# Guida Galattica per gli Analisti
## (come sopravvivere ai mostri di Analisi $2^+$)

Rocca Andrea e Sgubin Alessio

Lezioni di Pietro Majer e Nicola Visciglia - AA 2021-2022
Aggiornato al: 27 agosto 2022

# Indice

# Prefazione

L'universo di Analisi Matematica 2 è meraviglioso ma al contempo bisogna fare attenzione. Riportiamo a tal proposito una citazione del nostro mentore, grande esperto dei viaggi intergalattici:

*"Detta così sembra che da una variabile a spazi di Banach tutto funziona un po' uguale. In parte è vero e bisogna riconoscere quello che funziona senza fatica, però poi si capisce che una funzione a più variabili, già in due variabili, può essere piuttosto complicata. Se uno è costretto a scendere lì è come nei... capito... Un conto è quando con l'astronave fiuuuuuuu uno guarda dall'alto un pianetino, allora siamo tutti bravi poi se invece bisogna scendere dove ci sono ahhhhh mostri orrendi no, giusto, quindi questo per dire che in generale e quando uno scende..."*

Siamo consapevoli che un esploratore dilettante potrebbe ora spaventarsi quindi ricordate: DON'T PANIC, anche gli autori della Guida Galattica per Analisti sono impanicati.
Il nostro team di scrittori scelti (poveracci capitati a caso al corso Analisi Matematica 2 dell'UniPi) è stato incaricato di descrivere i pianeti, i pericoli e le meraviglie di quest'universo, sotto l'illuminante guida dei professori Pietro Majer e Nicola Visciglia.
A soccorrerli, i compagni di corso che con correzioni e annotazioni hanno portato alla luce le trappole più infami di quest'universo e vi garantiranno la sopravvivenza in questa avventura.
Non ci resta quindi che augurarvi... BUON VIAGGO!

# Capitolo 1

# Spazi e Strutture

## 1.1 Strutture di Spazi

### 1.1.1 Spazio Topologico

**Definizione 1.1.1 - Spazio Topologico**
Uno spazio topologico è una coppia $(X, \tau)$, dove $X$ insieme e $\tau$ famiglia di sottoinsiemi di $X$ con le proprietà:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
3. Data una famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ si ha $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$

**Definizione 1.1.2 - Spazio di Hausdorff**
Uno spazio di Hausdorff è uno spazio topologico $(X, \tau)$ per cui:

$$\forall\, x, y \in X, x \neq y \quad \exists\, A, B \in \tau \text{ tale che } A \cap B = \emptyset : \quad x \in A, y \in B$$

**Definizione 1.1.3 - Aperto e Chiuso**
Sia $(X, \tau)$ spazio topologico. Allora:

- $A \in \tau$ si dice aperto della topologia.
- $C \subseteq X$ tale che $X \setminus C \in \tau$ si dice chiuso della topologia.

**Definizione 1.1.4 - Parte Interna**
Sia $(X, d)$ spazio metrico con $S \subseteq X$. Allora il massimo aperto tra gli inclusi in $S$ è la parte interna di $S$. In particolare:

$$int(S) = \overset{\circ}{S} = \bigcup_{A \subseteq S \ aperto} A$$

**Definizione 1.1.5 - Chiusura**
Sia $(X,\tau)$ spazio topologico con $S \subseteq X$. Allora il minimo chiuso tra quelli che contengono $S$ è la chiusura di $S$. In particolare:

$$\bar{S} = \bigcap_{C \supseteq S \; chiuso} C$$

**Definizione 1.1.6 - Denso**
Sia $(X,\tau)$ spazio topologico con $S \subseteq X$. $S$ si definisce denso se $\bar{S} = X$.

**Definizione 1.1.7 - Intorno**
Sia $(X,\tau)$ spazio topologico con $U \subseteq X$ e $x \in X$. $U$ è un intorno di $x$ se $\exists A \in \tau$ tale che $x \in A \subseteq U$.

*Osservazione 1.1.1 - Caratterizzazione Aperti*
Sia $(X,\tau)$ spazio topologico. Posso caratterizzare gli aperti:

$$A \in \tau \Leftrightarrow A \text{ è intorno di ogni suo punto}$$

**Definizione 1.1.8 - Sottospazio Topologico**
Sia $(X,\tau_X)$ spazio topologico con $Y \subseteq X$. $Y$ è spazio topologico con la topologia di sottospazio:

$$\tau_Y = \{A \cap Y \mid A \; aperto \; di \; X\}$$

**Definizione 1.1.9 - Finezza**
Siano $\tau_1$ e $\tau_2$ topologie dello stesso insieme $X$. $\tau_1$ si dice più fine di $\tau_2$ se e solo se $\tau_1 \supseteq \tau_2$.

**Definizione 1.1.10 - Base di una Topologia**
Sia $(X,\tau)$ uno spazio topologico. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ è una base della topologia se:

$$\forall A \in \tau \; \exists \, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} : \quad A = \bigcup_{F \in \mathcal{B}'} F$$

**Definizione 1.1.11 - Prodotto di Topologie**
Siano $(X_1,\tau_1)$ e $(X_2,\tau_2)$ spazi topologici. La topologia prodotto è l'insieme $X_1 \times X_2$ con la topologia definita:

1. come la topologia meno fine che rende le proiezioni $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ e $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ continue.

2. date $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di $X_1$ e $X_2$ rispettivamente,

$$\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

è una base della topologia.

