Alcuni teoremi/esercizi sull'integrale di Lebesgue

Giacomo Mezzedimi

25 maggio 2015

Teorema 1 (Assoluta continuitá dell'integrale)**.** *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, (Ω, μ) *spazio di misura, tale che*

$$\int_\Omega |f| d\mu < +\infty.$$

Allora, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *tale che:*

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

ogni volta che $\mu(A) < \delta$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists \varepsilon_0 > 0$ e $\{A_n\}$ tale che $\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e:

$$\int_{A_n} |f| d\mu > \varepsilon_0.$$

A meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre $\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$.
Poniamo:

$$B_n = \bigcup_{i \geq n} A_i.$$

Si ha che:

$$\mu(B_n) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sim \frac{1}{2^n}$$

e:

$$\int_{B_n} |f| d\mu > \varepsilon_0,$$

cioé:

$$\int_\Omega |f| \chi_{B_n} d\mu > \varepsilon_0.$$

Ma $B_n \supseteq B_{n+1} \supseteq \ldots$, dunque:

$$\mu\left(\bigcap B_n\right) = 0$$

e perció $|f|\chi_{B_n} \to |f|\chi_{\bigcap B_n} = 0$ quasi ovunque, assurdo. □

Teorema 2 (Derivazione sotto il segno di integrale)**.** *Sia* $f(t, x)$, $t \in (a, b)$, $x \in \Omega$, (Ω, μ) *spazio di misura. Sia* $f(t, x)$ *misurabile* $\forall t$, $\int_\Omega f(t, x) dx < \infty$ *e supponiamo che* $\exists \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ $\forall t$, *e per quasi ogni* x *tale che:*

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq g(x) \qquad \int_\Omega g(x) d\mu < \infty.$$

Allora:

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega f(t, x) d\mu = \int_\Omega \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} d\mu.$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \lim_{h_n \to 0} \left(\frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} \right),$$

dunque, visto che per Lagrange:

$$\frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} = \frac{\partial f(t_n,x)}{\partial t} \leq g(x)$$

con $t_n \in [t, t+h_n]$, si ha per Lebesgue:

$$\lim_{h_n \to 0} \int \left(\frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} \right) d\mu = \int \lim_{h_n \to 0} \left(\frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} \right) d\mu = \int \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} d\mu.$$

□

Teorema 3. *$k(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $k \geq 0$ q.o., $k_N := N^d k(Nx)$ e:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} k_N = \int_{\mathbb{R}^d} k = 1.$$

Allora, $\forall f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, $k_N(x) \star f \xrightarrow{L^p} f$.

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che k sia a supporto compatto, cioé $supp(K) \subseteq B(0,R)$.
Vediamo che ci basta mostrare la tesi per funzioni continue a supporto compatto; se infatti il teorema vale $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora, data $f \in L^p$, sappiamo che $\exists \{f_n\}$, $f_n \xrightarrow{L^p} f$, $f_n \in C_0^\infty$ e:

$$\|k_N \star f - f\|_{L^p} \leq \|k_N \star f - k_N \star f_n\|_{L^p} + \|k_N \star f_n - f_n\|_{L^p} + \|f_n - f\|_{L^p},$$

ed $\exists n$ tale che $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon/3$, $\exists N$ tale che $\|k_N \star f_n - f_n\|_{L^p} < \varepsilon/3$ (in quanto supponiamo che la tesi valga per le funzioni $\varphi \in C_0^\infty$) e $\|k_N \star f - k_N \star f_n\|_{L^p} = \|k_N \star (f - f_n)\|_{L^p} \leq \|k_N\|_{L^1} \|f_n - f\|_{L^p} \leq \varepsilon/3$, da cui:

$$\|k_N \star f - f\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Sia ora $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |k_N \star f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} k_N(y) f(x-y) dy - f(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} k_N(y) f(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} k_N(y) f(x) dy \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} k_N(y) \left(f(x-y) - f(x) \right) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |k_N(y)| \, |f(x-y) - f(x)| \, dy. \end{aligned}$$

Notiamo che peró in realtá l'integrale é sull'insieme $B_N = \{x | Nx \in B(0,R)\} = \left\{x | \|x\| \leq \frac{R}{N}\right\}$ ed f, essendo continua in un compatto, é uniformemente continua e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tale che $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$ se $|y| < \frac{R}{N}$; dunque:

$$|k_N \star f(x) - f(x)| = \leq \int_{B_N} |k_N(y)| \, |f(x-y) - f(x)| \, dy \leq \varepsilon \cdot \int_{\mathbb{R}^d} k_N = \varepsilon.$$

Sappiamo dunque che, se k é a supporto compatto, $\forall f \in C_0^\infty$ si ha:

$$\sup_{\mathbb{R}^d} |k_N \star f(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

se mostriamo che $supp(k_N \star f - f)$ é compatto avremmo la tesi.
In generale, $\forall g$ e $\forall h$, si ha:

$$supp(g \star h) \subseteq supp(g) + supp(h) = \{x + y | x \in supp(g), y \in supp(h)\},$$

in quanto:

$$x_0 \in supp(g \star h) \Rightarrow 0 \neq \int_{\mathbb{R}^d} g(x_0 - y)h(y)dy \Rightarrow \exists \overline{y} \mid x_0 - \overline{y} \in supp(g),\ \overline{y} \in supp(h) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0 = x_0 - \overline{y} + \overline{y} \in supp(g) + supp(h).$$

