

Dinamica polinomiale e raggi esterni

Oscar Papini

7 febbraio 2014

Sommario

In questo seminario analizzeremo la dinamica definita da una mappa polinomiale sulla sfera di Riemann, dimostrando alcuni risultati sulla struttura topologica dell'insieme di Julia associato alla mappa. Descriveremo poi i *raggi esterni*, uno strumento usato per studiare l'insieme di Julia.

Le applicazioni che fanno uso dei raggi esterni sono molteplici; noi ci limiteremo a dimostrare che, sotto l'ipotesi di connessione dell'insieme di Julia, quasi tutti i raggi atterrano sull'insieme di Julia stesso.

Nel resto del documento si adatterà la seguente notazione:

- la sfera di Riemann sarà indicata con $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
- il disco aperto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ sarà denotato con Δ_r (Δ_1 sarà indicato anche più brevemente con Δ).

1 Punti fissi superattrattivi

Sia M una varietà complessa, e $f : M \rightarrow M$ una mappa olomorfa. Ricordiamo che, se $z_0 \in M$ è un punto fisso per f , il suo *moltiplicatore* è definito come $\lambda := f'(z_0)$. Questo numero è ben definito, nel senso che non dipende dalla scelta di una coordinata locale (occorre, naturalmente, leggere f nella stessa carta sia in partenza che in arrivo: ciò è possibile in quanto z_0 è un punto fisso). In base al loro moltiplicatore, i punti fissi si distinguono in

- punti *attrattivi* se $|\lambda| < 1$ (in particolare *superattrattivi* se $\lambda = 0$);
- punti *repulsivi* se $|\lambda| > 1$;
- punti *indifferenti* se $|\lambda| = 1$.

Concentriamo la nostra attenzione sui punti fissi superattrattivi, dal momento che sarà proprio questo caso che approfondiremo nel resto del seminario. Per

semplicità, supponiamo di aver fissato una coordinata locale per la quale il punto fisso sia $z = 0$: la mappa assume la forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

con $n \geq 2$ e $a_n \neq 0$. Il numero n è chiamato *grado locale* di f .

Teorema 1.1 (Böttcher). *Nelle ipotesi precedenti, esiste un cambio di coordinate locale $w = \varphi(z)$ (w è chiamata coordinata di Böttcher) tale che $\varphi(0) = 0$ e che $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : w \mapsto w^n$ in un intorno di 0 . Tale cambio di coordinate è unico a meno di moltiplicazione per una radice $(n-1)$ -esima dell'unità.*

Sia ora $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una mappa razionale per la quale 0 sia un punto superattrattivo. La coordinata di Böttcher è definita solo in un intorno di 0 : ci chiediamo allora se e quanto possa essere estesa.

Sappiamo che φ mappa biolomorficamente un intorno U di 0 in un intorno V di 0 , quindi ha un'inversa locale ψ_ε che mappa un dischetto $\Delta_\varepsilon \subseteq V$ in un intorno di 0 .

Teorema 1.2. *Esiste un unico disco Δ_r di raggio massimale $0 < r \leq 1$ tale che la mappa ψ_ε si estende in modo olomorfo ad una mappa $\psi : \Delta_r \rightarrow \mathcal{A}_0$, dove \mathcal{A}_0 indica la componente connessa del bacino di attrazione di 0 cui 0 appartiene. Inoltre,*

1. se $r = 1$, ψ mappa il disco unitario Δ biolomorficamente in \mathcal{A}_0 e 0 è l'unico punto critico per f in \mathcal{A}_0 ;
2. se $r < 1$, esiste almeno un altro punto critico in \mathcal{A}_0 , che giace sulla frontiera di $\psi(\Delta_r)$.

2 Dinamica polinomiale

Specializziamoci ora considerando mappe definite da polinomi. La proposizione seguente chiarifica il motivo per cui abbiamo posto particolare attenzione sui punti fissi superattrattivi.

Proposizione 2.1. *Per una mappa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ polinomiale monica di grado maggiore o uguale a 2, ∞ è un punto superattrattivo.*

Dimostrazione. Sia $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ (ovviamente prolungata con $f(\infty) = \infty$). Intanto leggiamo f in partenza e in arrivo nella carta $\zeta = 1/z$ che contiene il punto all'infinito, ottenendo

$$F : \zeta \mapsto \begin{cases} \frac{1}{f(1/\zeta)} & \zeta \neq 0 \\ 0 & \zeta = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo il moltiplicatore in 0: si ottiene

$$\begin{aligned} F'(\zeta)\Big|_{\zeta=0} &= -\frac{1}{f(1/\zeta)^2} f'(1/\zeta) \left(-\frac{1}{\zeta^2}\right)\Big|_{\zeta=0} = \\ &= \frac{\zeta^{n-1}(a_1 \zeta^{n-1} + \dots + n)}{a_0^2 \zeta^{2n} + \dots + 1}\Big|_{\zeta=0} = 0. \end{aligned}$$

Questo prova che ∞ è un punto superattrattivo per f . □

In particolare, esiste una costante R tale che ogni punto z con $|z| > R$ appartiene al bacino di attrazione di infinito $\mathcal{A}(\infty)$.