**Definizione 1.1.12 - Connessione**
Sia $X$ spazio topologico. Allora:

- $X$ non è connesso $\Leftrightarrow \exists\, A_1, A_2$ aperti non vuoti disgiunti tali che:

$$A_1 \cup A_2 = X$$

- $X$ è connesso $\Leftrightarrow$ $X$ e $\emptyset$ sono gli unici chiusi e aperti
- $X$ normato è connesso $\Leftrightarrow$ $X$ è connesso per spezzate

### 1.1.2 Spazio Metrico

**Definizione 1.1.13 - Spazio Metrico**
Uno spazio metrico è una coppia $(X, d)$ dove $X$ è un insieme e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è una funzione distanza tale che:

1. $\forall x, y \in X : \quad d(x, y) \geq 0 \quad e \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X : \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X : \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Definizione 1.1.14 - Palla Aperta**
Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Siano $x \in X$ e $r \in [0; +\infty[$, allora la palla aperta di centro $x$ e raggio $r$ è:

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

**Definizione 1.1.15 - Aperto Metrico**
Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Sia $A \subseteq X$. $A$ si definisce aperto metrico per $(X, d)$ se:

$$\forall x \in A\, \exists\, \varepsilon > 0 \mid B(x, \varepsilon) \subseteq A$$

**Definizione 1.1.16 - Sottospazio Metrico**
Sia $(X, d_X)$ spazio metrico. Sia $Y \subseteq X$. Allora $(Y, d_Y)$ è sottospazio metrico di $(X, d_X)$ dove la distanza $d_Y = d_X|_{Y \times Y}$.

### 1.1.3 Spazio Normato

**Definizione 1.1.17 - Seminorma**
Sia $V$ spazio vettoriale. Una sua seminorma è una funzione $\|\cdot\| : V \to [0; +\infty[$ tale che:

1. $\|\cdot\|$ positivamente omogenea. $\forall x \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$:
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$
2. $\|\cdot\|$ subadditiva. $\forall x, y \in V$:
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Definizione 1.1.18 - Norma e Spazio Normato**
Sia $V$ uno spazio vettoriale con una seminorma $\|\cdot\|$. Allora $\|\cdot\|$ è una norma se:
$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$
In questo caso, $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato.

**Definizione 1.1.19 - Prodotto Scalare**
Un prodotto scalare per lo spazio vettoriale $V$ è una funzione $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ che sia:

- simmetrica: $\forall x, y \in V : \quad \phi(x,y) = \phi(y,x)$
- bilineare: $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:
$$\phi(x_1 + \lambda x_2, y_1) = \phi(x_1, y_1) + \lambda\phi(x_2, y_1)$$
$$\phi(x_1, y_1 + \lambda y_2) = \phi(x_1, y_1) + \lambda\phi(x_1, y_2)$$
- positiva: $\forall x \in X : \quad \phi(x,x) \geq 0$

**Definizione 1.1.20 - Finezza**
Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ norme di uno spazio vettoriale $E$.
Allora sono equivalenti:

1. $\|\cdot\|_1$ è più fine di $\|\cdot\|_2$
2. $id : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ è continua[1]
3. $\exists\, c \leq 0$ tale che $\|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1 \quad \forall x \in E$

[1] Vedere la Definizione 1.4.2.

## 1.2 Proprietà di Spazi

### 1.2.1 Rapporto tra topologici, metrici e normati

**Proposizione 1.2.1 - Metrico è Topologico**
*Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. $X$ è in modo naturale uno spazio topologico con gli aperti definiti dalla metrica.*

**Proposizione 1.2.2 - Normato è Metrico**
*Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. $V$ è in modo naturale uno spazio metrico con la distanza:*

$$\forall x, y \in V : \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

### 1.2.2 Caratterizzazione Sequenziale tra topologici e metrici

Sia $(X, d)$ spazio metrico. Si possono definire nozioni topologiche in spazi metrici tramite una caratterizzazione sequenziale. In particolare:

| Definizione | Spazio Topologico | Spazio Metrico |
|---|---|---|
| $C$ chiuso | $X \setminus C$ aperto | $\forall \{x_k\} \subseteq C$ convergente a $x \in X$ allora $x \in C$ |
| $x \in \bar{S}$ | $\forall U$ intorno di $x$ vale $U \cap S \neq \emptyset$ | $\exists \{x_k\} \subseteq S$ tale che $x_k \to x$ |
| $f$ continua in $x$ | $\forall U$ intorno di $f(x)$ $\exists V$ intorno di $x$: $f(V) \subseteq U$ | $\forall \{x_k\}$ convergenti a $x$ allora $f(x_k) \to f(x)$ |
| $X$ compatto | $\forall$ ricoprimento aperto di $X$ $\exists$ sottoricoprimento finito | $\forall \{x_k\} \subseteq X$ convergente $\exists$ sottosuccessione convergente |

### 1.2.3 Completezza

**Definizione 1.2.1 - Successione di Cauchy**
Sia $(X, d)$ spazio metrico. Una successione $\{x_n\} \in X$ è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall p, q > N \quad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

**Proposizione 1.2.3 - Proprietà delle Successioni di Cauchy**
*Valgono le seguenti proprietà:*

1. *$\{x_n\}$ converge $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ è di Cauchy.*
2. *$\{x_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ è limitata.*

3. *$\{x_n\}$ è di Cauchy e ha sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ converge, allo stesso limite di $\{x_{n_k}\}$.*

4. *$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ è uniformemente continua e $\{x_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow \{f(x_n)\}$ è di Cauchy in $Y$.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo le proprietà in ordine.

1. Sia $\{x_n\}$ successione convergente, $x_n \to x$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, per definizione di limite per una successione, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n > N$.
   Allora per tale $N$ vale che: $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Cioè la successione è di Cauchy.

2. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy. Allora per $\varepsilon = 1$ per definizione esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:
   $$\forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon = 1$$
   Ciò significa che dato il numero reale $R = max\big(\{d(x_N, x_k) \mid 0 \leq k < N\} \cup \{1\}\big)$ vale:

   - per ogni $k < N$: $x_k \in \overline{B}(x_N, R)$ per scelta di $R$ come distanza massima dei primi $N$ elementi della successione da $x_N$
   - per ogni $n \geq N$: $x_n \in B(x_N, 1) \subseteq \overline{B}(x_N, R)$ per la proprietà di successione di Cauchy

   e segue che $\{x_n\} \subseteq \overline{B}(x_N, R)$ cioè la successione è limitata.

3. Dimostro che se $x_{n_k} \to \bar{x}$ per $k \to +\infty$, allora $x_n \to \bar{x}$ per $n \to +\infty$. Infatti dato $\varepsilon > 0$, esistono:

   - $K \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n_k > K$
   - $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n, m > N$

   da cui prendendo il massimo $M = max\{K, N\}$ vale: per ogni $n > M$ e per $n_k > N$:
   $$d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x}) < \varepsilon$$

4. Nelle ipotesi della proprietà, sia $\varepsilon > 0$. Considero $\eta > 0$ tale che $\omega(\eta) < \varepsilon$. Tale numero esiste perchè $\omega$ è infinitesima in 0. Allora per definizione di successione di Cauchy esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \eta$ per ogni $n, m > N$. Allora per ogni $h, k > N$ vale:
   $$d(f(x_h), f(x_k)) < \omega\big(d(x_n, x_y)\big) < \omega(\eta) < \varepsilon$$
   da cui la tesi.

■

**Definizione 1.2.2 - Spazio Metrico Completo**
Uno spazio metrico $(X, d)$ è completo se tutte le successioni di Cauchy in $X$ convergono.

**Definizione 1.2.3 - Spazio di Banach**
Uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ che sia completo come spazio metrico, è detto spazio di Banach.

**Proposizione 1.2.4 - Proprietà della Completezza**
*Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se* $(X, d)$ *è spazio metrico compatto, allora è completo*
2. $(X_1, d_1)$ *e* $(X_2, d_2)$ *sono spazi metrici completi* $\Leftrightarrow$ $X_1 \times X_2$ *è spazio metrico completo*
3. *Siano* $(X, d)$ *è spazio metrico completo e* $Y \subseteq X$*. Allora:* $Y$ *chiuso* $\Leftrightarrow$ $Y$ *è sottospazio metrico completo*
4. *Siano* $S$ *un insieme e* $(E, \|\cdot\|)$ *spazio di Banach.*
   *Allora* $\mathcal{B}(S, E) = \{f : S \to E \mid \|f\|_{\infty,S} < +\infty\}$ *è completo*

*Dimostrazione.* Dimostriamo le proprietà in ordine.

1. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ successione di Cauchy.
   Dato che $X$ è compatto, per la Caratterizzazione 1.2.2 vale che $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione convergente. Allora per la Proprietà 3, la successione $\{x_n\}$ converge allo stesso limite della sottosuccessione convergente.
   Dunque, valendo la proprietà per tutte le successioni di Cauchy, $X$ è completo.
2. Per definizione di distanza prodotto[2], si deduce subito che:

   $$\{(x_n, y_n)\} \subseteq X_1 \times X_2 \text{ di Cauchy} \Leftrightarrow \{x_n\} \subseteq X_1 \text{ e } \{y_n\} \subseteq X_2 \text{ di Cauchy}$$

   Ma allora, se $X_1$ e $X_2$ completi, allora per $n \to +\infty$:

   $$\begin{cases} x_n \to \bar{x} \in X_1 \\ y_n \to \bar{y} \in X_2 \end{cases}$$

[2] La distanza prodotto si può scegliere tra le distanze prodotto già note, tra di loro equivalenti.

Segue banalmente che $(x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y})$ per $n \to +\infty$. Analogamente per l'implicazione opposta.

3. Usiamo la Caratterizzazione di chiuso 1.2.2.
($\Rightarrow$) Se $Y$ è chiuso, allora per caratterizzazione di chiuso se una successione $\{x_n\} \subseteq Y$ converge a $\bar{x} \in X$, allora $\bar{x} \in Y$. Presa una successione di Cauchy di $Y$, essa è di Cauchy in $X$ completo. Allora, convergendo in $X$, converge nel sottospazio $Y$.
($\Leftarrow$) Sia $Y$ completo. Allora, se $\{x_n\} \in Y$ è convergente in $X$ completo, è anche di Cauchy in $X$ (quindi in $Y$). Per completezza di $Y$, allora $x_n \to \bar{x} \in Y$. Il sottospazio $Y$ verifica la caratterizzazione di chiuso.

4. Useremo la Proposizione 1.2.5. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{B}(S, E)$ successione di funzioni tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. Proviamo allora che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge rispetto a $\|\cdot\|_{\infty,S}$.
Considerando la convergenza puntuale, costruiamo $F \in \mathcal{B}(S, E)$ a cui la somma convergerà. In particolare per ogni $x \in S$ si osserva che $\|f_n(x)\|_E \leq \|f_n\|_{\infty,S}$, quindi la seguente serie converge assolutamente in $E$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = F(x)$$
Definendo con questo metodo la funzione $F$ in ogni punto di $S$, dimostriamo che appartiene a $\mathcal{B}(S, E)$:
$$\|F(x)\|_{\infty,S} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n(x)\|_E \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\| < +\infty$$
Resta da dimostrare usando la norma $\|\cdot\|_{\infty,S}$ che:
$$\sum_{k=0}^{n} f_n \to F \quad \textit{per } n \to +\infty$$
Si vede in particolare che:
$$\|F - \sum_{k=0}^{n} f_k\|_\infty = \|\sum_{k>n} f_k\|_\infty \leq \sum_{k>n} \|f_k\| = o(1)$$
per $n \to +\infty$ in quanto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ converge in $E$.
Dunque per ogni successione convergente in $\mathcal{B}(S, E)$, il limite sta in $\mathcal{B}(S, E)$ quindi lo spazio è completo.

