G_{12}-G_{21} = \sum_{i,j}\partial_j A_i\left(a_i b_j - a_j b_i\right) = \det(rot(A),a,b) = \langle rot(A), a\times b\rangle,$$
da cui:

$$\varphi^*(d\alpha) = \langle rot(A), \partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi \rangle du_1 \wedge du_2 =$$
$$= \langle rot(A), \frac{\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi}{\|\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi\|} \rangle \underbrace{\|\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi\| du_1 \wedge du_2}_{=dS},$$

da cui la tesi.

■

Osservazione: Dunque possiamo enunciare il teorema di Stokes come:

$$\int_\Sigma \langle rot(A), N \rangle dS = \int_{\partial\Sigma} \langle A, T \rangle dS,$$

dove T è il vettore tangente alla superficie.

TEOREMA DI GAUSS-GREEN: $\omega = F_1 dx_2 \wedge dx_3 - F_2 dx_1 \wedge dx_3 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$.
Allora, se N è come prima il versore normale esterno, si ha:

$$\int_U div(F) dx = \int_{\partial U} \langle N, F \rangle dS.$$

Dimostrazione:
È un corollario della precedente proposizione.

■

7 MISURA E INTEGRALE DI LEBESGUE

DEFINIZIONE 7.1: (X,T) spazio topologico. Si definisce **algebra di Borel** $\mathcal{B}(X)$ la più piccola σ-algebra che contiene T.

Osservazione: $\mathcal{B}(X)=\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{U}_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_j \,|\mathcal{U}_i$ aperti, F_j chiusi$\}$.

Sia $(\Omega,\mathcal{F})$, con $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ un'algebra.

DEFINIZIONE 7.2: Si definisce **misura esterna** un'applicazione $\varphi\colon\mathcal{P}(\Omega)\to[0,+\infty]$ tale che:
1. $\varphi(\emptyset)=0$;
2. $A\subseteq B\in\Omega\Rightarrow\varphi(A)\le\varphi(B)$ (monotonia);
3. $\{A_j\}_{j=1,\dots,+\infty}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$, $\varphi\big(\bigcup_{j=1}^{+\infty}A_j\big)\le\sum_{i=1}^{+\infty}\varphi\big(A_j\big)$ (subadditività).

TEOREMA 7.1 (di Caratheodory): $\varphi\colon\mathcal{P}(\Omega)\to[0,+\infty]$ misura esterna. Allora
$$M=\{E\in\mathcal{P}(\Omega)|\varphi(A)=\varphi(A\cap E)+\varphi(A\cap E^c)\ \forall A\in\mathcal{P}(\Omega)\}$$
è una σ-algebra e $\varphi|_M$ è una misura σ-additiva.
Dimostrazione:
Notiamo innanzitutto che la disuguaglianza $\varphi(A)\le\varphi(A\cap E)+\varphi(A\cap E^c)$ vale sempre per subadditività della misura esterna; è inoltre evidente che $E\in M\Rightarrow E^c\in M$.
Mostriamo che $E_1,E_2\in M\Rightarrow E_1\cup E_2\in M$, cioè:
$$\varphi(A)\ge\varphi\big(A\cap(E_1\cup E_2)\big)+\varphi(A\cap(E_1\cup E_2)^c)\ \forall A\in\mathcal{P}(\Omega).$$
Osserviamo che vale la relazione insiemistica:
$$A\cap(E_1\cup E_2)=(A\cap E_1)\cup(A\cap E_2\cap E_1^c);$$
inoltre $E_2\in M$, quindi vale:
$$\varphi(A\cap E_1^c)=\varphi(A\cap E_1^c\cap E_2)+\varphi(A\cap E_1^c\cap E_2^c),$$
in quanto $A\cap E_1^c\in\mathcal{P}(\Omega)$.
Ma
$$\varphi(A)=\varphi(A\cap E_1)+\varphi(A\cap E_1^c),$$
perciò:
$$\varphi(A)=\varphi(A\cap E_1)+\varphi(A\cap E_1^c\cap E_2)+\varphi(A\cap E_1^c\cap E_2^c)\ge\varphi\big(A\cap(E_1\cup E_2)\big)+\varphi(A\cap E_1^c\cap E_2^c)$$
per la relazione insiemistica precedente e per subadditività.
Vediamo ora il caso numerabile.
Sia $E_1,E_2,\dots\in M$; vogliamo dimostrare che:
$$\varphi(A)\ge\varphi\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}E_i\right)\right)+\varphi\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}E_i\right)^c\right)\ \forall A\in\mathcal{P}(\Omega).$$
Definiamo $\widetilde{E_1}=E_1$, $\widetilde{E_2}=E_2\backslash E_1$,…,$\widetilde{E_n}=E_n\backslash(\bigcup_{i<n}E_i)$,… Ovviamente $E=\bigcup_{i=1}^{+\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\widetilde{E_\iota}$.
Abbiamo che:
$$\varphi(A)=\varphi(A\cap E_1)+\varphi(A\cap E_1^c)$$
$$\varphi(A\cap E_1^c)=\varphi\Bigg(A\cap\underbrace{E_1^c\cap E_2}_{=\widetilde{E_2}}\Bigg)+\varphi(A\cap E_1^c\cap E_2^c)$$
$$\vdots$$

$$\varphi\left(A\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i^c\right)\right)=\varphi\left(A\cap\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i^c\right)\cap E_{n+1}}_{=\widetilde{E_{n+1}}}\right)+\varphi\left(A\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i^c\right)\cap E_{n+1}^c\right)$$

$$\vdots$$

Sostituendo ricorsivamente come prima, si ottiene:

$$\varphi(A)=\sum_{i=1}^{n+1}\varphi\left(A\cap\widetilde{E_\iota}\right)+\varphi\left(A\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n+1}E_i^c\right)\right)\geq\varphi\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}\widetilde{E_\iota}\right)\right)+\varphi\left(A\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n+1}E_i^c\right)\right).$$

per subadditività.

L'ultima somma converge perché a termini positivi; prendendo il limite per $n\to+\infty$, la disuguaglianza rimane e dunque:

$$\varphi(A)\geq\varphi\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\widetilde{E_\iota}\right)\right)+\varphi\left(A\cap\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty}E_i^c\right)\right)=\varphi\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}E_i\right)\right)+\varphi\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}E_i\right)^c\right).$$

Infine, per vedere che $\varphi|_M$ è una misura σ-additiva, basta notare che, se U_i disgiunti:

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}U_i\right)=\varphi\left(\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}U_i\right)\cap U_1\right)+\left(\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}U_i\right)\cap U_1^c\right)=\varphi(U_1)+\varphi\left(\bigcup_{i=2}^{+\infty}U_i\right),$$

dunque

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}U_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\varphi(U_1)\quad\forall n,$$

da cui:

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}U_i\right)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(U_1),$$

e l'altra inclusione deriva dalla subadditività.

■

PROPOSIZIONE 7.2: Se $\mathcal{F}$ è un'algebra su Ω, e $\mu:\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ è tale che $\mu(\emptyset)=0$, allora, posta $\varphi(A)=\inf_{\substack{A\subseteq\bigcup_j E_j\\ E_j\in\mathcal{F}}}\sum_j\mu(E_j)$, φ è una misura esterna.

Dimostrazione:

È facile vedere che $A\subseteq B\Rightarrow\varphi(A)\leq\varphi(B)$, poiché ogni ricoprimento di B è ricoprimento anche di A. Vediamo che vale la subadditività, cioè:

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}S_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(S_1).$$

Fissiamo $\varepsilon>0$. Esistono ricoprimenti del tipo:

$$S_1\subseteq\bigcup_i A_{1i},\qquad A_{1i}\in\mathcal{F},\qquad\varphi(S_1)\geq\sum_i\mu(A_{1i})-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_n\subseteq\bigcup_i A_{ni},\qquad A_{ni}\in\mathcal{F},\qquad\varphi(S_n)\geq\sum_i\mu(A_{ni})-\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Ma $S=\bigcup_n S_n=\bigcup_n\bigcup_i A_{ni}$, dunque:

$$\varphi(S) \leq \sum_n \sum_i \mu(A_{ni}) \leq \sum_n \left(\varphi(S_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n \varphi(S_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.

■

DEFINIZIONE 7.3: Σ_0 algebra su Ω, $m_0: \Sigma_0 \to [0, +\infty]$ si dice **premisura** se, dati $E_1, E_2, \dots \in \Sigma_0$ disgiunti tali che $E = \bigcup_j E_j \in \Sigma_0$, $m_0(E) = \sum_j m_0(E_j)$.

PROPOSIZIONE 7.3: $m_0: \Sigma_0 \to [0, +\infty]$ premisura, $\varphi(S) = \inf_{\substack{S \subseteq \bigcup_j E_j \\ E_j \in \Sigma_0}} \sum_j m_0(E_j)$.

Allora $\forall E \in \Sigma_0$, $m_0(E) = \varphi(E)$.

Dimostrazione:

La disuguaglianza $m_0(E) \geq \varphi(E)$ si ottiene considerando E come ricoprimento di se stesso.

Vediamo l'altra. Sia $E \subseteq \bigcup_j E_j$ un ricoprimento di E.

Denotiamo $\widetilde{E_1} = E_1 \cap E$, $\widetilde{E_2} = (E_2 \cap E_1^c) \cap E$,…,$\widetilde{E_n} = \left(E_n \setminus (\bigcup_{k<n} E_k)\right) \cap E$.

Ovviamente $E = \bigcup_n \widetilde{E_n}$.

Per definizione di premisura, $m_0(E) = \sum_n m_0(\widetilde{E_n})$, ma $\varphi(E) + \varepsilon \geq \sum_n m_0(E_n)$, e $\widetilde{E_n} \subseteq E_n$, quindi:

$$m_0(E) = \sum_n m_0(\widetilde{E_n}) \leq \sum_n m_0(E_n) \leq \varphi(E) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.

■

TEOREMA 7.4: La misura di Peano-Jordan (Ω, Σ_0, m_0) è una premisura.

Dimostrazione:

Sia $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \in \Sigma_0$, con $I_j \in \Sigma_0$ disgiunti.

Visto che $m_0(I) \geq m_0\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_j\right) = \sum_{i=1}^{n} m_0(I_j)$, per monotonia si ha la disuguaglianza:

$$m_0(I) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m_0(I_j).$$

Vediamo l'altra disuguaglianza. Sia $\varepsilon > 0$.

