Convergenza di funzioni olomorfe e costruzione della $\wp$ di Weierstrass

Oscar Papini

30 ottobre 2013

Sommario

In questo seminario affronteremo il problema della convergenza di successioni di funzioni olomorfe e meromorfe. Dopo aver esposto alcuni risultati classici, quali il Teorema di Montel e il Teorema di Hurwitz, ci soffermeremo sulla costruzione di funzioni che abbiano singolarità assegnate. Questo ci porterà alla definizione della funzione $\wp$ di Weierstrass, che gioca un ruolo chiave nell'integrazione di funzioni ellittiche e nella teoria delle curve ellittiche definite su $\mathbb{C}$.

1 Convergenza di funzioni olomorfe

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Chiamiamo $\mathcal{C}^0(\Omega)$ lo spazio delle funzioni continue su Ω, e $\mathcal{H}o\ell(\Omega)$ il sottospazio delle funzioni olomorfe. Vogliamo dare una definizione di *convergenza* per funzioni olomorfe che, in un certo senso, ne preservi le proprietà. La nozione di convergenza che useremo sarà quella di *convergenza uniforme sui compatti*.

Iniziamo con il sistemare i dettagli topologici.

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso. Una *seminorma* su V è un'applicazione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tale che

(1) $\|x\| \geqslant 0$ per ogni $x \in V$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ per ogni λ scalare e per ogni $x \in V$;

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in V$.

In altre parole, l'unica differenza rispetto a una norma vera e propria è il fatto che una seminorma può annullarsi anche su un vettore non nullo.

Considerando più in generale famiglie di seminorme su V, denotate con $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$ (I insieme di indici), richiediamo l'ipotesi aggiuntiva che se $x \neq 0$, allora esiste $i \in I$ tale che $\|x\|_i \neq 0$.

Con una famiglia di seminorme è possibile definire una topologia su V stesso, usando come sistema fondamentale di intorni per un punto $x_0 \in V$ gli insiemi

$$U(x_0, i_1, \dots, i_n, \varepsilon) := \left\{ x \in V \mid \|x - x_0\|_{i_j} < \varepsilon \text{ per } j = 1, \dots, n \right\}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$, ed $\varepsilon > 0$. Questo rende V uno spazio vettoriale topologico, in quanto rispetto a questa topologia le operazioni di somma e prodotto per scalare sono continue.

Se la famiglia di seminorme è numerabile, la formula

$$d(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\|x - y\|_n}{1 + \|x - y\|_n}$$

definisce una distanza su V, che pertanto è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile. In effetti, la topologia definita con le seminorme e quella ottenuta dalla distanza coincidono.

Definizione 1.2. Se V è completo rispetto a questa distanza, è detto *spazio di Fréchet*.

Nel caso di $\mathcal{C}^0(\Omega)$, un compatto $K \subset \Omega$ definisce la seminorma

$$\|f\|_K := \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Basterà allora scegliere una famiglia numerabile di compatti $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le cui parti interne ricoprano Ω. Si può dimostrare che $\left(\mathcal{C}^0(\Omega), (\|\cdot\|_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ è uno spazio di Fréchet.

Osservazione. La nozione di convergenza definita da questa topologia è proprio la convergenza uniforme sui compatti, ovvero

$$(f_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \forall\, K \subset \Omega \text{ compatto } (f_n|_K) \text{ converge uniformemente.}$$

In effetti, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$ è una successione di funzioni continue convergente, il limite f verso cui converge la successione è tale che la sua restrizione $f|_K$ è continua per ogni compatto $K \subset \Omega$, dunque f è continua su tutto Ω (ogni punto di Ω ha un intorno compatto contenuto in Ω).

Proposizione 1.3. *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}ol(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe, convergente uniformemente sui compatti ad una funzione $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Allora f è olomorfa, e la successione delle derivate $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sui compatti a f'. In particolare, $\mathcal{H}ol(\Omega)$ è chiuso in $\mathcal{C}^0(\Omega)$ (e quindi è, a sua volta, uno spazio di Fréchet).*

Dimostrazione. Sia D un disco chiuso contenuto in Ω. La formula di Cauchy ci permette di esprimere $f_n(z)$, per z interno a D, come

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_n(t)}{t-z}dt. \tag{1.1}$$

Passando al limite sotto il segno di integrale si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(t)}{t-z}dt, \tag{1.2}$$

e questo prova che f è olomorfa. Per la seconda parte, derivando l'equazione (1.1) si ottiene

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_n(t)}{(t-z)^2}dt$$

e analogamente, derivando l'equazione (1.2)

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt.$$

Passando al limite si ottiene la tesi. □

In realtà esiste una caratterizzazione per la convergenza di successioni di funzioni olomorfe, nota come *Teorema di Vitali*. Sono necessari comunque alcuni risultati preliminari.