Definizione 2.2. Il complementare di $\mathcal{A}(\infty)$ in \mathbb{C} , cioè l'insieme dei punti la cui orbita resta limitata, è detto *insieme di Julia riempito* associato ad f , e sarà indicato con \mathcal{K} .

Ricordiamo che, informalmente parlando, l'*insieme di Julia* associato ad f è l'insieme dei punti della varietà che manifestano una *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali* per la dinamica definita da f ; in altre parole, punti vicini a un punto dell'insieme di Julia hanno un comportamento molto differente rispetto a tale punto, dopo un certo numero di iterazioni. Il complementare dell'insieme di Julia è detto *insieme di Fatou* associato ad f . È possibile dare una definizione più precisa degli insiemi di Julia e Fatou in termini di *domini di normalità* della famiglia delle iterate $\{f^{\circ n}\}$, ma per gli scopi di questo seminario un'idea intuitiva sarà più che sufficiente.

Il seguente lemma specifica il legame tra l'insieme di Julia e l'insieme di Julia riempito associati ad f (svelando il motivo per cui \mathcal{K} è chiamato insieme di Julia "riempito").

Lemma 2.3. *Per una mappa f polinomiale monica di grado $n \geq 2$, l'insieme di Julia riempito \mathcal{K} è compatto in \mathbb{C} , e il suo complementare $\mathcal{A}(\infty)$ è connesso; la frontiera topologica $\partial\mathcal{K}$ coincide con l'insieme di Julia \mathcal{J} di f , mentre la parte interna di \mathcal{K} è l'unione delle componenti connesse limitate dell'insieme di Fatou $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}$, le quali sono semplicemente connesse. Quindi \mathcal{K} risulta l'unione di tali componenti connesse e di \mathcal{J} stesso.*

Dimostrazione. Ovviamente il rapporto $f(z)/z^n$ tende ad 1 per $|z| \rightarrow \infty$, quindi possiamo scegliere una costante $r_0 \geq 2$ tale che per ogni z con $|z| > r_0$ si abbia

$$\left| \frac{f(z)}{z^n} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

Dalla disuguaglianza $|z^n| \leq |z^n - f(z)| + |f(z)|$ segue allora che

$$|f(z)| > \frac{|z^n|}{2} > 2|z|$$

per $|z| > r_0$: tutti questi punti, dunque, appartengono ad $\mathcal{A}(\infty)$. Di conseguenza, \mathcal{K} è chiuso (è il complementare di $\mathcal{A}(\infty)$ che è aperto) e limitato, quindi compatto.

Il fatto che $\partial\mathcal{K} = \partial\mathcal{A}(\infty) = \mathcal{J}$ discende da un risultato più generale: se $\mathcal{B} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ è il bacino di attrazione di un qualche punto attrattivo, allora la frontiera topologica $\partial\mathcal{B}$ coincide con l'intero insieme di Julia. (È il corollario 4.12 di [1].) La dimostrazione di questo risultato richiederebbe un'analisi più approfondita delle proprietà dell'insieme di Julia, cosa che esula dagli scopi di questo seminario.

Mostriamo ora che $\mathcal{A}(\infty)$ è connesso. Sia U una qualsiasi componente connessa limitata dell'insieme di Fatou $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}$. Per ogni $z \in U$ ed ogni $n \geq 0$ dev'essere $|f^{o_n}(z)| \leq r_0$: se esistesse un punto $z \in U$ tale che $|f^{o_n}(z)| > r_0$, per il Principio del Massimo esisterebbe un punto $\tilde{z} \in \partial U \subseteq \mathcal{J}$ tale che $|f^{o_n}(\tilde{z})| > r_0$, ma questo implicherebbe che $\tilde{z} \in \mathcal{A}(\infty)$, in contraddizione con il fatto che $\mathcal{J} \cap \mathcal{A}(\infty) = \emptyset$. Quindi i punti di U hanno orbita limitata, e da ciò segue che $U \subseteq \mathcal{K}$ per definizione di \mathcal{K} . Di conseguenza, ogni componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}$ è contenuta in \mathcal{K} , e l'unica componente connessa illimitata può essere identificata con $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K} = \mathbb{C} \cap \mathcal{A}(\infty)$.