Si "ingrassano" gli I_j in modo da avere $\widetilde{I_j} \supseteq I_j$, $m(\widetilde{I_j}) = m(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Visto che $\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{I_j} \supseteq I$ e I è compatto, estraiamo un ricoprimento finito $\widetilde{I_{J_1}}, \dots, \widetilde{I_{J_m}}$ di I per cui:

$$m_0(I) \leq m_0\left(\bigcup_{i=1}^{m} \widetilde{I_{J_\imath}}\right) = \sum_{i=1}^{m} m_0(\widetilde{I_{J_\imath}}) = \sum_{i=1}^{m} m_0(I_{j_i}) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_0(I_i) + \varepsilon.$$

■

DEFINIZIONE 7.4: Presa la misura di Peano-Jordan $(\mathbb{R}^n, \Sigma_0, m_0)$, costruiamo la misura esterna φ tale che:

$$\varphi(A) = \inf_{\substack{A \subseteq \bigcup_j E_j \\ E_j \in \mathcal{F}}} \sum_j m_0(E_j).$$

A questo punto, il teorema di Caratheodory ci assicura che $\exists$ misura $(\mathbb{R}^n, \Sigma, m)$ tale che $E \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$. Tale misura si chiama **misura di Lebesgue**.

DEFINIZIONE 7.5: $(\Omega_1, \Sigma_1, \varphi_1)$ misura esterna qualunque, $(\Omega^*, \Sigma^*, m^*)$ misura derivante da Caratheodory. $E \subseteq \Omega^*$ si dice **m_1-misurabile** se $E \in \Sigma^*$, cioè $\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)\ \forall A \subseteq \Omega^*$.
In particolare, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **misurabile secondo Lebesgue** se $E \in \Sigma$.

PROPOSIZIONE 7.5: Ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è unione numerabile di intervalli chiusi quasi disgiunti.
Dimostrazione:
Denotiamo con $W_0 = \left\{Q_i^{(0)} \middle| i = (i_1, \dots, i_n)\right\}$ l'insieme degli ipercubi $Q_i^{(0)}$ di lato 1 di vertici interi con primo vertice in $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$.
Analogamente, denotiamo con $W_k = \left\{Q_i^{(k)} \middle| i = (i_1, \dots, i_n)\right\}$ l'insieme degli ipercubi $Q_i^{(0)}$ di lato $\frac{1}{2^k}$ di vertici interi con primo vertice in $i = (i_1, \dots, i_n) \in \left(\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}\right)^n$.
Se $\alpha_k = \left\{Q_i^{(k)} \subseteq U \middle| Q_i^{(k)} \nsubseteq Q_j^{(l)}\ \forall l < k, \forall Q_j^{(l)} \in \alpha_l\right\}$ e $\alpha = \bigcup_k \alpha_k$, è facile vedere che:

$$U = \bigcup_{Q_i^{(k)} \in \alpha} Q_i^{(k)}.$$

■

LEMMA 7.6: $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $\exists U \supseteq K$ aperto tale che $\varphi(U \setminus K) < \varepsilon$.
Dimostrazione:
$\forall U \supseteq K$ limitato, la precedente proposizione ci assicura che $\exists I_j$ intervalli chiusi quasi disgiunti tali che:

$$U \setminus K = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j.$$

Sappiamo che $\varphi(I) \geq \sum_{i=1}^{N} \varphi(I_j)$ è limitato, in quanto U è limitato, dunque $\forall \varepsilon\ \exists N = N(\varepsilon)$ tale che:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi(I_j) < \varepsilon.$$

Se $U' = U \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j$, $U' \supseteq K$ e $U' \setminus K \subseteq \bigcup_{j>N} I_j$. Da questo:

$$\varphi(U' \setminus K) \leq \sum_{j>N} m_0(I_j) < \varepsilon$$

per subadditività, monotonia di φ e $m_0(I) = \varphi(I)\ \forall I$ pluriintervallo.

■

TEOREMA 7.7: Ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue.
Dimostrazione:
Ci basta verificare che $\varphi(A) \geq \varphi(A \cap K) + \varphi(A \cap K^c)\ \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$.
$\forall \varepsilon > 0$, si può prendere un ricoprimento di A, $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supseteq A$ tale che $\delta(I_j) \leq \varepsilon\ \forall j$, con δ diametro dell'intervallo; dunque si ha:

$$\varphi(A) + \varepsilon \geq \sum_j m_0(I_j).$$

Per il lemma, $\exists U \supseteq K$ aperto tale che $d(U^c, K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $\varphi(U \setminus K) = \varphi(K^c \setminus U^c) < \varepsilon$.

Definiamo $J_1 = \{j | I_j \cap K = \emptyset\}$ e $J_2 = \{j | I_j \cap K \neq \emptyset\}$; notiamo che:
$$A \cap K \subseteq \bigcup_{j \in J_2} I_j, \quad A \cap U^c \subseteq \bigcup_{j \in J_1} I_j.$$
Dunque:
$$\varphi(A) + \varepsilon \geq \sum_{j \in J_1 \cup J_2} m_0(I_j) = \sum_{j \in J_1} m_0(I_j) + \sum_{j \in J_2} m_0(I_j) \geq \varphi(A \cap K) + \varphi(A \cap U^c),$$
ma $\varphi(A \cap U^c) + \varepsilon \geq \varphi(A \cap U^c) + \varphi(K^c \backslash U^c) \geq \varphi(A \cap K^c \cap U^c) + \varphi(A \cap K^c \backslash U^c) = \varphi(A \cap K^c \cap U^c) + \varphi(A \cap K^c \cap U) \geq \varphi(A \cap K^c)$, da cui:
$$\varphi(A) + \varepsilon \geq \varphi(A \cap K) + \varphi(A \cap K^c) - \varepsilon,$$
cioè la tesi.

■

PROPOSIZIONE 7.8: Sia $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una famiglia di compatti tali che $K_j \subseteq K_{j+1}$ $\forall j \geq 1$.
Allora $K = \bigcup_j K_j \in \Sigma$ e:
$$m(K) = \lim_{j \to +\infty} m(K_j).$$
Dimostrazione:
Se $\widetilde{K_j} = K_j \backslash K_{j-1}$ $\forall j \geq 2$ e $\widetilde{K_1} = K_1$, allora $K = \bigcup_j \widetilde{K_j} \in \Sigma$ in quanto $\widetilde{K_j} \in \Sigma$ e Σ è una σ-algebra; inoltre:
$$m(K) = m\left(\bigcup_j \widetilde{K_j}\right) = m(K_1) + \sum_{j \geq 2} \big(m(K_j) - m(K_{j-1})\big) = \lim_{j \to +\infty} m(K_j).$$

■

COROLLARIO 7.9: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \Sigma$ (cioè i boreliani sono misurabili secondo Lebesgue).
Dimostrazione:
Basta ricordare che i boreliani sono (ad esempio) generati dai chiusi, e i precedenti risultati ci assicurano che i chiusi sono misurabili.

■

TEOREMA 7.10: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K$ compatto e U aperto, $K \subseteq S \subseteq U$ tali che $m(U \backslash K) < \varepsilon$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Se $S \in \Sigma$, $\exists$ un ricoprimento $U = \bigcup_j I_j \supseteq S$ tale che $m(U \backslash S) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Inoltre sia $I = \bigcup_k I_k \supseteq U \backslash S$ un ricoprimento di $U \backslash S$ tale che $m\big(I \backslash (U \backslash S)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$; se $K = U \backslash I$, K è compatto e $m(U \backslash K) = m\big(U \backslash (U \backslash I)\big) = m(U \cap I) < m(I) = m\big(I \backslash (U \backslash S)\big) + + m\big(I \cap (U \backslash S)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
$\Leftarrow$) Basta verificare che $\varphi(A) \geq \varphi(A \cap S) + \varphi(A \cap S^c)$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$.
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists I \supseteq A$, $I_1 \subseteq A \cap S$, $I_2 \subseteq A \cap S^c$ tali che $\varphi(I \backslash A) < \varepsilon$, $\varphi\big((A \cap S) \backslash I_1\big) < \varepsilon$, $\varphi\big((A \cap S) \backslash I_2\big) < \varepsilon$. Ma $I \supseteq I_1 \cup I_2$ per costruzione, dunque $m(I) \geq m(I_1) + m(I_2)$.
Allora:
$$\varphi(A) + \varepsilon \geq \varphi(A \cap S) - \varepsilon + \varphi(A \cap S^c) - \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \varphi(A) + 3\varepsilon \geq \varphi(A \cap S) + \varphi(A \cap S^c)$$
$\forall \varepsilon > 0$, da cui la tesi.

■

Nel seguito sia $(\Omega_1, \Sigma_1, m_1)$ un generico spazio di misura.

DEFINIZIONE 7.6: Una funzione $f: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ si dice **misurabile** se $f^{-1}\big((t, +\infty]\big)$ è misurabile $\forall t \in \mathbb{R}$.

Osservazione: Visto che $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è una σ-algebra, affinché f sia misurabile basta che sia misurabile ogni immagine inversa di un boreliano.

PROPOSIZIONE 7.11: Siano $f, g: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ funzioni misurabili. Allora:
1. cf è misurabile $\forall c \neq 0$.
2. $f \pm g$ è misurabile.
3. se $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua, $F\big(f(x), g(x)\big)$ è misurabile.
4. se $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili, $S(x) = \sup_j f_j(x)$ e $s(x) = \inf_j f_j(x)$ sono misurabili.

Dimostrazione:
1. $\{f(x) > t\} = \{cf(x) > ct\}$, dunque$f^{-1}\big((t, +\infty]\big) \in \Sigma_1 \Leftrightarrow (cf)^{-1}\big((ct, +\infty]\big) \in \Sigma$.
2. Basta scrivere l'insieme $\{(f \pm g)(x) > t\}$ come unione quasi disgiunta di quadrati $Q_{ij} = I_i \times I_j$ e $(f \pm g)^{-1}\big((t, +\infty]\big) \in \Sigma_1 \Leftrightarrow f^{-1}(I_i) \in \Sigma \wedge g^{-1}(I_j) \in \Sigma\ \forall i, j$.
3. Analoga alla precedente notando che $\{F(x, y) > t\}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$.
4. $\{S(x) > t\} = \bigcap_j \{f_j(x) > t\}$ e $\{s(x) > t\} = \bigcup_j \{f_j(x) > t\}$.

■

PROPOSIZIONE 7.12: Ogni funzione continua è misurabile.
Dimostrazione:
f continua $\Rightarrow f^{-1}\big((t, +\infty]\big)$ è aperto in Ω_1, dunque sta in $\mathcal{B}(\Omega_1) \subseteq \Sigma_1$.

DEFINIZIONE 7.7: Una funzione $s: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ si dice **semplice** se $s(\Omega_1)$ è un insieme finito $\{e_1, \dots, e_r\}$ e ogni insieme $E_i = \{f(x) = e_i\}$ è misurabile.

Osservazione: Ogni funzione semplice si può scrivere come:
$$s = \sum_{i=1}^{r} e_i \chi_{E_i},$$
dove gli $E_i = \{f(x) = e_i\}$ sono disgiunti.

DEFINIZIONE 7.8: Sia $P(\Omega)$ una proprietà. Si dice che P è vera **quasi ovunque** se è vera $\forall x \in \Omega \setminus F$, con $m(F) = 0$.