Proposizione 1.4 (Disuguaglianze di Cauchy). *Siano* $f \in \mathcal{H}o\ell(\Omega)$, $D \subseteq \Omega$ *un disco di centro* z_0 *e raggio* r, *e* $p \in \mathbb{N}$. *Se* $M \in \mathbb{R}$ *maggiora* $|f|$ *su* ∂D, *allora*

$$\left|f^{(p)}(z_0)\right| \leqslant \frac{p!}{r^p}M.$$

Dimostrazione. Dalla formula (1.2), iterando le derivate, si ottiene facilmente per induzione

$$f^{(p)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{p!\ f(t)}{(t-z)^{p+1}}dt.$$

Valutando $f^{(p)}$ in z_0 e calcolando l'integrale con la parametrizzazione $\partial D = \left\{z_0 + re^{i\theta} \middle| \theta \in [0, 2\pi]\right\}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\left|f^{(p)}(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{p!\ f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{p+1}}rie^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{p!}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right| d\theta \\
&\leqslant \frac{p!\ M}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{p!}{r^p}M
\end{aligned}$$

e questo conclude. □

Proposizione 1.5 (Test di Weierstrass). *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}ol(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe. Supponiamo che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esista una successione di costanti reali positive $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tali che*

(1) la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n$ sia convergente;

(2) si abbia che $\sup_{z\in K} |f_n(z)| \leqslant M_n$.

Allora la serie $\sum f_n$ converge uniformemente sui compatti di Ω a una funzione $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $K \subset \Omega$ un compatto, e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dato che $\sum M_n$ è convergente, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n=n_0}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Allora, per $z \in K$ e per $m, k \geqslant n_0$ (supponiamo $k > m$) abbiamo

$$\left| \sum_{n=m}^{k} f_n(z) \right| \leqslant \sum_{n=m}^{k} |f_n(z)| \leqslant \sum_{n=m}^{k} M_n < \varepsilon,$$

quindi le somme parziali formano una successione di Cauchy uniformemente in K. Di conseguenza la serie $\sum f_n$ converge a una funzione f, che è olomorfa per la proposizione 1.3. □

Siamo ora pronti per enunciare e dimostrare il Teorema di Vitali.

Teorema 1.6 (Vitali). *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}ol(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe, con Ω connesso. Si ha che (f_n) converge uniformemente sui compatti di Ω se e solo se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:*

(1) per ogni $K \subset \Omega$ compatto esiste $M_K \in \mathbb{R}$ tale che $|f_n(z)| \leqslant M_K$ per ogni $z \in K$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(2) esiste $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $p \in \mathbb{N}$ la successione $(f_n^{(p)}(z_0))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ delle derivate p-esime calcolate in z_0 converge in $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Ovviamente, se la successione converge uniformemente sui compatti, essa è limitata su ogni compatto; inoltre, anche la successione delle derivate p-esime converge uniformemente, pertanto anche la condizione (2) è verificata.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $K \subset \Omega$ compatto. Dobbiamo verificare che (f_n) converge uniformemente su K. Possiamo supporre che K sia connesso: infatti ogni compatto di Ω è incluso in un compatto connesso $H \subset \Omega$. Il compatto H può essere ottenuto come segue:

siano $K_1, \dots, K_h$ le componenti connesse di K (che sono in numero finito perché K è compatto), siano $z_1, \dots, z_h$ punti tali che $z_i \in K_i$, e per ogni $i \neq j$ sia $\alpha_{i,j}$ un arco in Ω che unisce z_i con z_j. Ovviamente gli $\alpha_{i,j}$ sono in numero finito, e le loro immagini in Ω sono compatti; allora basta porre

$$H := K \cup \bigcup_{i \neq j} \alpha_{i,j}.$$

Possiamo supporre inoltre che $z_0 \in K$: al massimo considero un disco centrato in z_0 e lo unisco con un arco a K.

K può essere ricoperto con un numero finito di dischi aperti D_j in Ω di centri z_j, tali che z_j appartenga all'unione dei dischi $D_1, \dots, D_{j-1}$: dimostriamolo. In primo luogo, $\{D_z \mid z \in K\}$ (dove D_z è un disco di Ω centrato in z) è un ricoprimento aperto di K, quindi ne considero un sottoricoprimento finito $\{D_1, \dots, D_k\}$. Posso supporre che, a meno di riordinare i dischi, per ogni $j = 2, \dots, k$

$$D_j \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} D_i \neq \varnothing.$$

Per induzione, infatti, se la relazione non valesse per nessuno dei D_t (per $t = j, \dots, k$), allora i due aperti $D_1 \cup \cdots \cup D_{j-1}$ e $D_j \cup \cdots \cup D_k$ sconnetterebbero K. A questo punto, sempre ragionando per induzione, consideriamo z_j per $j = 2, \dots, k$: se $z_j \in D_1 \cup \cdots \cup D_{j-1}$, non ci sono problemi; altrimenti, consideriamo il segmento che unisce z_t e z_j, dove si è supposto che D_t sia uno dei dischi tra i $D_1, \dots, D_{j-1}$ che intersecano D_j: è facile vedere che possiamo ricoprire tale segmento con un numero finito di dischi tutti contenuti in $D_t \cup D_j$ (perché $D_t \cap D_j \neq \varnothing$) per i quali vale che il centro di uno sia contenuto nell'unione dei precedenti. Aggiungendo tali dischi al ricoprimento, ne ottengo uno con la proprietà richiesta.

Basta allora dimostrare la convergenza uniforme su un qualsiasi disco di centro z_0. Sia $D_0 \subset \Omega$ un disco di centro z_0 e raggio r_0, e D un disco di centro z_0 e raggio $r < r_0$. Mostreremo che la successione converge uniformemente su D. Questo ci permette di concludere, perché ogni compatto $K \subset \Omega$ può essere ricoperto da un numero finito di dischi, con il centro di ciascuno contenuto nella parte interna dell'unione dei precedenti.