Resta da dimostrare che le componenti connesse limitate dell'insieme di Fatou sono semplicemente connesse. Sia U una tale componente connessa, e sia $\gamma \subset U$ una curva semplice chiusa. Sia inoltre V la componente connessa limitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma$ (che esiste per il Teorema della Curva di Jordan). Come sopra, se esistesse un punto $z \in V$ tale che $|f^{o_n}(z)| > r_0$, per il Principio del Massimo esisterebbe un punto $\tilde{z} \in \partial V = \gamma \subset U$ tale che $|f^{o_n}(\tilde{z})| > r_0$, in contraddizione con quanto visto nel paragrafo precedente. Quindi $V \subset \mathcal{K}$, e in particolare V non può contenere punti di $\mathcal{J} = \partial\mathcal{K}$, da cui si deduce che $V \subseteq U$. Questo dimostra che γ è omotopicamente banale in U , e di conseguenza la semplice connessione di U . \square

Cerchiamo di studiare meglio la struttura dell'insieme di Julia riempito \mathcal{K} . Il teorema 1.2 applicato al bacino di attrazione dell'infinito porta al seguente risultato.

Teorema 2.4. *Sia f un polinomio monico di grado $n \geq 2$.*

1. *Se l'insieme di Julia riempito \mathcal{K} contiene tutti i punti critici finiti di f , allora sia \mathcal{K} che $\mathcal{J} = \partial\mathcal{K}$ sono connessi, e il complementare di \mathcal{K} è biolomorfo al complementare*

del disco chiuso $\overline{\Delta}$ tramite un isomorfismo

$$\widehat{\varphi} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta},$$

ottenuto componendo l'isomorfismo di Böttcher (vedi teorema 1.1) con la mappa di inversione $w \mapsto 1/w$ su $\widehat{\mathbb{C}}$. Tale isomorfismo $\widehat{\varphi}$ coniuga f con la mappa $w \mapsto w^n$ su $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$.

2. Se invece esiste almeno un punto critico per f in $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$, allora sia \mathcal{K} che \mathcal{J} hanno più che numerabili componenti connesse.

Dimostrazione. 1. Supponiamo che non esistano punti critici (diversi da ∞) in $\mathcal{A}(\infty)$. Per il teorema 1.2 la coordinata di Böttcher si estende ad un biolomorfismo $\varphi : \mathcal{A}(\infty) \rightarrow \Delta$, e quindi (componendo con l'inversione $w \mapsto 1/w$ in $\widehat{\mathbb{C}}$ e levando ∞ a dominio e codominio) si ha un biolomorfismo

$$\psi = \widehat{\varphi}^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}.$$

Consideriamo ora le corone circolari

$$A_{1+\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 1 + \varepsilon\};$$

naturalmente l'immagine $\psi(A_{1+\varepsilon}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ è connessa, e la sua chiusura è connessa, compatta e contiene $\mathcal{J} = \partial\mathcal{A}(\infty)$. Di conseguenza, anche

$$\mathcal{J} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\psi(A_{1+\varepsilon})}$$

è connesso, e per il lemma 2.3 anche \mathcal{K} lo è.

2. Viceversa, supponiamo che esista un punto critico per f in $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$. Sempre per il teorema 1.2, esiste $r > 1$ per cui si abbia un biolomorfismo

$$\psi : \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r} \rightarrow \mathcal{U},$$

dove $\mathcal{U} := \psi(\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ è aperto. Tale ψ , dove definito, inverte $\widehat{\varphi}$.

$\partial\mathcal{U}$ è compatto in $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ e contiene almeno un punto critico per f ; sia c tale punto critico, e sia $v := f(c)$ il corrispondente valore critico. Notiamo che $v \in \mathcal{U}$, infatti $v = \psi(\widehat{\varphi}(v))$ e $|\widehat{\varphi}(v)| = |\widehat{\varphi}(f(c))| = |\widehat{\varphi}(c)|^n = r^n > r$.

Consideriamo allora il raggio $R := \{t\widehat{\varphi}(v) \mid t \geq 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r}$, e la sua immagine $R' := \psi(R) \subset \mathcal{U}$. Infine consideriamo la controimmagine $f^{-1}(R') \subset \overline{\mathcal{U}}$. Per costruzione, $\mathcal{U} \cap f^{-1}(R')$ è formato da n raggi distinti (corrispondenti