PROPOSIZIONE 7.13: Sia $f: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ è misurabile, $f \geq 0$ quasi ovunque. Esiste una successione crescente $s_k(x)$ di funzioni semplici, $s_k(x) \geq 0$ quasi ovunque tali che $s_k(x) \nearrow f(x)$ quasi ovunque.
Dimostrazione:
Sia $F \subseteq \Omega_1$, $m(F) = 0$. Sia $A = \Omega_1 \setminus F$ è tale che $f(x) \geq 0\ \forall x \in A$.
Definiamo:

$$s_k(x) = k\chi_{E_k} + \sum_{i=1}^{k2^k} \frac{i-1}{2^k} \chi_{E_{k,i}},$$
dove:
$$E_k = \{x \in A | f(x) \geq k\}, \quad E_{k,i} = \left\{x \in A \middle| f(x) \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)\right\}.$$
Grazie alla stima:
$$|f(x) - s_k(x)| < 2^{-k} \ \ \forall x \in A \backslash E_k,$$
si ha che $s_k(x)$ approssima $f(x)$ "bene" fuori da E_k.
Visto che $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots$, si ha che:
$$\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E = \{x \in A | f(x) = \infty\},$$
dunque $s_k(x) \nearrow f(x)$ in $A\backslash E$ e $s_k(x) \nearrow \infty = f(x)$ in E.

■

COROLLARIO 7.14: Sia $f: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ è misurabile. Esiste una successione crescente $s_k(x)$ di funzioni semplici, $s_k(x)$ tali che $s_k(x) \to f(x)$ quasi ovunque.
Dimostrazione:
Se $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$, $f = f^+ - f^-$ e f^+, f^- sono positive quasi ovunque, dunque si ha la tesi per la proposizione precedente.

■

DEFINIZIONE 7.9: Sia $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ funzione semplice. Se $E \subseteq \Omega_1$ è misurabile, si definisce **integrale** di s su E:
$$\int_E s(x) dm_1(x) = \sum_{i=1}^n c_i m_1(E_i \cap E).$$

LEMMA 7.15: Sia $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ semplice, e siano $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \in \Omega_1$ tali che $\bigcup_k S_k = \Omega_1$.
Allora:
$$\lim_{k\to\infty} \int_{S_k} s(x) dm_1(x) = \int_{\Omega_1} s(x) dm_1(x).$$
Dimostrazione:
Basta notare che $S_k \cap E_i \nearrow E_i$, quindi per σ-additività:
$$\lim_{k\to\infty} m_1(S_k \cap E_i) = m_1(E_i).$$
Dalla definizione di integrale:
$$\lim_{k\to\infty} \int_{S_k} s(x) dm_1(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n c_i m_1(E_i \cap S_k) = \sum_{i=1}^n c_i m_1(E_i) = \int_{\Omega_1} s(x) dm_1(x).$$

■

DEFINIZIONE 7.10: Sia $f: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ misurabile, $f(x) \geq 0$ quasi ovunque. Si definisce **integrale** di f su $E \subseteq \Omega_1$ misurabile:
$$\int_E f(x) dm_1(x) = \sup\left\{\int_E s(x) dm_1(x) \middle| 0 \leq s(x) \leq f(x), s(x)\ semplice\right\}.$$

Se $f: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ è misurabile e $\int_E f^+(x)dm_1(x) < +\infty \vee \int_E f^-(x)dm_1(x) < +\infty$, si definisce **integrale** di f su E:

$$\int_E f(x)dm_1(x) = \int_E f^+(x)dm_1(x) - \int_E f^-(x)dm_1(x).$$

Osservazione: L'integrale è lineare e $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f(x)dm_1(x) = 0$.

DEFINIZIONE 7.11: Una funzione misurabile $f: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ si dice **sommabile** se $\int_E f^+(x)dm_1(x) < +\infty \wedge \int_E f^-(x)dm_1(x) < +\infty$.
Lo spazio $L^1(\Omega_1, m_1)$ è lo spazio delle funzioni sommabili.

TEOREMA 7.16 (Beppo Levi): Sia f_k una successione crescente quasi ovunque di funzioni misurabili positive quasi ovunque, tali che $f_k(x) \to f(x)$. Allora:

$$\int_{\Omega_1} f_k(x)dm_1(x) \to \int_{\Omega_1} f(x)dm_1(x),$$

cioè:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x)dm_1(x) = \int_{\Omega_1} \lim_{k\to\infty}\big(f_k(x)\big)\, dm_1(x)$$

Dimostrazione:
La successione f_k è crescente quasi ovunque, dunque, se $f(x) = \lim_k f_k(x) = \sup_k f_k(x)$:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x)dm_1(x) \leq \int_{\Omega_1} f(x)dm_1(x).$$

Vediamo la disuguaglianza opposta. Sia $0 \leq s(x) \leq f(x)$ semplice.
Sia $c \in (0,1)$ e poniamo $E_k = \{x | f_k(x) \geq cs(x)\}\ \forall k$. Banalmente $E_k \subseteq E_{k+1}$ e $\bigcup_k E_k = \Omega_1$.
Dunque:

$$\int_{\Omega_1} f_k(x)dm_1(x) \geq \int_{E_k} f_k(x)dm_1(x) \geq c \int_{E_k} s(x)dm_1(x).$$

Ma:

$$\int_{E_k} s(x)dm_1(x) \to \int_{\Omega_1} s(x)dm_1(x),$$

quindi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ tale che:

$$\int_{\Omega_1} f_N(x)dm_1(x) \geq c \int_{\Omega_1} s(x)dm_1(x) - \varepsilon.$$

Da questo segue che:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x)dm_1(x) \geq c \int_{\Omega_1} s(x)dm_1(x) - \varepsilon$$

$\forall 0 \leq s(x) \leq f(x)$ semplice, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall c \in (0,1)$, cioè:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x)dm_1(x) \geq \int_{\Omega_1} f(x)dm_1(x).$$

■

TEOREMA 7.17 (Fatou): Sia $f_k(x)$ una successione di funzioni misurabili positive quasi ovunque. Allora:

$$\int_{\Omega_1} \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\, dm_1(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x)dm_1(x).$$

Dimostrazione:
Poniamo $g_k(x) = \inf_{i\geq k} f_i(x)$. g_k è crescente, quindi per Beppo Levi:
$$\int_{\Omega_1} \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\, dm_1(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} g_k(x) dm_1(x) \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{i\geq k} \int_{\Omega_1} f_i(x) dm_1(x) =$$
$$= \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x) dm_1(x).$$

■

TEOREMA 7.18 (della convergenza dominata di Lebesgue): Sia $f_k(x)$ una successione di funzioni sommabili, tali che $\exists g(x)$ sommabile tale che $g(x) = |f_k(x)|\ \forall k$ quasi ovunque. Allora, se $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$:
$$\int_{\Omega_1} f_k(x) dm_1(x) \to \int_{\Omega_1} f(x) dm_1(x),$$
cioè:
$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x) dm_1(x) = \int_{\Omega_1} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, dm_1(x).$$
Dimostrazione:
Sicuramente $2g(x) \geq |f_k(x) - f(x)|\ \forall k$ quasi ovunque. Se $h_k(x) = 2g(x) - |f_k(x) - f(x)|$, $\liminf_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$, dunque applicando Fatou si ha che:
$$\int_{\Omega_1} \liminf_{k\to\infty} h_k(x)\, dm_1(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} h_k(x) dm_1(x),$$
cioè:
$$2\int_{\Omega_1} g(x) dm_1(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} (2g(x) - |f_k(x) - f(x)|) dm_1(x)$$
$$= 2\int_{\Omega_1} g(x) dm_1(x) - \limsup_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} |f_k(x) - f(x)| dm_1(x),$$
da cui:
$$\limsup_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} |f_k(x) - f(x)| dm_1(x) \leq 0,$$
ma $|f_k(x) - f(x)| \geq 0$, quindi:
$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} f_k(x) dm_1(x) = \int_{\Omega_1} f(x) dm_1(x).$$

■

TEOREMA 7.19 (di Egorov): Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili tali che $f_k \to f$ q.o. in Ω_1. Allora, $\forall \delta > 0$, $\exists B$ tale che $m(B) \leq \delta$ e $f_k \rightrightarrows f$ in $\Omega_1 \setminus B$.
Dimostrazione:
$\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, sia:
$$B_{k,\varepsilon} = \{x \in \Omega \,|\, \exists j > k \text{ tale che } |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$
Evidentemente, fissato $\varepsilon > 0$, si ha $B_{1,\varepsilon} \supseteq B_{2,\varepsilon} \supseteq \cdots$ e $\bigcap_k B_{k,\varepsilon} = F_\varepsilon$ con $m(F_\varepsilon) = 0$, quindi, $\forall \delta, \forall s\ \exists N = N(\delta, s)$ tale che $m(B_{N,2^{-s}}) \leq \delta 2^{-s}$. Posto:
$$B(\delta) = \bigcup_s B_{N,2^{-s}},$$
si ha $m(B(\delta)) \leq \delta$ e f_k converge uniformemente a f in $\Omega_1 \setminus B(\delta)$.

■

LEMMA 7.20: Se f è una funzione non negativa quasi ovunque, sommabile e:

$$\int_{\Omega_1} f(x)dm_1(x) = 0,$$

allora $f(x) = 0$ q.o.
Dimostrazione:
$\forall k \in \mathbb{N}$, sia:

$$E_k = \left\{x \in \Omega_1 \middle| f(x) \geq \frac{1}{k}\right\};$$

visto che l'integrale è 0 e la funzione è non negativa q.o., si deve avere $m_1(E_k) = 0\ \forall k$.
Ma:

$$\{x \in \Omega_1 | f(x) > 0\} = \bigcup_k E_k \Rightarrow m_1(\{f(x) > 0\}) = \sum_k m_1(E_k) = 0.$$

■

TEOREMA 7.21: f integrabile secondo Riemann $\Rightarrow$ f integrabile secondo Lebesgue.
Dimostrazione:
L'integrabilità secondo Riemann ci assicura che esistono funzioni semplici $s_n(x)$ e $S_n(x)$ tali che $s_n(x) \leq f(x) \leq S_n(x)\ \forall n$ (s_n e S_n non sono altro che l'inf e il sup di f secondo particolari partizioni dell'intervallo di integrazione).
Si ha:

$$s_n(x) \nearrow f_-(x) \leq f(x)$$

e:

$$S_n(x) \searrow f_+(x) \geq f(x),$$

e $f_-(x)$, $f_+(x)$ stanno in L^1 per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.
A questo punto basta notare che per l'integrabilità secondo Riemann:

$$\int_\Omega f_-(x)dx = \int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega f_+(x)dx,$$

e con il lemma precedente segue che $f_-(x) = f(x) = f_+(x)$ q.o.

■

DEFINIZIONE 7.12: Data f misurabile, e $1 \leq p < \infty$, si definisce **norma L^p** di f il numero:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega_1} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definiamo inoltre **spazio $L^p(\Omega_1)$**:

$$L^p(\Omega_1) = {\{f | \|f\|_{L^p} < +\infty\}}/_{\sim},$$

dove $f \sim g$ se $f = g$ q.o.