■

**Lemma 1.2.1 - Convergenza per Serie**
*Sia $E$ spazio vettoriale. Ogni $\{x_n\} \subseteq E$ si può scrivere:*

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)$$

*Allora vale che:*

$$\{x_n\} \text{ è convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{i=0}^{+\infty} x_n \text{ è convergente}$$

*Dimostrazione.* Banalmente, data la scrittura in somma di $x_n$, valgono l'implicazione doppia: se il termine a sinistra converge, lo fa quello a destra e viceversa. ■

**Proposizione 1.2.5 - Completezza per Serie**
*Sia $(E, \|\cdot\|)$ spazio normato. E' completo se e solo se ogni serie $\sum_{i=0}^{+\infty} x_n$ assolutamente (normalmente) convergente è convergente.*

*Dimostrazione.* Dimostro le due implicazioni separatamente.
($\Rightarrow$) Sia $E$ uno spazio normato completo e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ assolutamente convergente.
Considerando le somme parziali assoluta e non:

$$\begin{cases} \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_n\| \\ s_n = \sum_{k=0}^{n} x_n \end{cases}$$

dalla convergenza assoluta si sa che $\sigma_n$ converge in $\mathbb{R}$ completo, quindi $\{\sigma_n\}$ di Cauchy.
Ne segue che anche $\{s_n\}$ è di Cauchy. Infatti siano $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che $|\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon$ per ogni $p > q > N$. Allora:

$$\|s_p - s_q\| = \|\sum_{k=q+1}^{p} x_k\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|x_k\| = |\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon$$

cioè la definizione di successione di Cauchy. Essendo $\{s_n\}$ di Cauchy in $E$ completo, è convergente.
($\Leftarrow$) Sia $E$ uno spazio normato tale che ogni serie assolutamente convergente, converge. Proviamo che $E$ è completo.
Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy, provo che essa converge in $E$. Essendo di Cauchy, in particolare posso considerare una successione di indici $n_0 < n_1 < n_2 < ...$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$$

Per costruire questa successione, basta considerare $\varepsilon_k = 2^{-k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per definizione di successione di Cauchy, prendo $n_k$ tale che per ogni $p > n_k$:

$$\|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon_k$$

Tali $n_k$ sono la successione cercata. A questo punto:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} = 2 < +\infty$$

cioè la serie converge assolutamente.
Per le ipotesi su $E$, allora la serie converge semplicemente e per il Lemma 1.2.1, anche la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ converge. Dato che $\{x_n\}$ di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, converge in $E$. ■

**Proposizione 1.2.6 - Condizione per Completezza in Lineari**
*Siano $E, F$ spazi normati, sia in particolare $F$ completo. Allora $\mathcal{L}(E, F)$ è completo.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la palla $B = \overline{B_E(0,1)}$ e la mappa restrizione:

$$\begin{gathered} j : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{B}(B, F) \\ T \to T|_B \end{gathered}$$

Tale mappa $j$ è lineare iniettiva e isometria con l'immagine (immersione isometrica):

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|T\|_{\infty,B}$$

Se dimostro che $Im(j)$ è un chiuso di $\mathcal{B}(B, F)$ (spazio completo per la Proposizione 4), allora $Im(j)$ è completo, quindi per isometria $\mathcal{L}(E, F)$ è completo.
Sia in particolare $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ una successione di mappe lineari tale che:

$$j(T_n) = T_n|_B \overset{uniformemente}{\longrightarrow} f$$

dove $f \in \mathcal{B}(B, F)$. Dimostro che $f \in Im(j)$.
Definiamo la mappa:

$$T(x) = \|x\| \cdot f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)$$

e verifico che è lineare e controimmagine di $f$ tramite $j$.

- $T$ è lineare in quanto per $x, y \in E$ e per $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$T(\alpha x) = \|\alpha x\| \cdot f\Big(\frac{\alpha x}{\|\alpha x\|}\Big) = \alpha\|x\| \cdot f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) = \alpha T(x)$$

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= \|x+y\| \cdot f\Big(\frac{x+y}{\|x+y\|}\Big) = \lim_{n\to\infty} \|x+y\| \cdot T_n|_B\Big(\frac{x+y}{\|x+y\|}\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \|x+y\| \cdot T_n\Big(\frac{x+y}{\|x+y\|}\Big) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) + T_n(y) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \|x\| \cdot T_n\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) + \|y\| \cdot T_n\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \|x\| \cdot T_n|_B\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) + \|y\| \cdot T_n|_B\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) \\
&= \|x\| f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) + \|y\| f\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) = T(x) + T(y)
\end{aligned}$$

- $j(T) = f$ infatti per ogni $x \in B$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to+\infty} T_n|_B(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \|x\| \cdot T_n\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \|x\| \cdot f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) = T(x) = T|_B(x) = j(T)(x)
\end{aligned}$$

per cui effettivamente $f \in Im(j)$, segue la tesi. ■

### 1.2.4 Compattezza

**Proprietà Topologiche**

**Definizione 1.2.4 - Compattezza (Heine-Borel)**
Sia $X$ spazio topologico. Allora $X$ è compatto se per ogni ricoprimento aperto di $X$, esite un sottoricoprimento finito.

**Definizione 1.2.5 - Numerabile Compattezza**
Sia $X$ spazio topologico. Allora $X$ ha la proprietà di numerabile compattezza se per ogni ricoprimento aperto numerabile di $X$, esite un sottoricoprimento finito.