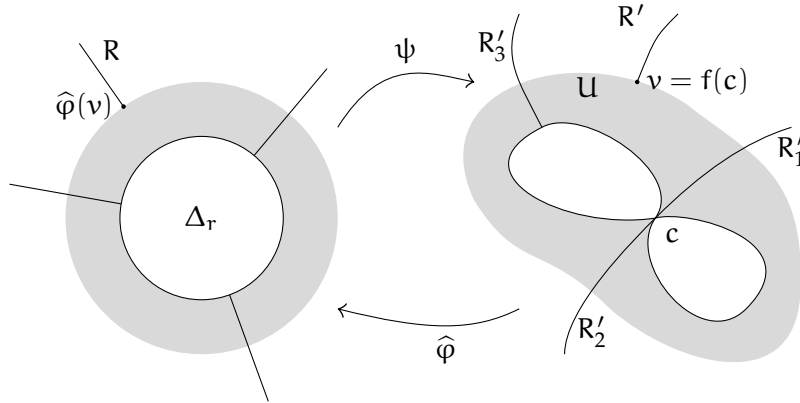


Figura 1: Visualizzazione grafica della dimostrazione del teorema 2.4 (esempio con $n = 3$).

alle n componenti della controimmagine dell'insieme R rispetto all'elevamento a potenza n -esima su $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r}$, che chiamiamo R'_j , con $j = 1, \dots, n$. Ciascuno di questi raggi termina su un punto z soluzione dell'equazione $f(z) = v$. Quest'equazione ha una soluzione almeno doppia per $z = c$, quindi almeno due raggi (supponiamo che siano R'_1 e R'_2) terminano su c . L'unione $R'_1 \cup R'_2 \subset \bar{U}$ separa il piano in due aperti connessi, che indichiamo con V_0 e V_1 .

Osserviamo che sia $f(V_0)$ che $f(V_1)$ contengono tutti i punti del piano, tranne al più quelli di R' . Infatti, notiamo dapprima che $f(V_k)$ ($k = 0$ oppure 1) è aperto. Se $\tilde{z} \in \partial f(V_k)$, possiamo scegliere una successione $(z_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset V_k$ tale che la successione $(f(z_j))_{j \in \mathbb{N}}$ converga a \tilde{z} . La successione $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è ovviamente limitata (in caso contrario, la successione delle $f(z_j)$ divergerebbe), quindi ne possiamo estrarre una sottosuccessione convergente a qualche punto $z' \in \mathbb{C}$. Ma ora $z' \notin V_k$ (perché $f(z') = \tilde{z}$ e f è una mappa aperta), e quindi $z' \in \partial V_k = R'_1 \cup R'_2$, da cui $\tilde{z} \in R'$. Riassumendo, $f(V_k)$ è aperto, connesso, la cui frontiera è contenuta in R' , e $\mathbb{C} \setminus R'$ è connesso. Quindi $f(V_k) \supseteq \mathbb{C} \setminus R'$, che a sua volta contiene \mathcal{K} .

Siano allora $\mathcal{J}_0 := \mathcal{J} \cap V_0$ e $\mathcal{J}_1 := \mathcal{J} \cap V_1$. Dato che $f(V_k) \supseteq \mathcal{K}$, sia \mathcal{J}_0 che \mathcal{J}_1 sono non vuoti, e di più vale che $f(\mathcal{J}_0) = f(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}$. Inoltre \mathcal{J}_0 e \mathcal{J}_1 sono compatti disgiunti la cui unione è tutto \mathcal{J} . In modo simile, possiamo spezzare ciascun \mathcal{J}_k in $\mathcal{J}_{k0} := \mathcal{J}_k \cap f^{-1}(\mathcal{J}_0)$ e $\mathcal{J}_{k1} := \mathcal{J}_k \cap f^{-1}(\mathcal{J}_1)$, che sono compatti, disgiunti, non vuoti e tali che $f(\mathcal{J}_{k\ell}) = \mathcal{J}_\ell$. Continuando induttivamente, possiamo

dividere \mathcal{J} in 2^{p+1} insiemi

$$\mathcal{J}_{k_0 \dots k_p} := \mathcal{J}_{k_0} \cap f^{-1}(\mathcal{J}_{k_1}) \cap \dots \cap f^{-p}(\mathcal{J}_{k_p})$$

tali che $f(\mathcal{J}_{k_0 \dots k_p}) = \mathcal{J}_{k_1 \dots k_p}$. A questo punto, per ogni $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots)$ successione infinita di 0 e 1 possiamo definire $\mathcal{J}_{\mathbf{k}}$ come l'intersezione della successione annidata

$$\mathcal{J}_{k_0} \supset \mathcal{J}_{k_0 k_1} \supset \mathcal{J}_{k_0 k_1 k_2} \supset \dots$$

Ogni $\mathcal{J}_{\mathbf{k}}$ è compatto e non vuoto. Abbiamo ottenuto quindi più che numerabili sottoinsiemi a due a due disgiunti, non vuoti, la cui unione è tutto \mathcal{J} . Ogni componente connessa di \mathcal{J} dev'essere contenuta in uno solo di tali $\mathcal{J}_{\mathbf{k}}$, e quindi \mathcal{J} ha più che numerabili componenti connesse.