DEFINIZIONE 7.13: Data f misurabile, si definisce **norma L^∞** di f il numero:

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_1} f \coloneqq \inf\{a \in \mathbb{R} | f(x) \leq a \text{ q.o.}\}.$$

Analogamente, si definisce **spazio $L^\infty(\Omega_1)$**:

$$L^\infty(\Omega_1) = {\{f | \|f\|_{L^\infty} < +\infty\}}/_{\sim},$$

dove $f \sim g$ se $f = g$ q.o.

Osservazione: Ripercorrendo la dimostrazione che ogni funzione misurabile è limite di una successione crescente di funzioni semplici, si vede che il sottospazio di $L^p(\Omega_1)$ delle funzioni semplici è denso in $L^p(\Omega_1)$.

LEMMA 7.22 (disuguaglianza di Minkowski): $\|.\|_{L^p}$ soddisfa la disuguaglianza triangolare, cioè

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Dimostrazione:
Per densità delle funzioni semplici, basta mostrare che vale per quelle; ma vale per la disuguaglianza di Minkowski discreta (capitolo 1) $\forall 1 \leq p < \infty$; il caso $p = \infty$ è banale.

■

Osservazione: Dunque $\|.\|_{L^p}$ è una norma $\forall 1 \leq p \leq \infty$; inoltre $L^p(\Omega_1)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita su $\mathbb{R}$.

LEMMA 7.23: Sia $\{g_k\}_k$ una successione di funzioni in L^p tali che $\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_{L^p} < \infty$.
Allora $\exists f \in L^p$ tale che:

$$\sum_{k=1}^{n} g_k \to f$$

quasi ovunque.
Dimostrazione:
Poniamo $h_n = \sum_{k=1}^{n}|g_k|$ e $h = \sum_{k=1}^{\infty}|g_k|$.
$h_n \nearrow h$, dunque per Beppo Levi:

$$\int_{\Omega_1} h^p dm_1 = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1} h_n^p dm_1.$$

Per la disuguaglianza di Minkowski:

$$\|h_n\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{n}\|g_k\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_{L^p} = M.$$

Dunque $h \in L^p$ e $\|h\|_{L^p} \leq M$. Inoltre la successione $\sum_{k=1}^{n} g_k$ è assolutamente convergente quasi ovunque puntualmente, dunque converge a $f \in L^p$ con $|f| \leq h$.
Ma allora:

$$\left|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p \leq \left(|f| + \sum_{k=1}^{n}|g_k|\right)^p \leq (2h)^p \in L^1,$$

quindi per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1}\left|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p dm_1 = 0,$$

cioè $\sum_{k=1}^{n} g_k \to f$ in L^p.

■

PROPOSIZIONE 7.24: Ogni successione di Cauchy $\{f_k\}$ in L^p, $1 \leq p \leq \infty$ ha limite q.o. in L^p.
Dimostrazione:
Vediamo prima il caso $1 \leq p < \infty$.
Visto che la successione è di Cauchy, sia $\{f_{k_n}\} \subseteq \{f_k\}$ una sottosuccessione tale che:

$$\left\|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}\right\|_{L^p} \leq 2^{-n};$$

inoltre poniamo:

$$g_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\right|.$$

Sicuramente la successione $\{g_n\}$ cresce, e per Beppo Levi

$$\left\|\lim_{n\to\infty} g_n\right\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^p} < +\infty,$$

dunque, se $g = \lim_{n\to\infty} g_n$, $g \in L^p$.

Ma allora per il lemma precedente la successione:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\right) = f_{k_n} - f_{k_1}$$

converge a un elemento $f \in L^p$.

Ma poiché la successione iniziale era di Cauchy, e ha una sottosuccessione convergente a $f \in L^p$, anche l'intera successione deve convergere a f.

Se invece $p = \infty$, e $\{f_k\}$ è di Cauchy in L^∞, allora $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\left|f_j(x) - f_k(x)\right| < \frac{1}{m} \quad \forall j,k \geq n, \forall x \in \Omega_1 \backslash N_{j,k,m},$$

dove $N_{j,k,m}$ ha misura nulla. Se:

$$N = \bigcup_{j,k,m\in\mathbb{N}} N_{j,k,m},$$

$m_1(N) = 0$ e $\forall x \in \Omega_1 \backslash N$, la successione di numeri reali $\{f_k(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

Dunque possiamo definire il limite puntuale:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

$\forall x \in \Omega_1 \backslash N$. In questo spazio si ha:

$$\left|f_j(x) - f(x)\right| < \frac{1}{m} \quad \forall j \geq n$$

per un certo $n = n(m)$. Ma allora $f(x) \in L^\infty$ e $f_k \to f$ q.o.

■

PROPOSIZIONE 7.25: Se $f_k \to f$ in L^p, allora:

$$\|f - f_k\|_{L^p} \to 0.$$

Dimostrazione:

Per la disuguaglianza triangolare, $\forall h, g \in L^p$ si ha:

$$\|h\|_{L^p} - \|g\|_{L^p} \leq \|h - g\|_{L^p}$$

e:

$$\|g\|_{L^p} - \|h\|_{L^p} \leq \|g - h\|_{L^p} = \|h - g\|_{L^p},$$

dunque:

$$\left|\|h\|_{L^p} - \|g\|_{L^p}\right| \leq \|h - g\|_{L^p}.$$

Se $h = f_k$ e $g = f$, si ha la tesi.

■

Osservazione: Se $\{f_k\}$ è di Cauchy in L^p, $\exists f_{k_n} \to f$ q.o. e f_{k_n} è dominata, cioè $\left|f_{n_k}\right| \leq |g|$, con $g \in L^p$.

COROLLARIO 7.26: $\forall 1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\Omega_1), \|.\|_{L^p})$ è uno spazio di Banach.

PROPOSIZIONE 7.27 (disuguaglianza di Hölder): Se $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, allora $fg \in L^1$ e:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Dimostrazione:
Se f, g sono funzioni semplici, la tesi segue banalmente dal caso discreto.
Ma le funzioni semplici sono dense in L^p, dunque segue la tesi per densità.

■

Osservazione: La disuguaglianza $\|fg\|_{L^1} \leq K \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ è falsa $\forall K \in \mathbb{R}$.
Infatti, se $g = \chi_{B(x_0,r)}$, $m_1 = dx$ misura di Lebesgue, e la disuguaglianza fosse vera per K fissato, si avrebbe:

$$\int_{B(x_0,r)} |f| dx = \int_\Omega |f| \chi_{B(x_0,r)}(x) dx \leq K \left(\int_\Omega |f| dx \right) \underbrace{\left(\int_\Omega \chi_{B(x_0,r)} dx \right)}_{= m(B(x_0,r))},$$

dunque:

$$\frac{\int_{B(x_0,r)} |f| dx}{m(B(x_0,r))} \leq K \left(\int_\Omega |f| dx \right),$$

ma se f è continua, il primo termine tende a $|f(x_0)|$, e in generale la disuguaglianza:

$$\sup_\Omega |f| \leq K \int_\Omega |f| dx$$

è falsa $\forall K \in \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 7.28 (disuguaglianza di Hölder generalizzata): Siano $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tali che $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Allora:

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Dimostrazione:
Applichiamo Hölder a $\frac{p}{r}$ e $\frac{q}{r}$, alle funzioni $|f|^r$ e $|g|^r$:

$$\left(\int |f|^r |g|^r \right) \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int |g|^q \right)^{\frac{r}{q}},$$

cioè:

$$\left(\int |f|^r |g|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

PROPOSIZIONE 7.29 (disuguaglianza di interpolazione): Siano $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tali che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, con $\theta \in [0,1]$. Allora:

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\theta \|f\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Dimostrazione:
La tesi è equivalente a:

$$\left(\int |f|^r\right) \leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int |f|^q\right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}.$$

Osserviamo che $|f|^r = |f|^{\theta r}|f|^{(1-\theta)r}$ e $1 = \frac{\theta r}{p} + \frac{(1-\theta)r}{q} = \frac{1}{\frac{p}{\theta r}} + \frac{1}{\frac{q}{(1-\theta)r}}$, dunque applicando Hölder:

$$\int |f|^{\theta r}|f|^{(1-\theta)r} \leq \left\|f^{\theta r}\right\|_{L^{\frac{p}{\theta r}}} \left\|f^{(1-\theta)r}\right\|_{L^{\frac{q}{(1-\theta)r}}},$$

cioè la tesi.

■

PROPOSIZIONE 7.30: Siano $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ successioni tali che $f_n \to f$ in L^p, $g_n \to g$ in L^q, con $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Allora $f_n g_n \to fg$ in L^1.
Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\int |f_n g_n - fg| &= \int |f_n g_n - g f_n + g f_n - fg| \leq \int |f_n g_n - g f_n| + |g f_n - fg| \\ &= \int |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f| \leq \|f_n\|_{L^p} \underbrace{\|g_n - g\|_{L^q}}_{\to 0} + \underbrace{\|f_n - f\|_{L^p}}_{\to 0} \underbrace{\|g\|_{L^q}}_{<\infty} \to 0,\end{aligned}$$

in quanto f_n è limitata perché di Cauchy.

■

Osservazione: La palla $B_{L^p}(0,r) = \{f \in L^p | \|f\|_{L^p} \leq r\}$ non è compatta.
Infatti sia $f_n = n^{\frac{1}{p}}\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$; $\|f_n\|_{L^p} = 1\ \forall n$, e se per assurdo $\exists f_{n_k} \to g$, si avrebbe che $\|g\|_{L^p} = 1$. Ma f_{n_k} è di Cauchy, dunque $\exists f_{n_{k_h}} \to g = 0$ q.o., assurdo perché $\|0\|_{L^p} = 0 \neq 1$.

TEOREMA 7.31 (di Lusin): Sia $f \in L^1(K, dx)$, dove $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è un compatto e dx è la misura di Lebesgue. Allora, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g: K \to \mathbb{R}$ continua tale che:

$$f(x) = g(x)\ \forall x \in K \backslash F,$$

con F chiuso e $m(F) \leq \varepsilon$.
Dimostrazione:
Notiamo che basta dimostrare il teorema per $f \geq 0$.
Vediamo innanzitutto il caso $f = \chi_E$, $E \subseteq K$; visto che E è misurabile, $\exists C \subseteq E \subseteq U$, C compatto, U aperto tali che $m(U\backslash K) \leq \varepsilon$. Sia:

$$g_E(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x,C) + d(x,U^c)}.$$

Se $F_E = U\backslash C$, $f(x) = g_E(x)\ \forall x \in K\backslash F_E$ e $m(F_E) \leq \varepsilon$.
Se invece $f = s = \sum_{i=1}^{k} c_k \chi_{E_k}$ funzione semplice, il ragionamento è del tutto analogo:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} c_k\, g_{E_k}(x)$$

dà la tesi insieme a $F = \bigcup_i F_{E_i}$ (basta scegliere F_{E_i} con $m(F_{E_i}) \leq \frac{\varepsilon}{k}$).
Passiamo ora al caso generico. Se $f \in L^1(K, dx)$, $\exists\{s_k\}$ successione di funzioni semplici tali che $s_k \to f$ in L^1. Per queste, $\exists g_k \in C^0(K)$ tale che $g_k(x) = s_k(x)\ \forall x \in K\backslash F_k$, $m(F_k) \leq \varepsilon 2^{-k}$.
Per la successione $\{g_k\}$, $g_k \to g \in L^1$ q.o., dunque per il teorema di Egorov $\exists F'$, $m(F') \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tale che $g_k \rightrightarrows g$ in $K\backslash F'$.