**Definizione 1.2.6 - Proprietà di Lindelöf**
Sia $X$ spazio topologico. Allora $X$ ha la proprietà di Lindelöf se per ogni ricoprimento aperto di $X$, esite un sottoricoprimento numerabile.

**Definizione 1.2.7 - Proprietà di Bolzano-Weierstrass**
Sia $X$ uno spazio topologico.
Definisco $x \in X$ punto di accumulazione per $A \subseteq X$ se per ogni intorno $U$ di $x$ vale che $\big|U \cap A\big| \geq \aleph_0$.
Allora $X$ ha la proprietà di Bolzano-Weierstrass se ogni sottoinsieme infinito ha punti di accumulazione.

**Definizione 1.2.8 - Compattezza Sequenziale**
Sia $X$ spazio topologico. Allora $X$ è sequenzialmente compatto se ogni successione in $X$ ha sottosuccessioni convergenti.

**Definizione 1.2.9 - I-Numerabile ($A_1$)**
Sia $X$ spazio topologico. $X$ è I-numerabile se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

**Definizione 1.2.10 - II-Numerabile ($A_2$)**
Sia $X$ spazio topologico. $X$ è II-numerabile se ha una base numerabile per la sua topologia.

**Definizione 1.2.11 - Separabile**
Sia $X$ spazio topologico. $X$ è separabile se esiste un sottoinsieme denso numerabile.

### Proprietà Metriche

**Definizione 1.2.12 - Spazio Totalmente Limitato**
Sia $X$ uno spazio metrico. Allora $X$ è totalmente limitato se equivalentemente:

- $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di palle di raggio $\varepsilon$ che ricopre $X$:

$$X = \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i, \varepsilon)$$

- $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste una $\varepsilon$-rete finita[3].

### Compattezza in Metrici

**Lemma 1.2.2 - Equivalenza Proprietà**
*Sia $X$ uno spazio topologico. Allora sono equivalenti:*

- *$X$ compatto secondo Heine-Borel*
- *$X$ ha proprietà di Lindelöf e proprietà di numerabile compattezza*

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

**Lemma 1.2.3**
*Sia $X$ spazio topologico. Allora:*

[3] Una $\varepsilon$-rete corrisponde all'insieme dei centri $\{x_i\}$ delle palle di raggio $\varepsilon$ che ricoprono $X$ nella versione precedente della definizione.

- *X ha proprietà di Bolzano-Weierstrass*
- *X ha proprietà di numerabile compattezza*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Lemma 1.2.4**
*Sia X spazio topologico. Allora:*

$$\textit{Sequenziale compattezza} \Rightarrow \textit{Bolzano-Weierstrass}$$

*Se X è I-numerabile, allora:*

$$\textit{Sequenziale compattezza} \Leftarrow \textit{Bolzano-Weierstrass}$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Lemma 1.2.5**
*Sia X spazio topologico. Allora:*

$$\textit{II-numerabile} \Rightarrow \textit{Lindelöf e Separabilità}$$

*Sia X spazio metrico. Allora:*

$$\textit{Lindelöf} \Rightarrow \textit{Separabilità} \Rightarrow \textit{II-numerabile}$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Lemma 1.2.6**
*Sia X spazio metrico. Allora:*

1. *Bolzano-Weierstrass ⇒ Totale limitatezza ⇒ Separabile*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Teorema 1.2.1 - Compattezza in Metrici**
*Sia $(X, d)$ spazio metrico. Allora sono equivalenti:*

1. *Compattezza secondo Heine-Borel*
2. *Numerabile compattezza*
3. *Proprietà di Bolzano-Weierstrass*
4. *Compattezza sequenziale*
5. *Completezza e Totale limitatezza*

*Dimostrazione.* ———————— ■

## 1.3 Spazi più importanti

### 1.3.1 Spazio $\mathbb{R}^n$

**Definizione 1.3.1 - Prodotto Scalare Standard**
Un prodotto scalare è una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dove:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

**Proposizione 1.3.1 - Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**
*Sia $(\cdot, \cdot)$ prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$. Allora $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

*In particolare se $(\cdot, \cdot)$ è un prodotto scalare definito positivo:*

$$(x, y)^2 = (x, x) \cdot (y, y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

*Dimostrazione.* ―――――――――――――― ■

**Definizione 1.3.2 - Norma Standard**
Sia $\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale con prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si definisce la norma standard:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Definizione 1.3.3 - Norme Hölderiane**
Sia $\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale. Una classe di norme di $\mathbb{R}^n$ può essere definita per $1 \leq p \leq +\infty$:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < +\infty \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} & p = +\infty \end{cases}$$

**Teorema 1.3.1 - Equivalenza delle norme $\| \cdot \|_p$**
*Le norme $\| \cdot \|_p$ della Definizione 1.3.3 sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* ―――――――――――――― ■

**Proposizione 1.3.2 - Disuguaglianza di Hölder**
*Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $(\cdot, \cdot)$ un prodotto scalare. Allora $\forall p, q \in [1, +\infty]$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vale:*

$$|(x, y)| \leq \|x\|_p + \|y\|_q$$

*Dimostrazione.* ——————— ■

**Proposizione 1.3.3 - Disuguaglianza di Minkowski**
*Sia $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ un spazio normato. Allora $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

*Dimostrazione.* ——————— ■

*Osservazione 1.3.1*
Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in [1, +\infty]$, con $(\cdot,\cdot)$ prodotto scalare. Vale:

$$\|x\|_p = \max_{\|y\|_p \leq 1} (x, y) = \max_{y \neq 0} \frac{(x, y)}{\|y\|_p}$$

*Dimostrazione.* ——————— ■

### 1.3.2 Spazio delle Successioni

**Definizione 1.3.4 - Norma della Successione**
Sia $x = x_{i i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione. Allora definisco una classe di norme come:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < +\infty \\ \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i|\} & p = +\infty \end{cases}$$