La dimostrazione per \mathcal{K} è del tutto analoga.

□

3 Raggi esterni

Da questo punto in poi, ci metteremo nell'ipotesi che l'insieme di Julia sia connesso, o equivalentemente che l'insieme di Julia riempito sia connesso. Di conseguenza il teorema 2.4 ci garantisce l'esistenza di un isomorfismo $\hat{\varphi} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$. Da ora in poi chiameremo semplicemente φ questo isomorfismo, per non appesantire la notazione.

Definizione 3.1. La funzione

$$G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} \log |\varphi(z)| & \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K} \\ 0 & \text{per } z \in \mathcal{K} \end{cases}$$

è detta *funzione di Green* per \mathcal{K} .

Dalla definizione è evidente che

$$G(f(z)) = nG(z), \tag{3.1}$$

dove n è il grado del polinomio f .

Definizione 3.2. Per $c > 0$, l'insieme $G^{-1}(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid G(z) = c\}$ è detto *curva equipotenziale* intorno all'insieme di Julia riempito \mathcal{K} .

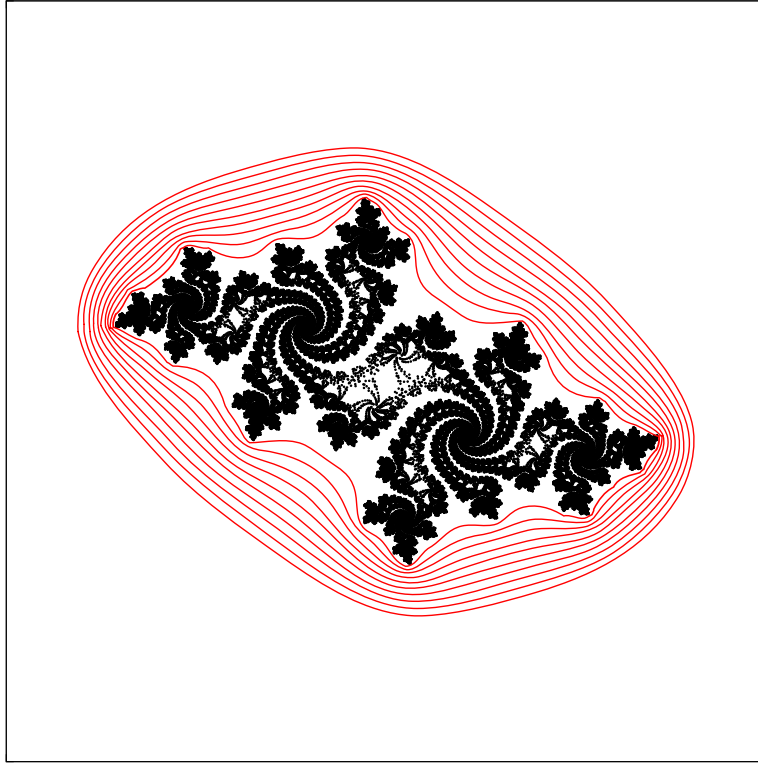


Figura 2: Alcune curve equipotenziali attorno all'insieme di Julia per $f(z) = z^2 + c$, con $c \approx -0.51957 + 0.52618i$.

Notiamo che dall'equazione (3.1) si deduce che f mappa la curva equipotenziale $G^{-1}(c)$ nella curva $G^{-1}(nc)$; questa mappa è un rivestimento a n fogli, perché coniugata a $w \mapsto w^n$ tramite φ .

Definizione 3.3. Le traiettorie ortogonali alla famiglia delle curve equipotenziali sono dette *raggi esterni* per \mathcal{K} . Esse corrispondono all'immagine tramite φ^{-1} delle semirette $\{re^{2\pi it} \mid r > 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$, dove $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è fissato. Il raggio esterno di angolo t sarà indicato con $R_t \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$.

È facile vedere che $f(R_t) = R_{nt}$; in particolare, se t è periodico rispetto alla moltiplicazione per n , allora il raggio R_t è periodico. Ad esempio, se $n^p t \equiv t \pmod{\mathbb{Z}}$, la mappa $f^{\circ p}$ manda R_t in sé.