Per l'ipotesi (1) esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f_n(z)| \leqslant M$ per ogni $z \in D_0$, e quindi in particolare

$$\left| f_n^{(p)}(z_0) \right| \leqslant \frac{p!}{r_0^p} M.$$

Ora, sviluppando f_n in serie di Taylor centrata in z_0 si ottiene

$$f_n(z) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{f_n^{(p)}(z_0)}{p!} (z - z_0)^p.$$

Per $z \in D$, si ha
$$\left|\frac{f_n^{(p)}(z_0)}{p!}(z-z_0)^p\right| \leqslant \frac{M}{r_0^p} r^p = M\left(\frac{r}{r_0}\right)^p$$
che è un termine di una serie geometrica convergente. Quindi, per la proposizione 1.5, lo sviluppo di Taylor di f_n approssima uniformemente f_n su D. In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $p_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p \geqslant p_0$, detto $T_p(f_n)$ lo sviluppo di Taylor di f_n troncato all'ordine p, si ha

$$|f_n(z) - T_p(f_n)(z)| < \varepsilon$$

per ogni $z \in D$. A questo punto usiamo l'ipotesi (2): per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geqslant n_0$ si ha

$$\left|f_n^{(p)}(z_0) - f_m^{(p)}(z_0)\right| < \varepsilon,$$

e, a meno di cambiare costanti, possiamo supporre che quindi

$$|T_p(f_n)(z) - T_p(f_m)(z)| < \varepsilon$$

per i punti $z \in D$. Ricombinando il tutto, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $p_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $p \geqslant p_0$ e per ogni $m, n \geqslant n_0$ si ha

$$\begin{aligned}|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant\ & |f_n(z) - T_p(f_n)(z)| + \\ & + |T_p(f_n)(z) - T_p(f_m)(z)| + |T_p(f_m)(z) - f_m(z)| < 3\varepsilon\end{aligned}$$

e questo prova che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy su D, e quindi converge uniformemente su D. □

Esempio 1.1 (Funzione esponenziale). Normalmente l'esponenziale complessa viene definita dalla serie convergente

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

È possibile dimostrare che la successione di funzioni olomorfe sull'intero piano complesso
$$f_n(z) := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
converge in $\mathcal{H}o\ell(\mathbb{C})$ alla funzione esponenziale. Innanzitutto verifichiamo che la successione converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}$ con il Teorema di Vitali.

(1) Innanzitutto è sufficiente testare la condizione (1) solo per i dischi centrati in 0. Scriviamo f_n sviluppando il binomio:

$$f_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{z^p}{n^p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p}\frac{z^p}{p!}.$$

Per $|z| \leqslant r$, quindi, $|f_n(z)|$ è maggiorato da $\sum r^p/p!$, che converge.

(2) Si consideri $z_0 = 0$. Per induzione, è facile vedere che

$$f_n^{(p)}(z) = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-p} \tag{1.3}$$

e questo mostra che la successione $\left(f_n^{(p)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Possiamo dunque concludere che la successione converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}$ a una funzione olomorfa $f(z)$. A questo punto, notiamo che la funzione f in effetti presenta tutte le proprietà dell'esponenziale: vediamone qualcuna.

Dalla formula (1.3) si osserva che

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)f_n'(z) = f_n(z);$$

di conseguenza, al limite si ha $f'(z) = f(z)$. In particolare, $f(z)$ non ha zeri: se ne avesse, essi sarebbero anche zeri delle sue derivate, e quindi per analiticità f dovrebbe essere identicamente nulla, mentre $f(0) = 1$. Fissato $w \in \mathbb{C}$, allora, è sempre ben definita la funzione $f(z+w)/f(z)$. Derivando quest'espressione rispetto a z (e usando $f' = f$) si scopre che tale rapporto è costante, e valutandolo in $z = 0$ otteniamo che $f(z+w) = f(z)f(w)$. In altre parole, f è un omomorfismo dal gruppo $(\mathbb{C}, +)$ al gruppo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Dopo tutti questi esperimenti, per dimostrare che effettivamente che $f(z)$ coincide con e^z si può osservare che il rapporto $f(z)/e^z$ ha derivata nulla, e vale 1 nell'origine.

Terminiamo questa sezione con un risultato noto in letteratura come *Teorema di Montel*, che ci dà informazioni sui compatti di $\mathcal{H}o\ell(\Omega)$. Con esso sarà possibile caratterizzare i compatti come i sottoinsiemi chiusi e limitati.

Teorema 1.7 (Montel). *Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}o\ell(\Omega)$ una famiglia di funzioni olomorfe che sia equilimitata sui compatti di Ω, cioè tale che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $M_K \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che $|f(z)| \leqslant M_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $z \in K$. Allora da ogni successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di $\mathcal{H}o\ell(\Omega)$.*

Dimostrazione. L'aperto Ω può essere ricoperto da una quantità numerabile di dischi aperti centrati in $z_i \in \Omega$. Definiamo

$$\begin{array}{rccc} \lambda_i^k & : & \mathcal{H}ol(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & f & \longmapsto & f^{(k)}(z_i). \end{array}$$

Consideriamo dunque una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Per estrarne una sottosuccessione convergente, è sufficiente mostrare che esiste una sottosuccessione $(f_n)_{n\in N}$ (con $N \subseteq \mathbb{N}$ insieme infinito) tale che

$$\lim_{n\in N} \lambda_i^k(f_n) \text{ esista per ogni } i \text{ e per ogni } k. \tag{1.4}$$

In tal caso, la sottosuccessione verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di Vitali, e quindi converge uniformemente sui compatti.