**Definizione 1.3.5 - Spazio delle Successioni**
Definisco lo spazio delle successioni $\ell_p$ come:

$$\ell_p(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad | \quad \|x\|_p < +\infty\}$$

### 1.3.3 Spazio delle Lineari Continue

**Proposizione 1.3.4 - Caratterizzazioni Lineari Continue**
*Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ spazi normati. Sia $L : E \to F$ una mappa lineare.*
*Allora sono equivalenti:*

1. *$L$ limitata localmente in almeno un punto $x_0 \in E$*

2. *$L$ limitata sulla palla unitaria chiusa, cioè:*

$$\forall x \in E \mid \|x\|_E \leq 1 \quad \exists\, C \in \mathbb{R}^+ \mid \|Lx\|_F \leq C$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Definizione 1.3.6 - Spazio delle Lineari Continue**
Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ spazi normati. Definisco lo spazio normato delle lineari continue come l'insieme:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E,F) &= \{L : E \to F \textit{ lineari e continue}\} \\ &= \{L : E \to F \textit{ tale che } \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty\}\end{aligned}$$

dove (definita la palla $\bar{B} = \bar{B}_E(0,1)$) la norma è:

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|L|_{\bar{B}}\|_{\infty,\bar{B}} = \sup_{x\in\bar{B}} \|Lx\|$$

## 1.4 Continuità

**Definizione 1.4.1 - Continuità puntuale**
Siano $X, Y$ spazi topologici. La mappa $f : X \to Y$ si dice continua in $x_0 \in X$ se:

$$\forall\, U \text{ intorno di } f(x_0) \quad \exists\, V \text{ intorno di } x \text{ tale che } f(V) \subseteq U$$

**Definizione 1.4.2 - Continuità funzionale**
Siano $X, Y$ spazi topologici. La mappa $f : X \to Y$ si dice continua se equivalentemente:

- $f$ continua in ogni punto $x \in X$
- $\forall\, A$ aperto di $Y$, $f^{-1}(A)$ è aperto di $X$

**Proposizione 1.4.1 - Composizione di Continue**
*Composizione di funzioni continue è ancora continua.*

*Dimostrazione.* Siano $X, Y, Z$ spazi topologici. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni continue.
Voglio dimostrare che $g \circ f : X \to Z$ è continua. Sia $x_0 \in X$, definisco $y_0 = f(x_0)$ e poi $z_0 = g(y_0)$.
Per continuità di $g$ in $y_0$, per ogni $W \subseteq Z$ intorno di $z_0 = g(y_0)$ esiste $V \subseteq Y$ intorno di $y_0$ tale che $g(V) \subseteq W$. Inoltre, per continuità di $f$ in $x_0$, esiste un intorno $U \subseteq X$ di $x_0$ tale che $f(U) \subseteq V$.
Ma allora, per ogni $W$ intorno di $z_0$ esiste $U$ intorno di $x_0$ tale che $(g \circ f)(U) \subseteq g(V) \subseteq W$, cioè $g \circ f$ continua in $x_0$. ■

# Capitolo 2

# Teoremi su Spazi

## 2.1 Serie di Neumann

**Teorema 2.1.1 - Serie di Neumann**
*Siano* $(E, \|\cdot\|)$ *spazio di Banach e* $H \in \mathcal{L}(E)$ *tale che* $\|H\| < 1$. *Allora* $I - H$ *invertibile e vale che:*

$$(I - H)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^j$$

*Dimostrazione.* Si osserva subito che la serie geometrica $\sum_{j=0}^{+\infty} H^j$ è normalmente convergente.
Infatti, per submoltiplicatività della norma, $\|H^j\| \leq \|H\|^j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Allora si ottiene[1]:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|H^j\| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|H\|^j = \frac{1}{1 - \|H\|} < +\infty$$

Dato che lo spazio $\mathcal{L}(E)$ è completo, allora $\sum_{j=0}^{+\infty} H^j$ converge.
Ora, per continuità della funzione moltiplicazione a sinistra, posso fare il passaggio al limite:

$$\begin{aligned} H\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} H^j\Big) &= H\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} H^j\Big) = \lim_{n\to\infty} H \sum_{j=0}^{n} H^j \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} H^{j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^{j+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^j - I \end{aligned}$$

[1]Usiamo l'ipotesi $0 \leq \|H\| < 1$

da cui segue subito che:

$$(I-H)\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} H^j\Big) = I$$

Analogamente si dimostra che i due termini commutano. Dunque $I - H$ è invertibile con inversa:

$$(I-H)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} H^j$$

■

**Corollario 2.1.1.1 - Addendum a Serie di Neumann**
*Nelle ipotesi del Teorema 2.1.1, la condizione $\|H\| < 1$ non è necessaria. La tesi è vera se $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tale che $\|H^m\| < 1$.*

*Dimostrazione.* Dalla serie di Neumann segue subito che $I-H^m = \sum_{j=0}^{+\infty} H^{mj}$ è invertibile.
Inoltre vale il prodotto:

$$I - H^m = (I-M)\Big(\sum_{j=0}^{m-1} H^j\Big)$$

da cui si deduce che $I-H$ è invertibile (se il prodotto di 2 fattori è invertibile, allora i fattori sono invertibili per le formule del rango). Posso allora scrivere:

$$\begin{aligned}(I-H)^{-1} &= \Big(\sum_{j=0}^{m-1} H^j\Big)(I-H^m)^{-1} = \Big(\sum_{j=0}^{m-1} H^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} H^{mk}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{j=0}^{m-1} H^{mk+j}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n\end{aligned}$$