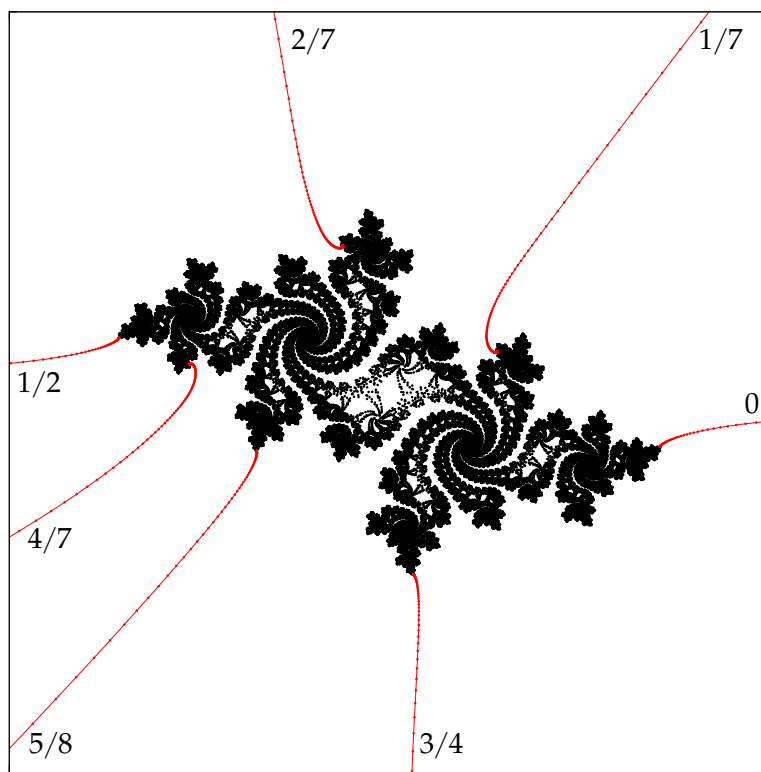


Figura 3: Alcuni raggi esterni per l'insieme di Julia della figura 2 (in frazioni di angolo giro).

4 Atterraggio

Consideriamo a questo punto il limite

$$\gamma(t) := \lim_{r \rightarrow 1^+} \varphi^{-1}(re^{2\pi it}). \quad (4.1)$$

In altre parole, ci chiediamo cosa succede avvicinandoci all'insieme di Julia.

Definizione 4.1. Se il limite (4.1) esiste, diciamo che il raggio R_t atterra sul punto $\gamma(t)$, che necessariamente appartiene all'insieme $\mathcal{J} = \partial\mathcal{K}$.

Un primo, semplice risultato è il seguente.

Lemma 4.2. Se il raggio R_t atterra sul punto $\gamma(t)$, allora il raggio R_{nt} atterra sul punto $\gamma(nt) = f(\gamma(t))$. Inoltre, ciascuno dei raggi della forma $R_{(t+j)/n}$, con $j = 0, \dots, n-1$, atterra su un punto di $f^{-1}(\gamma(t))$, e su ogni punto di $f^{-1}(\gamma(t))$ atterra almeno un raggio di quella forma.

Dimostrazione. Consideriamo un punto $z \in \mathcal{J}$, e supponiamo dapprima che non sia un punto critico per f . Allora f mappa un intorno N di z diffeomorficamente in qualche intorno N' di $f(z)$, trasportando eventuali raggi $R_s \cap N$ in raggi $R_{ns} \cap N'$. Di conseguenza, se R_s atterra su z , R_{ns} atterra su $f(z)$, mentre se R_t atterra su $f(z)$, allora per un qualche s della forma $(t + j)/n$ (con $j = 0, \dots, n - 1$) il raggio R_s atterra su z .

Se z è un punto critico, la situazione è simile: stavolta N è mappato in N' come rivestimento ramificato, quindi ciascun raggio che atterra su $f(z)$ è coperto da due o più raggi che atterrano su z . \square

Corollario 4.3. *Se il raggio R_t è periodico di periodo p , ed atterra sul punto $\gamma(t)$, allora tale punto è periodico sotto f , con periodo che divide p .*

Il risultato che dimostreremo riguarda la risposta a una domanda che, a questo punto, sorge spontanea: quanto è frequente che un raggio atterri? E quanti raggi possono atterrare su uno stesso punto? Vedremo che sotto questo punto di vista i raggi si comportano bene: quasi tutti i raggi atterrano, e su ogni punto dell'insieme di Julia atterra un insieme trascurabile di raggi.

Teorema 4.4. *Per tutti i $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tranne al più un insieme di misura nulla, il raggio R_t atterra su un punto $\gamma(t) \in \mathcal{J}$ ben definito. Inoltre, fissato $z_0 \in \mathcal{J}$, l'insieme dei t tali che $\gamma(t) = z_0$ ha misura nulla.*

Prima di addentrarci in questa dimostrazione, è necessario introdurre alcuni risultati, per così dire, analitici. Consideriamo un intervallo aperto di numeri reali $I := (a, b)$, e sia $I^2 \subset \mathbb{C}$ il quadrato (aperto) $\{x + iy \mid x, y \in I\}$. Supponiamo di aver definito su I^2 una metrica conforme della forma $\rho(z)|dz|$, dove $\rho : I^2 \rightarrow (0, \infty)$ è una funzione continua e strettamente positiva (non necessariamente limitata). Per definizione, l'area di I^2 in questa metrica è l'integrale

$$A := \int_{I^2} \rho(x + iy)^2 dx dy,$$

mentre la lunghezza di un segmento orizzontale $\{x + iy \mid x \in I\}$, con $y \in I$, è

$$\ell(y) := \int_I \rho(x + iy) dx.$$

Tra lunghezza dei segmenti ed area intercorre la seguente relazione.