Ma allora $supp(k_N \star f - f) \subseteq (supp(k_N) + supp(f)) \cup supp(f)$ é compatto.
Passiamo ora al caso generale in cui $k \in L^1$; sia $\{k_n\} \in C_0^\infty$ tale che $k_n \xrightarrow{L^1} k$ e $\int_{\mathbb{R}^d} k_n = 1$ (altrimenti normalizzo dividendo per l'integrale).
Sappiamo (per la prima parte) che $\|k_{n,N} \star f - f\|_{L^p} \xrightarrow{N\to\infty} 0$; ma allora:

$$\|k_N \star f - f\|_{L^p} \leq \|k_N \star f - K_{n,N} \star f\|_{L^p} + \|k_{n,N} \star f - f\|_{L^p} \tag{1}$$

ed $\exists n$ tale che $\|k_{n,N} \star f - f\|_{L^p} \leq \varepsilon/2$ e $\exists N$ tale che $\|k_N \star f - K_{n,N} \star f\|_{L^p} = \|(k_N - K_{n,N}) \star f\|_{L^p} \leq \|k_N - k_{n,N}\|_{L^1} \|f\|_{L^p} \leq \varepsilon/2$, in quanto:

$$\|k_{n,N}(x) - k_N(x)\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \left| N^d k_n(Nx) - N^d k(Nx) \right| dx \overset{y=Nx}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |k_n(y) - k(y)|\, dy \to 0$$

per Lebesgue. Da questo segue:

$$\|k_N \star f - f\|_{L^p} \leq \varepsilon. \tag{2}$$

□

<u>*Osservazione*</u>. Se $f \in L^1(a,b)$ é tale che $\int_a^b f \cdot \varphi dx = 0\ \forall \varphi \in L^\infty(a,b)$, allora $f = 0$ q.o.
Infatti, se $A = \{f > 0\}$, $B = \{f = 0\}$, $C = \{f < 0\}$, e $\varphi = \chi_A - \chi_C$, allora:

$$0 = \int_a^b f \cdot \varphi dx = \int_a^b |f| dx \Rightarrow |f| = 0 \text{ q.o.}$$

Teorema 4. *Se $f \in L^1(a,b)$ é tale che $\int_a^b f \cdot \varphi dx = 0\ \forall \varphi \in C(a,b)$, allora $f = 0$ q.o.*

Dimostrazione. Sia $A_n = \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}$. La tesi equivale a mostrare che $m(A_n) \to 0$ se $n \to \infty$.
Sia $B = \{|f| = 0\}$ e $C_n = \left\{0 < |f| < \frac{1}{n}\right\}$; $\forall n$ si ha che $(a,b) = A_n \cup B \cup C_n$.
Poniamo inoltre $A_n = A_n^+ \cup A_n^-$, con $A_n^+ = \left\{f > \frac{1}{n}\right\}$ e $A_n^- = \left\{f < -\frac{1}{n}\right\}$.
Per misurabilitá di $A_n^\pm$ e per l'assoluta continuitá dell'integrale di Lebesgue, $\exists K_n^\pm$ compatti tali che $K_n^\pm \subseteq A_n^\pm$ e $\int_{A_n^\pm \setminus K_n^\pm} |f| < \frac{1}{n^2}$.
Sia $\varphi_n \in C(a,b)$ tale che $\varphi_{n|K_n^\pm} = \pm 1$ (estesa a tutto il dominio con il teorema di Urysohn); si ha:

$$\begin{aligned} 0 = &\int_a^b f \cdot \varphi_n dx = \\ &= \underbrace{\int_{C_n} f \cdot \varphi_n dx}_{<\frac{1}{n} m(C_n)} + \underbrace{\int_{K_n^+} f \cdot \varphi_n dx}_{>\frac{1}{n} m(K_n^+)} + \underbrace{\int_{K_n^-} f \cdot \varphi_n dx}_{>\frac{1}{n} m(K_n^-)} + \underbrace{\int_{A_n^+ \setminus K_n^+} f \cdot \varphi_n dx}_{<\frac{1}{n^2}} + \underbrace{\int_{A_n^- \setminus K_n^-} f \cdot \varphi_n dx}_{<\frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Moltiplicando tutto per n, e notando che:

$$\lim_{n\to\infty} m\left(0 < |f| < \frac{1}{n}\right) = m\left(\bigcap_n \left\{0 < |f| < \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e:

$$m(K_n^+) \to m(A_n^+), \quad m(K_n^-) \to m(A_n^-) \quad \Rightarrow \quad m(K_n^+) + m(K_n^-) \to m(A_n),$$

segue che $m(A_n) \to 0$ se $n \to 0$. □