Resta da dimostrare che la sommatoria risultante converge. Ma (usando la notazione precedente dove $n = mk + j$):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \leq \sum_{0\leq k<\infty}\ \sum_{0\leq j<m} \|H^m\|^k\|H\|^j &= \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\|H^m\|^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m-1}\|H\|^j\Big)\\ = \frac{1}{1-\|H^m\|}\Big(\sum_{j=0}^{m-1}\|H\|^j\Big) &< +\infty\end{aligned}$$

per cui la serie converge in $\mathcal{L}(E)$ completo. ■

## 2.2 Teorema di Baire

**Teorema 2.2.1 - Teorema di Baire con Aperti**
*Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo. Siano $A_j \subseteq X$ una famiglia numerabile di aperti densi.*
*Allora $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$ è denso.*

**Teorema 2.2.2 - Teorema di Baire con Chiusi**
*Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo. Siano $F_j \subseteq X$ una famiglia numerabile di chiusi tali che $int(F_j) = \emptyset$.*
*Allora $int\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\Big) = \emptyset$.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il Teorema di Baire con i chiusi.
Supponiamo per assurdo che non sia vera la tesi, cioè in particolare che $int\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\Big) \neq \emptyset$. Allora per definizione di aperto in un metrico, esistono $x_0 \in X$ e $r_0 > 0$ tali che $B(x_0, r_0) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j$.
Per ipotesi, $int(F_1) = \emptyset$, quindi $B(x_0, r_0) \nsubseteq F_1$. Ne segue che esiste $x_1 \in B(x_0, r_0) \setminus F_1$. Essendo $F_1$ chiuso, esiste $r_1 > 0$ tale che la palla $B(x_1, r_1)$ ha le proprietà:

- $B(x_1, r_1) \cap F_1 = \emptyset$
- $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0)$
- $r_1 \leq \frac{r_0}{2}$[2]

Per le stesse ragioni, reitero la costruzione appena fatta per ogni indice $k \in \mathbb{N}$. Cioè trovo $x_k \in B(x_{k-1}, r_{k-1}) \setminus F_{k-1}$ e $r_k > 0$ tali che:

1. $B(x_k, r_k) \cap F_k = \emptyset$
2. $\overline{B(x_k, r_k)} \subseteq B(x_{k-1}, r_{k-1})$
3. $r_k \leq \frac{r_0}{2^k}$

Ora, osservo che le palle $B(x_k, r_k)$ sono incluse l'una nell'altra per costruzione (il punto 2). Ciò mi dice che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale che: $x_h \in B(x_k, r_k)$ per ogni $h \geq k$.
Segue che la successione dei centri $\{x_k\}$ è di Cauchy perchè:

$$d(x_h, x_k) < r_k \leq \frac{r_0}{2^k}$$

[2] Questa condizione servirà per ottenere la successione di Cauchy tramite i centri.

e in particolare per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{r_0}{2^k} < \varepsilon$.
Dato che $X$ è completo, segue che $x_k \to \bar{x}$ per $k \to +\infty$, con $\bar{x} \in X$.
Inoltre, essendo le code della successione $\{x_k\}$ contenute in ogni palla chiusa $\overline{B(x_k, r_k)}$ per costruzione, segue che $\bar{x} \in \overline{B(x_k, r_k)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Per il punto 1 e per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\bar{x} \in \overline{B(x_{k-1}, r_{k-1})} \subseteq B(x_k, r_k)$$

e dato che $B(x_k, r_k) \cap F_k = \emptyset$, $\bar{x} \ni F_k$ per ogni $k$.
Assurdo, perchè per ipotesi $\bar{x} \in B(x_0, r_0) \subseteq \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} F_j$. ■

## 2.3 Teoremi di Immersione

**Definizione 2.3.1 - Completamento**
Siano $(M,d)$ spazio metrico e $(\tilde{M},\tilde{d})$ spazio metrico completo.
La mappa $j:(M,d)\to(\tilde{M},\tilde{d})$ si dice completamento se $j$ è isometria e $j(M)$ denso in $\tilde{M}$.

**Teorema 2.3.1 - Immersione di Fréchet - Kuratowski**
*Ogni spazio metrico $(M,d)$ si immerge isometricamente in uno spazio di Banach $(E,\|\cdot\|)$. In particolare, $E=C_b(M)$.*

*Dimostrazione.* L'idea fondamentale è usare la funzione distanza $d$ per immergere $M$ nello spazio delle funzioni continue limitate $C_b(M)$.
Bisogna però distinguere 2 casi:

- M ha "diametro finito", ossia la funzione distanza è superiormente limitata. Allora basta considerare:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & M,d & \longrightarrow & C_b(M),\|\cdot\|_\infty \\ & x & \longmapsto & d(x,\cdot) \end{array}$$

  Dimostriamo che è un'immersione isometrica.
  E' iniettiva perchè se $d(x,\cdot)=d(y,\cdot)$, allora valutando in $y$ ottengo che:
  $$d(x,y)=d(y,y)=0 \quad\iff\quad x=y$$
  E' un'isometria in quanto:
  $$\|d(x,\cdot)-d(y,\cdot)\|_\infty = d(x,y)$$
  perchè per ogni $u\in M$ per disuguaglianza triangolare:
  $$\begin{cases} d(x,u)-d(y,u)\le d(x,y) \\ d(y,u)-d(x,u)\le d(x,y) \end{cases}$$
  per cui a sinistra posso considerare il valore assoluto e prendendo il $\sup_{u\in M}$ ottengo:
  $$\|d(x,\cdot)-d(y,\cdot)\|_\infty \le d(x,y)$$
  e in particolare per $u=x$ ho l'uguaglianza:
  $$\|d(x,\cdot)-d(y,\cdot)\|_\infty = d(x,y)$$