In primo luogo notiamo che, fissati i e k, la successione numerica $(\lambda_i^k(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, in quanto $\mathcal{F}$ è equilimitato sui compatti e λ_i^k sono funzioni continue.

Rinominiamo le funzioni λ_i^k in modo da avere un solo indice, chiamandole μ_m. Useremo un procedimento diagonale per mostrare l'esistenza della sottosuccessione. Come visto poc'anzi, $(\mu_1(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{C}$, quindi esiste una sottosuccessione convergente, i cui indici stanno in un qualche insieme infinito $N_1 \subseteq \mathbb{N}$. A questo punto, $(\mu_2(f_n))_{n\in N_1}$ è una successione limitata, quindi esiste una sottosuccessione convergente, con indici in $N_2 \subseteq N_1$. Continuando così, al passo m-esimo troviamo un sottoinsieme $N_m \subseteq N_{m-1}$, che rappresenta una sottosuccessione convergente di $(\mu_m(f_n))_{n\in N_{m-1}}$.

Costruiamo allora l'insieme N come: per ogni $m \in \mathbb{N}$, l'm-esimo elemento di N corrisponde all'm-esimo elemento di N_m. È chiaro che, a partire dall'elemento m-esimo di N, tutti gli elementi di N stanno in N_m. Quindi la sottosuccessione definita dagli indici di N verifica la condizione (1.4), e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Corollario 1.8. *Un sottoinsieme di $\mathcal{H}ol(\Omega)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

In questo contesto, "insieme limitato" significa che per ogni intorno U di 0 esiste un numero reale positivo r tale che $\mathcal{F} \subseteq rU$. Per la struttura degli intorni in $\mathcal{H}ol(\Omega)$, questo è equivalente al fatto che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $M_K \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che $|f(z)| \leqslant M_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $z \in K$; in altre parole, "limitato" significa "equilimitato sui compatti".

Dimostrazione del corollario 1.8. $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}ol(\Omega)$ compatto. $\mathcal{H}ol(\Omega)$ è metrizzabile, quindi è uno spazio di Hausdorff. Di conseguenza i compatti sono chiusi.

D'altra parte, fissato $K \subset \Omega$, la mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}o\ell(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sup_{z\in K} |f(z)| \end{array}$$

è continua, dunque l'immagine di $\mathcal{F}$ è un compatto di $\mathbb{R}$, che in particolare è limitato.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}o\ell(\Omega)$ chiuso e limitato. È sufficiente provare che da ogni successione in $\mathcal{F}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $\mathcal{F}$. Ma l'ipotesi di limitatezza, grazie al Teorema di Montel, ci garantisce che una sottosuccessione convergente esiste; l'ipotesi di chiusura ci garantisce che il limite è un elemento di $\mathcal{F}$. Il corollario è così dimostrato. □

2 Il Teorema di Hurwitz

Come si è accennato all'inizio della sezione 1, la nozione di convergenza che abbiamo definito preserva le buone proprietà delle funzioni olomorfe. Questo è quanto sostanzialmente afferma il Teorema di Hurwitz.

Nel seguito indicheremo con Δ_r, per $r \geqslant 0$, il disco aperto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Lemma 2.1. *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ convergente uniformemente sui compatti di Ω a una funzione f olomorfa non costante. Allora, per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono $p \in \mathbb{N}$ e una successione $(z_n)_{n\geqslant p} \subset \Omega$ tali che*

- *(z_n) converge a z_0;*
- *per ogni $n \geqslant p$, $f_n(z_n) = f(z_0)$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $z_0 = 0$ (eventualmente traslando) e anche $f(z_0) = 0$ (eventualmente ripetendo il ragionamento con $g(z) := f(z) - f(z_0)$).

Sia Δ_ε un disco tale che f si annulli solo in 0 all'interno di Δ_ε, e non si annulli su $\partial\Delta_\varepsilon$. Sia inoltre

$$\gamma := \inf_{z\in\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)|.$$

Dato che (f_n) converge uniformemente, esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geqslant p$ si ha

$$|f_n(z) - f(z)| < \gamma$$

su $\overline{\Delta_\varepsilon}$. Di conseguenza su $\partial\Delta_\varepsilon$ vale che

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$$

e quindi, applicando il Teorema di Rouché a $f(z)$ e $f_n(z) - f(z)$, otteniamo che f_n e f hanno lo stesso numero di zeri in Δ_ε. In particolare, per ogni n esiste z_n tale che $f_n(z_n) = 0$.

La successione (z_n) converge a 0: vi convergono tutte le sottosuccessioni convergenti. Se infatti esistesse una sottosuccessione $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}, n_0 \geqslant p}$ che converge a un punto $z^* \neq 0$, si avrebbe

$$0 = f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_{n_k}) = f(z^*)$$

contro l'ipotesi che 0 fosse l'unico zero di f in Δ_ε. □

Da questo lemma segue facilmente il Teorema di Hurwitz.

Teorema 2.2 (Hurwitz). *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}ol(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe che converga uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa f. Allora*

(I) *se ogni f_n è priva di zeri, allora f è identicamente nulla oppure anch'essa priva di zeri;*

(II) *se ogni f_n è localmente iniettiva (ossia ha derivata prima mai nulla), allora f è costante oppure anch'essa localmente iniettiva;*

(III) *se esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ tale che ogni f_n ha immagine contenuta in U, allora f è costante oppure anch'essa ha immagine contenuta in U;*

(IV) *se ogni f_n è iniettiva, allora f è costante oppure anch'essa iniettiva.*

Dimostrazione. (I) Discende direttamente dal lemma 2.1.