Lemma 4.5 (Disuguaglianza Lunghezza-Area). *Se l'area A è finita, allora la lunghezza $\ell(y)$ è finita per quasi ogni $y \in I$, e vale che*

$$\frac{1}{b-a} \int_I \ell(y)^2 dy \leq A. \quad (4.2)$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Schwarz (f e g sono funzioni reali definite su $I = (a, b)$ e quadrato-integrabili)

$$\left(\int_I f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_I f(x)^2 dx \right) \left(\int_I g(x)^2 dx \right)$$

applicata a $f(x) = 1$ e $g(x) = \rho(x + iy)$ (ρ è quadrato-integrabile perché A è finita) si ricava

$$\ell(y)^2 \leq (b - a) \int_I \rho(x + iy)^2 dx.$$

Integrando su y e dividendo per $b - a$ si ottiene (4.2). A questo punto, se A è finita, si ha ovviamente che $\ell(y)$ è finita (a meno di un insieme di misura nulla). \square

La seconda parte del teorema 4.4 discende invece dal seguente risultato generale.

Teorema 4.6. *Sia $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e limitata. Se il limite radiale*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} g(re^{i\theta})$$

esiste ed è costantemente uguale ad un valore c_0 al variare di θ in un insieme $E \subseteq [0, 2\pi]$ che ha misura di Lebesgue positiva, allora $g \equiv c_0$ su tutto Δ .

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, assumiamo che $c_0 = 0$ e che $g(\Delta) \subseteq \Delta$. Sia $E(\varepsilon, \delta)$ l'insieme misurabile

$$E(\varepsilon, \delta) := \{\theta \in E \mid |g(re^{i\theta})| < \varepsilon \text{ quando } 1 - \delta < r < 1\}.$$

È evidente che, fissato ε , gli insiemi $E(\varepsilon, \delta)$ formano una famiglia annidata la cui unione è uguale ad E ; detta μ la misura di Lebesgue su $[0, 2\pi]$, abbiamo quindi che $\mu(E(\varepsilon, \delta))$ tende a $\mu(E)$ quando $\delta \rightarrow 0$. In particolare, fissato ε , possiamo scegliere δ tale che $\mu(E(\varepsilon, \delta)) > \mu(E)/2$.

Consideriamo adesso la media

$$M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta$$

per qualche fissato $r > 1 - \delta$. Un teorema dovuto a Jensen ci dice che $M(r)$ è una funzione monotona crescente in r , quindi converge a un limite finito oppure diverge a $+\infty$ per $r \rightarrow 1^-$. (Si veda [1], teorema A.1 a pagina 219.) Nel nostro caso, $|g(z)| < 1$ per ogni $z \in \Delta$ e quindi $\log |g(re^{i\theta})| < 0$ ovunque, ed in particolare è minore di $\log(\varepsilon)$ su un insieme $E(\varepsilon, \delta)$ di misura maggiore di $\mu(E)/2$. Quindi

$$2\pi M(r) < \log(\varepsilon)\mu(E)/2$$

quando r è sufficientemente vicino ad 1. Ma per l'arbitrarietà di ε , questo porterebbe ad avere $M(r) \rightarrow -\infty$ per $r \rightarrow 1^-$, in contraddizione con il teorema di Jensen citato sopra, a meno che g non sia identicamente nulla. \square

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il teorema 4.4.

Dimostrazione del teorema 4.4. Per quanto visto nelle sezioni precedenti, si ha un biolomorfismo $\psi : \Delta \rightarrow \mathcal{A}(\infty)$. Consideriamo la mappa esponenziale $\exp : \mathbb{H} \rightarrow \Delta \setminus \{0\}$, dove \mathbb{H} è il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}$. Il raggio R_t , quindi, è $(\varphi \circ \exp)(S_t)$, dove $S_t \subset \mathbb{H}$ è la semiretta orizzontale $\{z \in \mathbb{H} \mid \Im(z) = t\}$.