Ma allora, se:

$$F = F' \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

$m(F) \leq \varepsilon$ e $g(x) = f(x)\ \forall x \in K \setminus F$.

■

Osservazione: Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq n} f(x)dx = 0.$$

Infatti, se $f_n = \chi_{|x|\geq n} f$, si ha che $f_n \to 0$ puntualmente q.o. ed è dominata da $|f(x)|$, quindi per il teorema di Lebesgue:

$$\int_{|x|\geq n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_n dx \to 0.$$

TEOREMA 7.32: Lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall 1 \leq p < \infty$, cioè $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \exists g \in C^0(K)$ tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|^p dx < \varepsilon.$$

Dimostrazione:
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste una funzione semplice $s(x)$ a supporto compatto tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - s(x)|^p dx < \varepsilon,$$

in quanto le funzioni semplici sono dense in L^p e scegliendo un compatto abbastanza grande si ha la stima voluta.
Sia $R > 0$ tale che $B(0,R) \supseteq supp(s)$; $\exists C$ tale che $m\big(B(0,R)\big) \leq CR^n$.
Applicando Lusin, si trova una funzione $g: B(0, R+1) \to \mathbb{R}$ tale che:

$$s(x) = g(x)\ \forall x \in B(0, R+1) \setminus F$$

e $m(F) \leq \frac{\varepsilon}{1 + CR^n \sup_{\mathbb{R}^n} s}$.
Se $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi(x) = 0$ se $|x| \geq R+1$ e $\varphi(x) = 1$ se $|x| \leq R$, allora la funzione:

$$G(x) = \varphi(x)g(x)$$

è tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |s(x) - G(x)|^p dx < \varepsilon.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare, si ha la tesi.

■

Osservazione: $C^0(K)$ non è denso in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Infatti, se $f = 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $g \in C^0(K)$, sicuramente:

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |g - 1| \geq 1,$$

in quanto per $|x| > N$, con N abbastanza grande, $g(x) = 0$ e $f(x) = 1$.
Dunque una costante non si approssima con funzioni continue a supporto compatto.

DEFINIZIONE 7.14: Siano $(\Omega_1, \Sigma_1, m_1)$ e $(\Omega_2, \Sigma_2, m_2)$ due spazi di misura. Allora, se $\pi_1: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_1$ e $\pi_2: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2$ sono le proiezioni canoniche, si definisce la σ-algebra Σ su $\Omega_1 \times \Omega_2$ come la più piccola σ-algebra che rende misurabili π_1 e π_2.

DEFINIZIONE 7.15: Nella stessa situazione della definizione precedente, si definisce:
$$\Sigma_0 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i \,\middle|\, E_i \in \Sigma_1, F_i \in \Sigma_2 \right\}.$$

Osservazione: Sicuramente Σ_0 è un'algebra (ma non una σ-algebra), $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ e:
$$\Sigma_0 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i \times F_i \,\middle|\, E_i \in \Sigma_1 \text{ disgiunti}, F_i \in \Sigma_2 \text{ disgiunti} \right\},$$
infatti basta notare che:
$$(E_1 \times F_1) \cup (E_2 \times F_2) = \big(E_1 \times (F_1 \backslash F_2)\big) \cup \big((E_1 \cup E_2) \times (F_1 \cap F_2)\big) \cup \big(E_2 \times (F_2 \backslash F_1)\big),$$
e si può ripetere il ragionamento per gli E_i.

DEFINIZIONE 7.16: Se $\bigcup_i E_i \times F_i$ è disgiunta, si definisce:
$$m_0\left(\bigcup_i E_i \times F_i\right) = \sum_i m_1(E_i) m_2(F_i).$$

PROPOSIZIONE 7.33: Se $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, m_0 è una premisura in (Ω, Σ_0).
Dimostrazione:
Sia $E \times F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \times F_i$, dove l'unione è disgiunta. Dobbiamo verificare che $m_0(E \times F) = \sum_{i=1}^{\infty} m_0(E_i \times F_i)$, cioè $m_1(E) m_2(F) = \sum_{i=1}^{\infty} m_1(E_i) m_2(F_i)$.
Se:
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i \times F_i}(x, y),$$
si ha:
$$\int_\Omega s_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} m_1(E_i) m_2(F_i).$$
È facile vedere che $\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y) \to \chi_E(x) \chi_F(y)$ e, fissando y come parametro, si ha che la funzione:
$$g_{n,y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y) \to \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y) = g_y(x)$$
soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata, dunque:
$$\sum_{i=1}^{n} m_1(E_i) \chi_{F_i}(y) = \int_E \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y) \to \int_E \chi_E(x) \chi_F(y) = m_1(E) \chi_F(y).$$
Applicando di nuovo Lebesgue:
$$\sum_{i=1}^{n} m_1(E_i) m_2(F_i) = \int_F \left(\int_E \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y)\, dx \right) dy \to \int_F m_1(E) \chi_F(y) dy = m_1(E) m_2(F).$$

■

Osservazione: Dunque possiamo definire la misura esterna:

$$\varphi^*(A) = \sup_{\substack{A\subseteq \bigcup_i E_i\times F_i \\ \text{disgiunta}}} \left\{\sum_i m_1(E_i)m_2(F_i)\right\}$$

$\forall A \subseteq \Omega$.

Definiamo $\Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ come:

$$A \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi^*(S) = \varphi^*(S \cap A) + \varphi^*(S \cap A^c) \ \ \forall S \subseteq \Omega.$$

Definiamo inoltre $m = m_1 \otimes m_2 : \Sigma \to [0, \infty]$ tale che:

$$m(A) = \varphi^*(A).$$

Osserviamo infine che Σ appena costruito coincide con Σ costruito precedentemente.

LEMMA 7.34: Sia $A \subseteq \Omega$. Allora, $\forall x \in \Omega_1$, si ha:

$$\pi_x(A) = \{y \in \Omega_2 | (x, y) \in A\} \in \Sigma_2$$

e $\forall y \in \Omega_2$:

$$\pi_y(A) = \{x \in \Omega_1 | (x, y) \in A\} \in \Sigma_1.$$

Dimostrazione:

Consideriamo l'insieme:

$$\tilde{\Sigma} = \left\{A \subseteq \Omega \middle| \pi_x(A) \in \Sigma_2, \pi_y(A) \in \Sigma_1 \ \ \forall x \in \Omega_1, \forall y \in \Omega_2\right\}.$$

Banalmente ogni insieme del tipo $E \times F$, con $E \in \Sigma_1$, $F \in \Sigma_2$ sta in $\tilde{\Sigma}$.

Inoltre $\tilde{\Sigma}$ è una σ-algebra, in quanto:

$$\pi_x\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i \pi_x(A), \quad \pi_x(A^c) = \left(\pi_x(A)\right)^c,$$

e analogamente per y.

Ma Σ è la più piccola σ-algebra che contiene gli $E \times F$, dunque $\tilde{\Sigma} \supseteq \Sigma$.

■

PROPOSIZIONE 7.35: Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ Σ-misurabile. Allora le funzioni $f_x: \Omega_2 \to \mathbb{R}$ e $f_y: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ ottenute fissando una variabile sono rispettivamente Σ_2 e Σ_1-misurabili.

Dimostrazione:

Basta applicare il lemma precedente, in quanto:

$$f_x^{-1}\big((t, \infty]\big) = \pi_x\left(f^{-1}\big((t, \infty]\big)\right)$$

e analogamente per f_y.

■

DEFINIZIONE 7.17: Un insieme $\emptyset \neq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice **$\boldsymbol{\pi}$-sistema** se è chiuso per intersezione finita.

DEFINIZIONE 7.18: Un insieme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice **$\boldsymbol{\lambda}$-sistema** (o **classe monotona**) se:

- $\Omega \in \mathcal{M}$;
- $A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{M}$;
- $\{A_n\} \in \mathcal{M}$, $A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

LEMMA 7.36 (di Dynkin): Se $\mathcal{J}$ è un π-sistema, allora:

$$\sigma(\mathcal{J}) = \lambda(\mathcal{J}),$$

dove $\sigma(\mathcal{J})$ è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{J}$ e $\lambda(\mathcal{J})$ è la più piccola classe monotona che contiene $\mathcal{J}$.
Dimostrazione:
Per la definizione di classe monotona, si ha $\lambda(\mathcal{J}) \subseteq \sigma(\mathcal{J})$. Dunque basta vedere che $\lambda(\mathcal{J})$ è una σ-algebra.
Vediamo che $\lambda(\mathcal{J})$ è stabile sotto intersezione finita.
Fissato $D \in \lambda(\mathcal{J})$, sia:

$$\mathcal{D}_D = \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) | Q \cap D \in \lambda(\mathcal{J})\}.$$

Dico che $\mathcal{D}_D$ è una classe monotona.
Sicuramente $\Omega \in \mathcal{D}_D$, in quanto $\Omega \cap D = D \in \lambda(\mathcal{J})$.
Inoltre, se $Q \in \mathcal{D}_D$:

$$Q^c \cap D = (Q^c \cup D^c) \cap D = (Q \cap D)^c \cap D = \left(\left(\underbrace{Q \cap D}_{\in\lambda(\mathcal{J})}\right) \cup \underbrace{D^c}_{\in\lambda(\mathcal{J})}\right)^c \in \lambda(\mathcal{J}),$$

cioè $Q^c \in \mathcal{D}_D$. Infine, la chiusura per unione numerabile di catene è ovvia.
Visto che $\mathcal{J}$ è chiuso per intersezione finita, si ha $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}_G\ \forall G \in \mathcal{J}$. Ma $\mathcal{D}_G$ è una classe monotona, dunque $\lambda(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{D}_G\ \forall G \in \mathcal{J}$. Quindi:

$$D \in \lambda(\mathcal{J}), G \in \mathcal{J} \Rightarrow D \cap G \in \lambda(\mathcal{J}) \Rightarrow \mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}_D \Rightarrow \lambda(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{D}_D,$$

cioè $\lambda(\mathcal{J})$ è stabile sotto intersezione finita.
Vediamo che $\lambda(\mathcal{J})$ è una σ-algebra, cioè che è chiuso rispetto all'unione numerabile.
Se $\{D_j\}$ è un insieme di elementi di $\lambda(\mathcal{J})$, poniamo:

$$\widetilde{D_j} = D_j \setminus \bigcup_{i<j} D_i.$$

Visto che $\lambda(\mathcal{J})$ è stabile sotto intersezione finita, $\widetilde{D_j} \in \lambda(\mathcal{J})\ \forall j$, e i $\widetilde{D_j}$ sono a due a due disgiunti.
Da questo:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{D_j} \in \lambda(\mathcal{J}).$$

■

DEFINIZIONE 7.19: Uno spazio di misura (Ω, Σ, m) si dice **σ-finito** se esiste una catena numerabile di insiemi $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ tali che:

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

e $m(E_i) < \infty\ \forall i$.