(II) Discende dal punto precedente, applicato alla successione (f'_n) (che sappiamo convergere a f' per la proposizione 1.3).

(III) Se w sta nell'immagine di f, e quindi $w = f(z_0)$, sempre dal lemma 2.1 otteniamo l'esistenza di punti z_n tali che $w = f_n(z_n) \in U$.

(IV) Supponiamo che esistano $w_1, w_2 \in \Omega$ con $w_1 \neq w_2$ tali che $f(w_1) = f(w_2)$. Consideriamo due dischi D_1 e D_2, disgiunti e centrati rispettivamente in w_1 e w_2. Il lemma 2.1 ci assicura l'esistenza di valori $z_{n,1} \in D_1$ e $z_{n,2} \in D_2$ (che quindi sono distinti) tali che $f_n(z_{n,1}) = f(w_1) = f(w_2) = f_n(z_{n,2})$, contro l'iniettività delle f_n stesse.

□

3 Costruzione di funzioni meromorfe

La nozione di convergenza uniforme sui compatti permette di costruire funzioni meromorfe che presentino singolarità di un tipo assegnato e in punti assegnati.

Problema (Mittag-Leffler su $\mathbb{C}$). *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme discreto e senza punti d'accumulazione su $\mathbb{C}$, e per ogni $a \in A$ sia $f_a : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Vogliamo costruire $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ che abbia in ogni $a \in A$ la "stessa singolarità" di f_a, nel senso che $f - f_a$ sia estendibile in a in modo olomorfo.*

Dato che stiamo trattando funzioni con singolarità, occorre modificare leggermente la nozione di convergenza fin qui vista.

Definizione 3.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, I un insieme di indici, per ciascuno dei quali sia dato un insieme discreto $A_i \subset \Omega$ e una funzione olomorfa $f_i : \Omega \setminus A_i \to \mathbb{C}$. Diciamo che la serie $\sum_{i \in I} f_i$ *converge uniformemente sui compatti* in Ω se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste un insieme finito di indici $J \subseteq I$ tale che per ogni $i \in I \setminus J$ la funzione f_i sia definita su K (cioè $K \cap A_i = \varnothing$), e la serie $\sum_{i \in I \setminus J} f_i$ converge uniformemente su K. In tal caso, l'unione A di tutti gli insiemi A_i è discreto, ed è definibile in modo ovvio una funzione $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ che chiameremo *somma* della serie.

Se l'insieme delle singolarità A è finito, una soluzione al problema di Mittag-Leffler è data dalla somma delle f_a. Se A è infinito, costruiremo per ogni $a \in A$ dei polinomi P_a tali che la serie

$$\sum_{a \in A} (f_a - P_a)$$

converga uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus A$, che risolverà il problema.

Se $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, ordiniamo i suoi punti per modulo crescente, con $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$, e supponiamo per ora che $a_1 \neq 0$. Siano $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi tale che la serie $\sum \varepsilon_n$ sia convergente, e δ tale che $0 < \delta < |a_1|$. Chiamiamo inoltre f_n la funzione associata al punto a_n. Lo sviluppo in serie di f_n converge uniformemente sul disco

$$D_n := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |a_n| - \delta\};$$

sia allora P_n una somma parziale di tale sviluppo tale che $|f_n - P_n| < \varepsilon_n$ su D_n. Ora, dato che un compatto $K \subset \mathbb{C}$ è contenuto in un certo D_{n_0}, la serie

$$\sum_{n \geqslant n_0} (f_n - P_n)$$

è definita su D_{n_0} ed è ivi uniformemente convergente per la proposizione 1.5. Ma allora la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n - P_n)$$

è una soluzione al problema di Mittag-Leffler. Se poi $0 \in A$, una soluzione si ottiene sommando f_0 a una soluzione al problema per $A \setminus \{0\}$.

Un problema analogo a quello di Mittag-Leffler è il seguente, di natura moltiplicativa anziché additiva.

Problema (Weierstrass su $\mathbb{C}$). *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un insieme discreto senza punti di accumulazione e $p : A \to \mathbb{Z}$ una funzione. Vogliamo costruire g funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ tale che per ogni $a \in A$ la funzione $g(z)/(z-a)^{p(a)}$ sia olomorfa non nulla in un intorno di a. In altre parole, vogliamo costruire g meromorfa con zeri e poli nei punti di A con molteplicità date da p.*

Anche in questo caso, se l'insieme A è finito, è sufficiente considerare il prodotto

$$\prod_{a \in A} (z-a)^{p(a)}.$$

È possibile risolvere direttamente il problema, ma noi ci avvicineremo ad esso tramite un approccio più "geometrico", sfruttando al contempo la soluzione trovata per il problema di Mittag-Leffler.

Sia X una varietà reale connessa, ω una 1-forma complessa chiusa. Fissato $x_0 \in X$, l'insieme

$$\Gamma := \left\{ \int_\gamma \omega \;\middle|\; \gamma \in \pi_1(X, x_0) \right\}$$

è detto *gruppo dei periodi* di ω, ed è un sottogruppo additivo di $\mathbb{C}$.