Visto che siamo interessati al comportamento di S_t per $\Re(z) \rightarrow 0$, possiamo limitarci a studiare $\tilde{S}_t := S_t \cap I^2$, dove I^2 è il quadrato $\{x + iy \mid -2\pi < x < 0, 0 \leq y < 2\pi\}$. Su tale quadrato rimontiamo la metrica sferica, in modo che la sua area sia sicuramente minore dell'area della sfera (che vale 4π).

Ma a questo punto, abbiamo finito: i segmenti \tilde{S}_t hanno lunghezza finita per quasi ogni t (per il lemma 4.5), quindi per quasi ogni t esiste il limite per $\Re(z) \rightarrow 0$. Più precisamente: sia L la lunghezza del segmento, e supponiamo di parametrizzare il segmento per lunghezza d'arco tramite $\gamma : (0, L) \rightarrow I^2$. Certamente esiste una successione di tempi $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $\tau_n \rightarrow L$ per $n \rightarrow \infty$, per cui la successione $\gamma(\tau_n)$ converga a un punto p ; mostriamo che una qualsiasi altra siffatta successione di tempi $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vi converge. Ora, dato che L è finita, si ha ovviamente che la successione $(\tau_n - s_n)$ tende a 0, così come la distanza tra $\gamma(\tau_n)$ e $\gamma(s_n)$ (che può essere maggiorata con $|\tau_n - s_n|$, dato che γ è parametrizzata per lunghezza d'arco). Quindi anche la distanza tra $\gamma(s_n)$ e p può essere resa piccola a piacere, usando la disuguaglianza triangolare con $\gamma(\tau_n)$.

La seconda parte del teorema 4.4 discenderebbe direttamente dal teorema 4.6 applicato a ψ se l'immagine $\psi(\Delta) = \mathcal{A}(\infty)$ fosse limitata in \mathbb{C} , la qual cosa è evidentemente falsa. Se l'insieme di Julia riempito $\mathcal{K} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}(\infty)$ ha parte interna non vuota, e quindi esiste $z_0 \notin \psi(\Delta)$ che abbia un intorno tutto contenuto nel complementare di $\psi(\Delta)$, ci poniamo nelle ipotesi del teorema 4.6 componendo ψ con un automorfismo della sfera di Riemann che mandi z_0 nel punto all'infinito. In generale, comunque, esistono almeno due punti non appartenenti a $\psi(\Delta)$: in caso contrario, infatti, essendo ψ un biolomorfismo sulla sua immagine, si otterrebbe un biolomorfismo tra il disco Δ e l'intero piano complesso, in contraddizione (ad esempio) con il Teorema di Liouville. A meno di comporre con un automorfismo di $\widehat{\mathbb{C}}$, supponiamo che i due punti non contenuti in $\psi(\Delta)$ siano 0 e ∞ . In questo caso può essere ben definita la mappa

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : \Delta &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sqrt{\psi(z)} \end{aligned}$$

scegliendo una determinazione della radice quadrata: questo ha senso perché l'immagine di ψ è semplicemente connessa (essendo biolomorfa a Δ) e contenuta in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tale mappa manda curve di lunghezza sferica finita in curve di lunghezza sferica finita, e $\mathbb{C} \setminus \tilde{\psi}(\Delta)$ contiene un intero aperto: ci siamo dunque ricondotti al caso precedente. \square

È possibile dare una più precisa caratterizzazione delle condizioni sotto le quali *tutti* i raggi atterrano. Per la sua dimostrazione è necessario introdurre ulteriori strumenti con cui studiare localmente gli insiemi di Julia; ciò andrebbe ad appesantire troppo l'esposizione, pertanto forniremo soltanto l'enunciato.

Teorema 4.7 (Criterio di atterraggio). *Per una funzione f per la quale l'insieme di Julia sia connesso, le seguenti sono equivalenti:*

1. ogni raggio esterno R_t atterra su un punto $\gamma(t)$, che dipende in modo continuo dall'angolo t ;
2. l'insieme di Julia \mathcal{J} è localmente connesso;
3. l'insieme di Julia riempito \mathcal{K} è localmente connesso;
4. l'inversa della mappa di Böttcher $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ si estende in modo continuo su $\partial\Delta$, e questa estensione manda $e^{2\pi it} \in \partial\Delta$ in $\gamma(t) \in \mathcal{J}$.

Quando una delle condizioni è soddisfatta (e quindi lo sono tutte), la mappa γ risulta ben definita come applicazione $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{J}$, e verifica $\gamma(nt) = f(\gamma(t))$.

Osservazione. Potrebbe capitare che tutti i raggi atterrino anche se l'insieme \mathcal{K} non è localmente connesso. Naturalmente, in questo caso la funzione $t \mapsto \gamma(t)$ non risulta continua.

Riferimenti bibliografici

- [1] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*, volume 160 di *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, terza edizione, 2006.