LEMMA 7.37: Sia $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, m = m_1 \otimes m_2)$ uno spazio di misura prodotto, con Ω_1 e Ω_2 σ-finiti.
Se $S \subseteq \Omega$ è misurabile, allora:
1. $\varphi(x) = m_2(\pi_x(S)): \Omega_1 \to \mathbb{R}$ è m_1-misurabile;
2. $\psi(x) = m_1\left(\pi_y(S)\right): \Omega_2 \to \mathbb{R}$ è m_2-misurabile;
3. vale l'uguaglianza:

$$m_1 \otimes m_2(S) = \int_{\Omega_1} m_2(\pi_x(S))dm_1 = \int_{\Omega_2} m_1\left(\pi_y(S)\right)dm_2.$$

Dimostrazione:
Definiamo:
$$\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \text{ algebra} | \forall S \in \mathcal{A}, \text{valgono } 1., 2., 3.\}.$$
$\mathcal{F} \neq \emptyset$, poiché $\Sigma_0 \in \mathcal{F}$; inoltre un maggiorante per una catena ordinata (con l'ordinamento $\subseteq$) è l'unione.
Per Zorn, sia $M \in \mathcal{F}$ un elemento massimale.
Se mostriamo che M è una classe monotona, avremmo la tesi, perché avremmo che $\sigma(M) = \lambda(M) = M$ sarebbe una σ-algebra che contiene Σ_0, e dunque avremmo $M \supseteq \Sigma$.
Sicuramente $\Omega \in M$.
Notiamo che $S \in M, A \in M, S \subseteq A \Rightarrow A \backslash S \in M$, in quanto la differenza di due funzioni misurabili è misurabile e l'integrale è lineare.
Ci rimane da vedere che $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \in M \Rightarrow S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in M$.
Per ipotesi, abbiamo che, posto $\varphi_k(x) = m_2\big(\pi_x(S_k)\big)$ e $\psi_k(x) = m_1\left(\pi_y(S_k)\right)$, esse sono rispettivamente m_1 e m_2 misurabili e:
$$m_1 \otimes m_2(S_k) = \int_{\Omega_1} m_2\big(\pi_x(S_k)\big) dm_1 = \int_{\Omega_2} m_1\left(\pi_y(S_k)\right) dm_2.$$
Osserviamo che $\pi_x(S_k) \nearrow \pi_x(S)$ e $\pi_y(S_k) \nearrow \pi_y(S)$, dunque:
$$\varphi_k(x) \nearrow \varphi(x) \qquad \text{e} \qquad \psi_k(x) \nearrow \psi(x).$$
Applicando Beppo Levi, si ha che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono misurabili e:
$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} \varphi(x) dm_1 = \int_{\Omega_1} \varphi(x) dm_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_2} \psi(x) dm_2 = \int_{\Omega_2} \psi(x) dm_2,$$
dunque:
$$m_1 \otimes m_2(S) = \lim_{k\to\infty} m_1 \otimes m_2(S_k) = \int_{\Omega_1} \varphi(x) dm_1 = \int_{\Omega_2} \psi(x) dm_2.$$
■

TEOREMA 7.38 (di Fubini-Tonelli): Sia $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sommabile q.o., Ω_1 e Ω_2 σ-finiti. Allora la funzione $y \to f(x,y)$ è m_2-sommabile, la funzione $x \to \int_{\Omega_2} f(x,y) dm_2$ è m_1-sommabile e vale l'uguaglianza:
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y) d(m_1 \otimes m_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) dm_2 \right) dm_1.$$
Dimostrazione:
Innanzitutto possiamo considerare solo $f \geq 0$, poiché altrimenti si scompone $f = f^+ + f^-$.
Visto che:
$$\int_{\Omega} f(x,y) d(m_1 \otimes m_2) = \sup \left\{ \int_{\Omega} s(x,y) d(m_1 \otimes m_2) \middle| 0 \leq s(x,y) \leq f(x,y) \text{ semplice} \right\}$$
e per il lemma precedente il teorema vale per le funzioni semplici, possiamo scegliere una successione $\{s_k\}$ di funzioni semplici, $s_k \nearrow f$, e applicare il teorema di Beppo Levi due volte per ottenere:
$$\int_{\Omega} f(x,y) d(m_1 \otimes m_2) = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} s_k(x,y) d(m_1 \otimes m_2) = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} s_k(x,y) dm_2 \right) dm_1 =$$
$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \left(\lim_{k\to\infty} s_k(x,y) \right) dm_2 \right) dm_1 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) dm_2 \right) dm_1.$$
■

DEFINIZIONE 7.20: Date $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si definisce **convoluzione** di f e g:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Osservazione: Le funzioni L^p a supporto compatto sono dense in L^p. Infatti basta considerare $f_n = f \cdot \chi_{(-n,n)}$ e per Lebesgue:

$$\int f_n \to \int f,$$

in quanto $f_n \nearrow f \in L^p$.

PROPOSIZIONE 7.39: Siano $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g, Dg(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e :

$$D_i\big(f * g(x)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} D_i\big(f(x-y)g(y)\big)dy = f * \big(D_i g(x)\big).$$

Dimostrazione:
Vediamolo innanzitutto per $f \in C^0(K)$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto. Si ha (per commutatività di $*$):

$$\left|\frac{f * g(x+te_i) - f * g(x)}{t} - f * \big(D_i g(x)\big)\right| =$$
$$= \left|\int_K \left(\frac{g(x+te_i-y) - g(x-y)}{t} - D_i g(x-y)\right) f(y)dy\right| \leq$$
$$\leq \int_K \left|\frac{1}{t}\left(\int_0^t \frac{d}{d\sigma} g(x-y+\sigma e_i)d\sigma\right) - D_i g(x-y)\right| |f(y)|dy \leq$$
$$\leq \int_K \left|\frac{1}{t}\int_0^t |D_i g(x-y+\sigma e_i) - D_i g(x-y)|d\sigma\right| |f(y)|dy,$$

ma vedremo che, visto che Dg è limitata, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che:

$$|t| \leq \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{t}\int_0^t |D_i g(x-y+\sigma e_i) - D_i g(x-y)|d\sigma\right| \leq t\varepsilon$$

e dunque:

$$\left|\frac{f * g(x+te_i) - f * g(x)}{t} - f * \big(D_i g(x)\big)\right| \leq \varepsilon \int_K |f(y)|dy \to 0$$

in quanto una funzione continua su un compatto è limitata.
Se invece f è generica, costruiamo una successione $\{f_k\}$ di funzioni continue a supporto compatto tale che $f_k \to f$; per queste vale $D_i\big(f_k * g(x)\big) = f_k * \big(D_i g(x)\big)$ e:

$$(f_n * g - f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(f_n(x-y) - f(x-y)\big)g(y)dy \leq \|g\|_{L^\infty}\|f_n - f\|_{L^1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, dunque:

$$\|f_n * g - f * g\|_{L^\infty} \leq \|f_n - f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}$$

(e analogamente per $D_i g$). Da questo segue che:

$$f_n * g \rightrightarrows f * g \qquad \text{e} \qquad D_i(f_n * g) \rightrightarrows f * D_i g,$$

da cui la tesi.

■

COROLLARIO 7.40: Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g, Dg \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora $f * g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Dimostrazione:

Basta applicare reiteratamente la precedente proposizione.

■

PROPOSIZIONE 7.41: Lo spazio $C^\infty(K)$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall 1 \leq p < \infty$.
Dimostrazione:
$\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in L^p(K) \cap C^0(K)$ tale che $K_\varepsilon = supp(f_\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto e $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} < \varepsilon$ per densità delle funzioni continue a supporto compatto e delle funzioni L^p a supporto compatto in L^p.
Sia $\psi(x) \in C^\infty(K)$, $supp(\psi) = (-1,1)^n$, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$; tale ψ si dice **partizione dell'unità**.
Se $h_r(x) = f_\varepsilon * \psi(x)$, si ha:

$$h_r(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x-y)\psi\left(\frac{y}{r}\right)\frac{dy}{r^n} \overset{z=\frac{y}{r}}{\cong} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x-rz)\psi(z)dz \xrightarrow{r\to 0} f_\varepsilon(x),$$

dunque:

$$h_r(x) - f_\varepsilon(x) \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Inoltre $h_r \in C^\infty$ $\forall r$ per il corollario precedente.

■

PROPOSIZIONE 7.42: Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.
Allora $f * g(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e:

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Dimostrazione:
Per $p = \infty$ è già stato visto. Se $1 \leq p < \infty$, per densità delle funzioni $C^\infty(K)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, basta mostrare la tesi per funzioni regolari a supporto compatto.
$\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\|f * g(x)\|_{L^p} = \left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\|g(y)\|_{L^p}dy$$

per la disuguaglianza triangolare; portando fuori dall'integrale il termine costante $\|g(y)\|_{L^p}$ si ha la tesi.

■

PROPOSIZIONE 7.43 (disuguaglianza di Young): Siano $1 \leq p, p_1, p_2 \leq \infty$ tali che $1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$; siano inoltre $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$. Allora $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e:

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}}.$$

Dimostrazione:
Se $p = \infty$ l'enunciato è quello della disuguaglianza di Hölder; se invece $p = 1$, allora $p_1 = p_2 = 1$ e la tesi segue per Fubini-Tonelli.
Se $1 < p < \infty$, posto p_2' tale che $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = 1$ e $s = p_1\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$, si ha che $sp_2' = p_1$ e $(1-s)p = p_1$; applicando Hölder:

$$|f * g(x)|^{p_2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)^{1-s+s}|g(y)|dy\right)^{p_2} \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-s)p_2}|g(y)|^{p_2}dy \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{sp_2'}dy\right)^{\frac{p_2}{p_2'}} =$$

$$= \left(|f|^{(1-s)p_2} * |g|^{p_2}(x)\right) \cdot \|f\|_{L^{p_1}}^{sp_2}.$$

L'integrale $|f|^{(1-s)p_2} * |g|^{p_2}(x)$ è finito, poiché $|g|^{p_2} \in L^1$ e $|f|^{(1-s)p_2} \in L^{\frac{p}{p_2}}$, dunque $|f|^{(1-s)p_2} * |g|^{p_2}(x) \in L^{\frac{p}{p_2}}$. Si ha:

$$\|f * g\|_{L^p}^{p_2} = \||f * g|^{p_2}\|_{L^{\frac{p}{p_2}}} \leq \left\||f|^{(1-s)p_2} * |g|^{p_2}\right\|_{L^{\frac{p}{p_2}}} \cdot \|f\|_{L^{p_1}}^{sp_2} \leq$$
$$\leq \left\||f|^{(1-s)p_2}\right\|_{L^{\frac{p}{p_2}}} \cdot \||g|^{p_2}\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^{p_1}}^{sp_2} = \|f\|_{L^{p_1}}^{(1-s)p_2} \cdot \|g\|_{L^{p_2}}^{p_2} \cdot \|f\|_{L^{p_1}}^{sp_2} =$$
$$= \|f\|_{L^{p_1}}^{p_2} \cdot \|g\|_{L^{p_2}}^{p_2},$$

da cui la tesi.