Lemma 3.2. *Se Γ è contenuto in $2\pi i\mathbb{Z}$, allora esiste un'unica $h : X \to \mathbb{C}^*$ differenziabile, tale che $h(x_0) = 1$ e $dh/h = \omega$.*

Dimostrazione. Sia $u : \tilde{X} \to X$ il rivestimento universale di X, e $\tilde{\omega}$ il sollevamento di ω su $\tilde{X}$. $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, quindi esiste una primitiva $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{C}$. Componendo con l'esponenziale otteniamo un'applicazione $\tilde{h} : \tilde{X} \to \mathbb{C}^*$. Mostriamo ora che, se $y_1, y_2 \in u^{-1}(x)$, allora $\tilde{h}(y_1) = \tilde{h}(y_2)$, e questo ci permette di ben definire $h : X \to \mathbb{C}^*$ come $h(x) := \tilde{h}(y)$ per un qualche $y \in u^{-1}(x)$. Si ha che

$$\int_{\tilde{x_0}}^{y_2} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{x_0}}^{y_1} \tilde{\omega} + \int_{y_1}^{y_2} \tilde{\omega}$$

e quindi

$$\tilde{h}(y_2) = \tilde{h}(y_1) \exp\left(\int_{y_1}^{y_2} \tilde{\omega} \right) = \tilde{h}(y_1) \exp\left(\int_\gamma \omega \right)$$

con $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$; di conseguenza $\exp(\int_\gamma \omega) = 1$ e questo prova la buona definizione di h. Le proprietà elencate seguono facilmente. $\square$

Specializziamoci un poco. Prendiamo $a \in \mathbb{C}$ e $X = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < 1\}$, e consideriamo su di esso la 1-forma chiusa

$$\frac{n}{z-a}dz, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Vediamo il suo gruppo dei periodi: fissato $z_0 \in X$, per $\gamma \in \pi_1(X, z_0)$ abbiamo

$$\int_\gamma \frac{n}{z-a}dz = 2\pi i I(\gamma, a)n$$

dove $I(\gamma, a)$ è l'indice di avvolgimento di γ intorno ad a, e denota la classe di isomorfismo di γ in $\pi_1(X, z_0)$. Si può dunque applicare il lemma 3.2, ottenendo

$$h(z) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} \frac{n}{t-a}dt\right).$$

Notiamo che, detta $g(z) := (x-a)^n$, si ha

$$\frac{dh}{h} = \frac{n}{z-a}dz = \frac{dg}{g}. \tag{3.1}$$

Ricordiamo ora una conseguenza del teorema dei residui: l'integrale di df/f lungo il bordo di un compatto vale esattamente $2\pi i$ volte il numero di zeri di f meno il numero di poli di f dentro il compatto (contati con molteplicità). Ma $g(z)$ ha un unico zero di molteplicità n (se $n > 0$) o un unico polo di ordine $-n$ (se $n < 0$), mentre $h(z)$ è olomorfa su X (quindi non ha poli in X) ed è un esponenziale (quindi non ha zeri in X): l'unico caso in cui zeri e poli di g ed h possano accordarsi in base a (3.1) si ha quando $h(z)$ presenta lo stesso tipo di singolarità (zero o polo) di $g(z)$ in a. In effetti, ciò comporta che $h(z) = (z-a)^n\theta(z)$, dove θ è una qualche funzione olomorfa mai nulla su $X \cup \{a\}$.

Ricombinando il tutto, possiamo risolvere il problema di Weierstrass: dati $A \subset \mathbb{C}$ insieme discreto senza punti di accumulazione e $p : A \to \mathbb{Z}$, risolviamo il problema di Mittag-Leffler con i dati

$$f_a(z) := \frac{p(a)}{z-a}$$

ottenendo f. Supponendo che $0 \notin A$, per quanto osservato sopra, la funzione

$$g(z) := \exp\left(\int_0^z f(t)dt\right)$$

è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ che risolve il problema di Weierstrass.

Ci chiediamo ora: è possibile scrivere esplicitamente la soluzione, così come avevamo espresso tramite una serie la soluzione al problema di Mittag-Leffler? A partire da

$$f = \sum_{a \in A} (f_a - P_a)$$

si potrebbe scrivere il prodotto infinito

$$g(z) = \prod_{a \in A} \exp\left(\int_0^z \frac{p(a)}{t-a} dt\right) \exp\left(-\int_0^z P_a(t) dt\right)$$

che si può scrivere anche come

$$g(z) = \prod_{a \in A} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{p(a)} e^{Q_a(z)}$$

dove

- $\exp\left(\int_0^z \frac{p(a)}{t-a} dt\right)$ è un multiplo di $(z-a)^{p(a)}$ per una funzione olomorfa mai nulla, e dovendo valere 1 nell'origine dev'essere $(1 - z/a)^{p(a)}$;
- $Q_a(z) := -\int_0^z P_a(t) dt$ sono polinomi, e ricordando che i P_a sono sviluppi di Taylor troncati (diciamo all'ordine m) di $f_a(z) = p(a)/(z-a)$, un semplice conto mostra che
$$Q_a(z) = p(a) \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j+1} \left(\frac{z}{a}\right)^{j+1}.$$

Se infine $0 \in A$, basta moltiplicare la soluzione ottenuta per $A \setminus \{0\}$ per $z^{p(0)}$. Ma possiamo effettivamente scrivere la soluzione come prodotto infinito? Occorre verificarne la convergenza, la quale in effetti non è automatica.