■

PROPOSIZIONE 7.44 (disuguaglianza di Markov): Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda \geq 0\ \exists C \leq 1$ tale che:

$$\lambda^p m\{|f(x)| > \lambda\} \leq C\|f\|_{L^p}^p.$$

Dimostrazione:
Abbiamo le disuguaglianze:

$$\lambda^p m\{|f(x)| > \lambda\} = \lambda^p \int_{\{|f(x)|>\lambda\}} dy \leq \int_{\{|f(x)|>\lambda\}} |f(y)|^p dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy = C\|f\|_{L^p}^p$$

(per $C = 1$ è sempre vera, ma in generale $C < 1$).

■

LEMMA 7.45 (del ricoprimento di Vitali): Sia $\{B_n\} \in \mathbb{R}^d$ un ricoprimento finito di palle del compatto $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Allora esiste un sottoinsieme $\{B_{n_k}\} \subseteq \{B_n\}$ tale che le palle B_{n_k} sono disgiunte e:

$$\bigcup_n B_n \subseteq \bigcup_k 3B_{n_k},$$

dove $\lambda B(x,r) = B(x, \lambda r)$.

Dimostrazione:
Supponiamo $n > 0$. Sia B_{n_1} la palla di raggio massimo. Supponiamo induttivamente di aver già scelto $B_{n_1}, \dots, B_{n_j}$; se in $\{B_n\}$ c'è qualche palla disgiunta da $\bigcup_{i=1}^{j} B_{n_i}$, sia $B_{n_{j+1}}$ la palla fra queste di raggio massimo altrimenti $j = m$ e l'induzione termina.
Dico che, se $X = \bigcup_{k=1}^{m} 3B_{n_k}$, $B_h \subseteq X\ \forall h$. Se $h \in \{n_1, \dots, n_m\}$ è evidente; altrimenti $\exists k$ tale che $B_{n_k} \cap B_h \neq \emptyset$ e il raggio di B_{n_k} è maggiore di quello di B_h; ma allora, per la disuguaglianza triangolare, si ha:

$$B_h \subseteq 3B_{n_k} \subseteq X.$$

■

DEFINIZIONE 7.21: Data $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si definisce **funzione massimale di Hardy-Littlewood**:

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r} |f(x-y)| dy \right),$$

dove $B_r = B(x,r)$.

PROPOSIZIONE 7.46: Data $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto, $\forall t > 0\ \exists C = C(n)$ tale che:

$$m(\{|M(f)(x)| > t\}) \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1}.$$

Dimostrazione:
Per definizione, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che, se $|M(f)(x)| > t$:
$$\int_{B_x} |f(x-y)|dy > t \cdot m(B_x),$$
per una certa $B_x = B_r(x)$.
Detto $K = supp(f)$, sia $\{B_k\}$ l'insieme delle palle in K con tale proprietà; sia $\{B_h\} \subseteq \{B_k\}$ un sottoricoprimento finito.
Per il lemma del ricoprimento di Vitali, siano $\{B_{h_j}\} \subseteq \{B_h\}$ palle disgiunte tali che $\bigcup_h B_h \subseteq \bigcup_j 3B_{h_j}$; allora:
$$m(\{|M(f)(x)| > t\}) \leq 3^d \sum_j m\left(B_{h_j}\right) < \frac{3^d}{t} \int_{\bigcup_j B_{h_j}} |f(x-y)|dy \leq \frac{3^d}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dy.$$
■

TEOREMA 7.47 (di Lebesgue del valor medio): Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:
$$\lim_{r\to 0} \left(\frac{1}{m(B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \right) = f(x).$$
Dimostrazione:
Visto che l'enunciato ha una forma locale, possiamo assumere che $supp(f) \subseteq B(x,\delta)$ per un certo $\delta > 0$.
Poniamo, $\forall \alpha > 0$:
$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \limsup_{r\to 0} \left(\frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy \right) > \alpha \right\}.$$
La tesi equivale a mostrare che $m(E_\alpha) = 0 \ \forall \alpha > 0$. Fissiamo α.
Sia $\varepsilon > 0$; per densità delle funzioni continue a supporto compatto, sia $g \in C^0\big(B(x,\delta)\big)$ tale che:
$$\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon.$$
Posto $B = B(x,r)$, riscriviamo la disuguaglianza:
$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|dy \leq$$
$$\leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - g(y)|dy + \frac{1}{m(B)} \int_B |g(y) - g(x)|dy + \big(g(x) - f(x)\big).$$
Visto che g è continua, abbiamo che il secondo termine è $< \varepsilon$; per la disuguaglianza di Markov:
$$m(\{|g(x) - f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \|f - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$
e per la proposizione precedente:
$$m\left(\left\{ \left| \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - g(y)|dy \right| > \alpha \right\} \right) \leq \frac{C(n)}{\alpha} \|f - g\|_{L^1} < \frac{C(n)}{\alpha} \varepsilon.$$
Dunque, scelto ε abbastanza piccolo, si ha $m(E_\alpha) = 0$.
■

DEFINIZIONE 7.22: Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **assolutamente continua** se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che, presa comunque una successione di intervalli (x_k, y_k), si ha che:
$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta \Rightarrow \sum_k |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon.$$

Osservazione: Ogni funzione assolutamente continua è uniformemente continua (e dunque continua) e a variazione limitata; inoltre ogni funzione Lipschitziana è assolutamente continua.

Osservazione: La funzione di Cantor non è assolutamente continua.

TEOREMA 7.48 (del calcolo integrale secondo Lebesgue): Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. f è assolutamente continua;
2. $f' \in L^1$ e:
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$
3. $\exists g \in L^1([a,b])$ tale che:
$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

   $\forall x \in [a,b]$.

8 SERIE DI FOURIER

Nel seguito considereremo $L^p(T)$, con T compatto; in particolare spesso considereremo $T = (0,2\pi)$.

Osservazione: Negli spazi $L^p(T)$ valgono le inclusioni:

$$L^\infty(T) \subseteq L^p(T) \subseteq L^q(T)$$

se $q \leq p < \infty$. Infatti per Hölder:

$$\|f\|_{L^p} = \|f \cdot 1\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}\|1\|_{L^r} = \sqrt[r]{m(T)} \cdot \|f\|_{L^q},$$

dove $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

DEFINIZIONE 8.1: Definiamo **polinomio trigonometrico**:

$$P_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$$

dove $t \in (0,2\pi)$, $a_k \in \mathbb{C}$.

DEFINIZIONE 8.2: In $L^1(0,2\pi)$, definiamo il prodotto scalare (interno):

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Dunque segue la definizione della norma per $f \in L^2(0,2\pi)$:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Osservazione: Questa definizione di norma coincide con la definizione di $\|\cdot\|_{L^2}$

PROPOSIZIONE 8.1: L'insieme $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è ortonormale in $L^2(0,2\pi)$.

Dimostrazione:

Abbiamo:

$$\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iht}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-h)t}dt = \delta_{hk}.$$

■

Osservazione: I polinomi trigonometrici sono densi nello spazio $C^0(0,2\pi)$; questo segue immediatamente da Stone-Weierstrass con il cambio di variabili $x = e^{it}$ (poiché in $(0,2\pi)$ esiste una determinazione unica e continua del logaritmo).

Osservazione: In analogia con i numeri complessi, si ha che $P_N(t) \in \mathbb{R}\ \forall t \in (0,2\pi) \Leftrightarrow a_{-k} = \overline{a_k}$. Inoltre, in questo caso, $P_N(t) \geq 0\ \forall t \in (0,2\pi) \Leftrightarrow P_N(t) = Q_M(t)\overline{Q_M(t)}$.

DEFINIZIONE 8.3: Data $f \in L^1(0,2\pi)$, definiamo k-esimo **coefficiente di Fourier**:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\langle f, e^{ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fe^{-ikt}dt.$$

Definiamo **serie di Fourier**:

$$F(f)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{ikt}$$

e N-esima somma parziale:

$$P_{N,f}(t)=\sum_{k=-N}^{-N}\hat{f}(k)e^{ikt}.$$

PROPOSIZIONE 8.2 (disuguaglianza di Bessel): $f\in L^2(0,2\pi)$. Allora vale la disuguaglianza:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(k)\right|^2\leq\frac{1}{2\pi}\|f\|^2.$$

Dimostrazione:

Per definizione di norma:

$$\left\|f-P_{N,f}\right\|^2=\|f\|^2-\langle f,P_{N,f}\rangle-\langle P_{N,f},f\rangle+\left\|P_{N,f}\right\|^2.$$

Inoltre:

$$\langle f,P_{N,f}\rangle=\langle f,\sum_{k=-N}^{-N}\hat{f}(k)e^{ikt}\rangle=\sum_{k=-N}^{-N}\overline{\hat{f}(k)}\langle f,e^{ikt}\rangle=2\pi\sum_{k=-N}^{-N}\overline{\hat{f}(k)}\hat{f}(k)=2\pi\sum_{k=-N}^{-N}\left|\hat{f}(k)\right|^2;$$

$$\langle P_{N,f},f\rangle=\sum_{k=-N}^{-N}\hat{f}(k)\langle e^{ikt},f\rangle=2\pi\sum_{k=-N}^{-N}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(k)}=2\pi\sum_{k=-N}^{-N}\left|\hat{f}(k)\right|^2;$$

$$\left\|P_{N,f}\right\|^2=2\pi\sum_{h,k=-N}^{N}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(h)}\langle e^{ikt},e^{iht}\rangle=2\pi\sum_{h,k=-N}^{N}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(h)}\delta_{hk}=2\pi\sum_{k=-N}^{N}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(k)}=$$

$$=2\pi\sum_{k=-N}^{-N}\left|\hat{f}(k)\right|^2.$$

A questo punto:

$$0\leq\left\|f-P_{N,f}\right\|^2=\|f\|^2-2\pi\sum_{k=-N}^{-N}\left|\hat{f}(k)\right|^2\Rightarrow\sum_{k=-N}^{-N}\left|\hat{f}(k)\right|^2\leq\frac{1}{2\pi}\|f\|^2.$$