Proposizione 3.3. *Siano A e p come sopra. Se*

- *p è limitata;*
- *la serie $\displaystyle\sum_{a \in A \setminus \{0\}} \frac{1}{|a|^r}$ è convergente;*

allora il prodotto infinito

$$z^{p(0)} \prod_{a \in A \setminus \{0\}} \left(\left(1 - \frac{z}{a}\right) \exp\left(\frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \cdots + \frac{z^{r-1}}{(r-1)a^{r-1}}\right)\right)^{p(a)}$$

converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}$ a una funzione olomorfa i cui unici zeri sono i punti di A, ciascuno con molteplicità $p(a)$.

Dimostrazione. Innanzitutto, un prodotto infinito $\prod f_n$ converge uniformemente sui compatti se e solo se lo fa la serie $\sum(f_n - 1)$ (in questo modo è garantita la buona definizione per la convergenza dei prodotti infiniti). Chiamiamo

$$E_\ell(z) := (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^\ell}{\ell}\right)$$

e mostriamo che, in generale, $|E_\ell(z) - 1| \leqslant |z|^{\ell+1}$ se $|z| \leqslant 1$.

Un conto diretto mostra che

$$E'_\ell(z) := -z^\ell \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^\ell}{\ell}\right)$$

e quindi $-E'_\ell(z)$ ha uno zero di ordine ℓ in $z = 0$, e la sua espansione in serie di potenze ha coefficienti reali non negativi. A questo punto scriviamo

$$1 - E_\ell(z) = -\int_0^z E'_\ell(w)dw$$

da cui si deduce che $1 - E_\ell(z)$ ha uno zero di ordine $\ell + 1$ in $z = 0$. Detta allora

$$\varphi(z) := \frac{1 - E_\ell(z)}{z^{\ell+1}},$$

abbiamo che i coefficienti dell'espansione in serie di potenze di $\varphi(z)$ sono non negativi. Di conseguenza, per $|z| \leqslant 1$, $|\varphi(z)| \leqslant \varphi(1) = 1$.

Tornando al nostro caso, vogliamo mostrare la convergenza del prodotto

$$\prod_{a \in A \smallsetminus \{0\}} E_{r-1}\left(\frac{z}{a}\right)$$

dove abbiamo assunto che il singolo fattore $E_{r-1}(z/a)$ è ripetuto $p(a)$ volte. Fissato $R > 0$, considero z tale che $|z| \leqslant R$. Per le ipotesi fatte, gli $a \in A$ tali che $|a| < 2R$ sono in numero finito, e quindi non creano problemi per la convergenza del prodotto nel disco $\{|z| \leqslant R\}$. Per gli altri, abbiamo che $|z/a| \leqslant 1/2$, perciò

$$\left|E_{r-1}\left(\frac{z}{a}\right) - 1\right| \leqslant \left|\frac{z}{a}\right|^r.$$

Pertanto, tenendo conto della molteplicità dei fattori,

$$\sum_{\substack{a \in A \smallsetminus \{0\} \\ |a| > 2R}} \left|E_{r-1}\left(\frac{z}{a}\right) - 1\right| \leqslant \sum_{a \in A \smallsetminus \{0\}} p(a)\left|\frac{z}{a}\right|^r \leqslant R^r \sum_{a \in A \smallsetminus \{0\}} \frac{p(a)}{|a|^r}$$

che, per le ipotesi fatte, è una serie convergente. Ne consegue che il prodotto infinito converge uniformemente sui compatti. □

4 La funzione $\wp$ di Weierstrass

Applichiamo quanto visto nella sezione precedente al caso in cui A sia un reticolo in $\mathbb{C}$ di rango 2 su $\mathbb{R}$, ossia un insieme della forma $\{a_1 z_1 + a_2 z_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$ dove $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sono $\mathbb{R}$-linearmente indipendenti, e richiediamo alla soluzione del problema di Weierstrass di avere zeri semplici nei punti del reticolo.

Lemma 4.1. *La serie* $\displaystyle\sum_{a \in A \setminus \{0\}} |a|^{-3}$ *è convergente.*

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale il disco di centro 0 e raggio r non contenga punti di $A \setminus \{0\}$. Di conseguenza, per ogni $a \in A \setminus \{0\}$, si ha

$$\frac{1}{|a|} < \frac{1}{r}.$$

Ora, la serie $\sum |a|^{-3}$ è a termini positivi, quindi è possibile sommare riordinando i termini a piacere; in particolare, sommiamo per parallelogrammi concentrici. Nella cornice a livello n ci sono $8n$ punti del reticolo, ciascuno distante da 0 almeno nr. Di conseguenza

$$\sum_{a \in A \setminus \{0\}} |a|^{-3} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 8n \frac{1}{(nr)^3} = \frac{8}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge. □

Per quanto visto sopra, allora, il prodotto

$$\sigma(z) := z \prod_{w \in A \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left(\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}\right)$$

converge a una funzione che chiamiamo *sigma di Weierstrass*. Definiamo la *zeta di Weierstrass* come la derivata logaritmica della sigma, ovvero

$$\zeta(z) := \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

che si scrive esplicitamente come

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in A \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right).$$

Finalmente, definiamo *$\wp$ di Weierstrass* la funzione $\wp(z) := -\zeta'(z)$, che è espressa dalla serie

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in A \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right).$$

Dall'espressione precedente si ricava immediatamente che $\wp(z)$ è pari. Inoltre presenta poli doppi (con residuo nullo) in ogni punto di A.

La convergenza della serie ci permette di derivare termine a termine, ottenendo

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in A} \frac{1}{(z-w)^3}$$

ed è chiaro che $\wp'$ è A-periodica.[1] Questo mostra che anche $\wp(z)$ è A-periodica: integrando $\wp'(z+w) = \wp'(z)$ rispetto a z si ricava

$$\wp(z+w) = \wp(z) + c(w) \tag{4.1}$$

con $c(w) \in \mathbb{C}$ costante rispetto a z. Valutando (4.1) per $z = -w/2$ abbiamo

$$\wp\left(\frac{w}{2}\right) = \wp\left(-\frac{w}{2}\right) + c(w)$$

ma $\wp(z)$ è pari, quindi $c(w) = 0$ per ogni w.

L'importanza della $\wp$ di Weierstrass si può riscontrare anche nel seguente teorema, di cui non formiamo la dimostrazione perché richiederebbe alcuni risultati algebrici la cui definizione esula dagli scopi di questo seminario.

Teorema 4.2. *Ogni funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e A-periodica è esprimibile come funzione razionale di $\wp$ e $\wp'$.*

A questo punto vogliamo dimostrare che $\wp$ e $\wp'$ sono legate da una relazione algebrica. Ma prima, è necessario un lemma sulle funzioni A-periodiche.

Lemma 4.3. *Una funzione f che sia A-periodica e olomorfa su $\mathbb{C}$ è costante. Analogamente, una funzione A-periodica senza zeri è costante.*

Dimostrazione. Per A-periodicità, si ha che

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)|$$

dove $D := \{a_1 z_1 + a_2 z_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}, 0 \leqslant a_1, a_2 < 1\}$ è il parallelogramma fondamentale associato al reticolo generato da z_1 e z_2.

Ora, f è olomorfa, quindi continua, e di conseguenza è limitata su D. Allora è limitata su tutto $\mathbb{C}$, perciò costante in virtù del Teorema di Liouville.

Se f è senza zeri, $1/f$ è olomorfa e quindi costante. □

[1]Una funzione $g(z)$ è A-*periodica* se $g(z+w) = g(z)$ per ogni $w \in A$.

Proposizione 4.4. *Sia*

$$G_{2k} := \sum_{w \in A \setminus \{0\}} w^{-2k}$$

(che converge assolutamente per $k > 1$*, con un ragionamento analogo alla dimostrazione del lemma 4.1). Allora*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Per z tale che $|z| < |w|$, si ha che

$$\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{(1-z/w)^2} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{w^{n+2}}.$$

Sostituendo nell'espressione per $\wp$ otteniamo il suo sviluppo di Laurent in un intorno di 0:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)G_{2k+2}z^{2k}.$$

Con questo sviluppo, esplicitando

$$\begin{aligned}
\wp'(z)^2 &= 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + \dots \\
\wp(z)^3 &= z^{-6} + 9G_4z^{-2} + 15G_6 + \dots \\
\wp(z) &= z^{-2} + 3G_4z^2 + \dots
\end{aligned}$$

otteniamo che la funzione

$$f(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6$$

è olomorfa in $z = 0$, A-periodica (e quindi olomorfa in ogni punto di A), olomorfa fuori da A perché lo è $\wp$, e quindi costante per il lemma 4.3. Siccome poi $f(0) = 0$, abbiamo la relazione algebrica cercata. □

Proposizione 4.5. *Il polinomio* $f(x) := 4x^3 - 60G_4x - 140G_6$ *ha radici distinte, quindi definisce una curva ellittica su* $\mathbb{C}$*.*

Dimostrazione. Siano z_1, z_2 base del reticolo, e $z_3 := z_1 + z_2$. Dalla disparità e dalla A-periodicità di $\wp'$ possiamo notare che

$$\wp'\left(\frac{z_i}{2}\right) = -\wp'\left(-\frac{z_i}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{z_i}{2}\right)$$

per $i = 1, 2, 3$. Dalla relazione (4.2), quindi, abbiamo che $f(x)$ si annulla in $\wp(z_i/2)$. Basta allora mostrare che questi tre valori sono distinti.

La funzione $\wp(z) - \wp(z_i/2)$ è pari, quindi ha almeno uno zero doppio in $z_i/2$. D'altra parte $\wp$ ha ordine 2;[2] di conseguenza, $\wp(z) - \wp(z_i/2)$ non può avere altri zeri (in un opportuno parallelogramma fondamentale. Segue che $\wp(z_i/2) \neq \wp(z_j/2)$ per $i \neq j$. $\square$

Questo porta a un importante corollario, di cui omettiamo la dimostrazione.

Corollario 4.6. *La mappa*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ z & \longmapsto & [\wp(z) : \wp'(z) : 1] \end{array}$$

induce una mappa $\mathbb{C}/_{\Lambda} \to E$, *dove* E *è la curva ellittica definita da* $y^2 = 4x^3 - 60G_4x - 140G_6$, *che è un isomorfismo tra superfici di Riemann e un omomorfismo di gruppi.*

Riferimenti bibliografici

[1] Henri Cartan. *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover Publications, 1995.

[2] I-Hsiung Lin. *Classical Complex Analysis: a Geometric Approach*, volume 2. World Scientific, 2010.

[3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, terza edizione, 1987.

[4] Joseph H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, seconda edizione, 2009.

[5] Edward C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Oxford University Press, seconda edizione, 1975.

[2]L'*ordine* di una funzione meromorfa Λ-periodica è il numero di poli (contati con molteplicità) presenti in un parallelogramma fondamentale, che si può dimostrare essere uguale al numero di zeri (contati con molteplicità) presenti in un parallelogramma fondamentale.