Ma questo vale $\forall N\in\mathbb{N}$, dunque:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(k)\right|^2=\sup_{N\in\mathbb{N}}\sum_{k=-N}^{-N}\left|\hat{f}(k)\right|^2\leq\frac{1}{2\pi}\|f\|^2.$$

■

DEFINIZIONE 8.4: Definiamo **grado** di un polinomio trigonometrico:

$$\deg(P_N)=\max_{N\in\mathbb{N}}\{a_N\neq 0\vee a_{-N}\neq 0\}.$$

PROPOSIZIONE 8.3: Sia $\mathcal{P}_N$ l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado N. Allora, se $f\in L^2(0,2\pi)$:

$$\left\|f-P_{N,f}\right\|=\inf_{Q_N\in\mathcal{P}_N}\|f-Q_N\|.$$

Dimostrazione:

Sia $Q_N\in\mathcal{P}_N$, $Q_N=\sum_{k=-N}^{N}a_ke^{ikt}$. Con conti simili a quelli della precedente dimostrazione, si ottiene:

$$\|f - Q_N\|^2 = \|f\|^2 + 2\pi \sum_{k=-N}^{N} \left(-\hat{f}(k)\overline{a_k} - \overline{\hat{f}(k)}a_k + |a_k|^2\right).$$

Sottraendo a questa l'uguaglianza:

$$\left\|f - P_{N,f}\right\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-N}^{-N} \left|\hat{f}(k)\right|^2$$

si ottiene:

$$\|f - Q_N\|^2 - \left\|f - P_{N,f}\right\|^2 = 2\pi \sum_{k=-N}^{-N} \left|\hat{f}(k) - a_k\right|^2 \geq 0.$$

■

COROLLARIO 8.4: Se $f \in L^2(0,2\pi)$, la serie:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(k)\right| \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

cioè converge la serie dei quadrati.

COROLLARIO 8.5 (lemma di Riemann-Lebesgue): Se $f \in L^2(0,2\pi)$, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

DEFINIZIONE 8.5: Definiamo **nucleo di Dirichlet**:

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} \in \mathcal{P}_N$$

$\forall t \in [0,2\pi]$.

PROPOSIZIONE 8.6: $\forall N \in \mathbb{N}$, abbiamo le seguenti identità:

$$D_N(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{se } t \in (0,2\pi) \\ 2N + 1 & \text{se } t = 0,2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = 2\pi.$$

Dimostrazione:
Sia $t \in (0,2\pi)$. In questo caso, $q = e^{it} \neq 1$, dunque:

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} q^k = q^{-N}\frac{q^{2N+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{N+1} - q^{-N}}{q - 1} = \frac{q^{\frac{1}{2}}\left(q^{N+\frac{1}{2}} - q^{-N-\frac{1}{2}}\right)}{q^{\frac{1}{2}}\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

in quanto $e^t - e^{-t} = 2i\sin(t)$. Il caso $t = 0,2\pi$ è banale. Inoltre:

$$\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = 2\pi,$$

in quanto $\int_0^{2\pi} e^{ikt} = \delta_{0k} \cdot 2\pi$.

■

PROPOSIZIONE 8.7: Abbiamo l'uguaglianza $\forall t \in [0,2\pi]$:

$$P_{N,f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_N(t-s)ds.$$

Dimostrazione:

$$P_{N,f}(t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\left(\int_0^{2\pi} f(s)e^{-iks}ds\right)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\left(\int_0^{2\pi} f(s)e^{ik(t-s)}ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(t-s)}\right)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_N(t-s)ds.$$

■

PROPOSIZIONE 8.8: Abbiamo l'uguaglianza q.o per $t \in [0,2\pi]$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(t-s)ds.$$

Dimostrazione:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(t-s)ds = \frac{f(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t-s)ds = -\frac{f(t)}{2\pi}\int_t^{t-2\pi} D_N(\xi)d\xi =$$

$$= -\frac{f(t)}{2\pi}\int_0^{-2\pi} D_N(\xi)d\xi = \frac{f(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(\xi)d\xi = f(t).$$

■

COROLLARIO 8.9: Abbiamo l'uguaglianza q.o per $t \in [0,2\pi]$:

$$f(t) - P_{N,f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(t) - f(s)\big)D_N(t-s)ds.$$

Osservazione: L'ipotesi $f \in L^1(0,2\pi)$ non basta per assicurare la convergenza puntuale $P_{N,f} \to f$. Vale però il seguente teorema:

TEOREMA 8.10: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione 2π-periodica e localmente Hölderiana (con $\alpha \in (0,1)$), allora:

$$P_{N,f}(t) \to f(t).$$

TEOREMA 8.11: Lo spazio delle funzioni 2π-periodiche e C^∞ è denso in $L^p(0,2\pi)$, con $2 \le p < \infty$.
Dimostrazione:
Sia $f \in L^p(0,2\pi)$. Definiamo:

$$\varphi_0(x) = e^{-\frac{1}{x}}\chi_{(0,+\infty)}.$$

Evidentemente $\varphi_0 \in C^\infty$; sia $\psi_0(x) = \varphi_0(x)\varphi_0(1-x)$. Si ha $\psi_0(x) \in C^\infty$ e $supp\big(\psi_0(x)\big) = [0,1]$. Se $c = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(x)dx$, poniamo:

$$\psi(x) = \frac{1}{2c}\psi_0\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right);$$

si vede che $\psi \in C^\infty$, $supp(\psi) = [-1,1]$ e $\int_{-1}^{1}\psi = 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, definiamo $\psi_n(x) = n\psi(nx)$; si vede che $supp(\psi_n) = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ e:

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \psi_n(x) = 1.$$

Definiamo infine $f_n(x) = f * \psi_n(x)$; per teoremi già visti si ha che $f_n \in C^\infty(0,2\pi) \cap L^p(0,2\pi)$.

$$0 \leq \|f_n - f\|_{L^p} = \left\| \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\psi_n(s)ds - f(t) \right\|_{L^p} =$$

$$= \left\| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t-s)\psi(ns)nds - f(t)\int_{-1}^{1}\psi(\sigma)d\sigma \right\|_{L^p}.$$

Ponendo $ns = \sigma$:

$$0 \leq \|f_n - f\|_{L^p} = \left\| \int_{-1}^{1} f\left(t - \frac{\sigma}{n}\right)\psi(\sigma)d\sigma - f(t)\int_{-1}^{1}\psi(\sigma)d\sigma \right\|_{L^p}$$

$$= \left\| \int_{-1}^{1} \left(f\left(t-\frac{\sigma}{n}\right) - f(t) \right)\psi(\sigma)d\sigma \right\|_{L^p} \leq \int_{-1}^{1} \left\| f\left(t - \frac{\sigma}{n}\right) - f(t) \right\|_{L^p} |\psi(\sigma)|d\sigma.$$

Visto che $f \in L^p$, per il teorema di Lebesgue si ha che:

$$\left\| f\left(t-\frac{\sigma}{n}\right) - f(t) \right\|_{L^p} \to 0.$$

Visto che:

$$\int_{-1}^{1} \psi(\sigma)d\sigma \leq 2 \sup_{x\in[-1,1]} |\psi(x)| < +\infty$$

perché $\psi(x) \in C^\infty$.

Per il teorema dei carabinieri si ha che:

$$f_n - f \to 0.$$

■

LEMMA 8.12: Sia $\{e_j\}$ un sistema ortonormale di vettori in uno spazio di Hilbert H, e sia c_j una successione convergente, $\{c_j\} \in \ell^2$.

Allora $\exists! f \in H$ tale che $c_j = \langle f, e_j \rangle$ $\forall j$, dove $\langle \cdot \rangle$ è un prodotto interno in H.

Dimostrazione:

La successione $S_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ è di Cauchy in H:

$$\|S_n - S_m\|_H^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |c_j e_j|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |c_j|^2 < \varepsilon$$

perché c_j converge. Allora $S_n \to f$ e f soddisfa la tesi.

■

COROLLARIO 8.13: $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ converge in $L^2(0,2\pi)$ se $\{c_j\} \in \ell^2$.

PROPOSIZIONE 8.14: Sia $\{e_j\}$ un sistema ortonormale in H di Hilbert. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $\forall f \in H$, $\exists! \{c_j\} \in \ell^2$ tale che:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e_j.$$

2) $\forall f \in H$, vale l'identità di Parseval:

$$\|f\|_H^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2,$$

dove $c_j = \langle f, e_j\rangle$.

3) se $f \in H$ è tale che $\langle f, e_j\rangle = 0\ \forall j$, allora $f = 0$.

Dimostrazione:

1) ⇒ 2): ovvia perché gli $\{e_j\}$ sono ortonormali.

2) ⇒ 3): ovvia per definizione di norma.

3) ⇒ 1): $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e_j$ va bene; inoltre se $\langle g, e_j\rangle = \langle f, e_j\rangle\ \forall j$, si ha $f = g$.

■

DEFINIZIONE 8.6: Un sistema ortonormale $\{e_j\}$ di H si dice **completo** se $\langle f, e_j\rangle = 0\ \forall j$, allora $f = 0$ per ogni $f \in H$.

PROPOSIZIONE 8.15: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}$ in $L^2(0,2\pi)$ è un sistema ortonormale completo.

Dimostrazione:

Supponiamo che $f \in L^2(0,2\pi)$ sia tale che:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 0\ \ \forall k.$$

Sia $g \in C^\infty$, 2π-periodica; si ha che:

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k) e_k$$

converge puntualmente e, integrando due volte per parti

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx} dx$$

si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi i k}\int_0^{2\pi} g'(x) e^{-ikx} dx = -\frac{1}{2\pi k^2}\int_0^{2\pi} g''(x) e^{-ikx} dx,$$

dunque:

$$|\hat{g}(k)| \le \frac{C}{k^2}$$

per una certa $0 < C < \infty$.

Ma allora:

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k) e_k$$

converge uniformemente in $L^2(0,2\pi)$. Ma:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx\right)\overline{\hat{g}(k)} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = 0,$$

in quanto $\hat{f}(k) = 0\ \forall k \in \mathbb{Z}$, dunque per densità delle funzioni 2π-periodiche e C^∞ in $L^2(0,2\pi)$, si trova $\{g_j\} \in C^\infty$, $\{g_j\}$ 2π-periodiche tali che $g_j \to f$, per cui vale:

$$\langle f, g_j\rangle = 0\ \ \forall j,$$

cioè $\|f\| = 0$, da cui $f = 0$.

■

COROLLARIO 8.16 (identità di Parseval): Valgono le identità:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(k)\right|^2$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Dimostrazione:
La prima è un'immediata conseguenza delle ultime due proposizioni; la seconda segue dalla formula di polarizzazione:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(f+g)(t)|^2dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^2dt.$$

■

COROLLARIO 8.17: Se $f \in L^2(0,2\pi)$, si ha:
$$\lim_{N\to\infty}\|f - P_{N,f}\| = 0,$$
cioè $P_{N,f}$ converge in norma a f.