- $M$ non ha "diametro finito". Allora consideriamo per $x_0 \in M$ fissato:

$$\begin{array}{rccc} j_{x_0}: & M, d & \longrightarrow & C_b(M), \|\cdot\|_\infty \\ & x & \longmapsto & d(x,\cdot) - d(x_0,\cdot) \end{array}$$

  In particolare $j_{x_0}(x)$ è limitata per ogni $x \in M$ in quanto per il caso precedente:

$$\|j_{x_0}(x)\|_\infty = \|d(x,\cdot) - d(x_0,\cdot)\|_\infty \leq d(x, x_0)$$

  Ora si conclude con una dimostrazione analoga, in particolare l'isometria deriva dal fatto che:

$$\|j_{x_0}(x) - j_{x_0}(y)\|_\infty = \|d(x,\cdot) - d(y,\cdot)\|_\infty = d(x,y)$$

■

**Corollario 2.3.1.1**
*Ogni spazio metrico si include come sottoinsieme denso in uno spazio completo.*

**Teorema 2.3.2 - Estensione per densità di funzioni uniformemente continue**
*Siano $(X, d_x)$ spazio metrico e $(Y, d_y)$ spazio metrico completo. Sia $D \subseteq X$ denso ed $f : D \to Y$ uniformemente continua (con modulo $\omega$).*
*Allora $\exists!$ $F : X \to Y$ estensione continua di $f$. Inoltre, $F$ è uniformemente continua con modulo $\omega$.*

*Dimostrazione.* Definiamo $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$. Preso $x \in X \subseteq D$, consideriamo una successione $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tale che $d_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Allora si definisce $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F(d_n)$. Verifichiamo che:

- il limite esiste perchè $\{d_n\}$ converge, quindi è di Cauchy. Per continuità uniforme $\{F(d_n)\}$ è di Cauchy nello spazio $Y$ completo. Segue che il limite esiste.

- presa un'altra successione $\{d'_n\} \subset D$ che converge a $x$, considero la successione $\{d_1, d'_1, d_2, d'_2, \dots\}$. Essa converge sempre ad $x$. Ma allora $\{F(d_1), F(d'_1), F(d_2), F(d'_2), \dots\}$ è convergente e per unicità del limite segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} F(d_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F(d'_n)$.

- $F$ ha lo stesso modulo di continuità di $f$. Sia $\delta > 0$. Dati $x_0, x_1 \in X$ tali che $d(x_0, x_1) < \delta$, allora siano $\{d_n\}$ e $\{d'_n\}$ successioni in $D$ che convergono rispettivamente a $x_0$ e $x_1$. Allora osservo che (essendo tutte le successioni di Cauchy posso passare ai limiti delle distanze):

$$\begin{aligned} d(F(x_0), F(x_1)) &= d\left(\lim_{n\to+\infty} F(d_n), \lim_{n\to+\infty} F(d'_n)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} d\left(F(d_n), F(d'_n)\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \omega\left(d(d_n, d'_n)\right) \\ &= \omega(d(x_0, x_1)) \leq \omega(\delta) \end{aligned}$$

per cui $F$ ha modulo di continuità $\omega$.

■

**Teorema 2.3.3 - Unicità del Completamento**
*Sia $(M, d)$ spazio metrico. Esiste $j : (M, d) \to (\tilde{M}, \tilde{d})$ completamento di $M$ a $\tilde{M}$ spazio metrico completo.*
*Allora $j$ è unico a meno di isomorfismi.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Proposizione 2.3.1 - Estensione di normati**
*Sia $(E, \|\cdot\|)$ spazio normato. Essendo metrico, ha un completamento come spazio metrico $\tilde{E}$.*
*Allora estendendo la norma, $\tilde{E}$ è normato.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

## 2.4 Teorema di Mazur - Ulam

**Definizione 2.4.1 - Mappa Affine**
Siano $E, F$ spazi normati. Sia $f : E \to F$ una mappa, si dice affine se:

1. $f(x) = Lx + v \quad$ dove $v \in F$ e $L \in \mathcal{L}(E, F)$
2. $f(tx + (1-t)x') = tf(x) + (1-t)f(x')$ con $x, x' \in E$ e $t \in [0, 1]$
3. $f(\frac{x+x'}{2}) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x')$ con $x, x' \in E$

**Teorema 2.4.1 - Teorema di Mazur - Ulam**
*Siano $E, F$ spazi normati. Sia $f : E \to F$ isometria. Allora $f$ è affine.*

*Dimostrazione.* —————————— ∎

## 2.5 Teorema delle Contrazioni

**Definizione 2.5.1 - Contrazione**
Sia $(M, d)$ spazio metrico. Sia $T : (M, d) \to (M, d)$ una mappa $k$-Lipschitziana con $k < 1$.
Allora $T$ è una contrazione.

**Teorema 2.5.1 - Teorema delle Contrazioni**
*Sia $(M, d)$ spazio metrico non vuoto. Sia $T : (M, d) \to (M, d)$ una $k$-contrazione. Allora:*

1. *$T$ ha un unico punto fisso:* $\quad \exists! \bar{x} \in M : T(\bar{x}) = \bar{x}$
2. *$\forall x_0 \in M, x_n = T^n(x_0)$ converge a $\bar{x}$*

*Dimostrazione.* ——————————— ∎

**Corollario 2.5.1.1 - Stime di Convergenza**
*Segue dal Teorema 2.5.1 che:*

- $d(\bar{x}, x_n) \leq k^n d(\bar{x}, x_0)$
- $\forall x \in M \quad d(\bar{x}, x) \leq \frac{1}{1-k} d(x, T(x))$

*Dimostrazione.* ——————————— ∎

**Corollario 2.5.1.2 - Caso Affine**
*Sia $(E, \|\cdot\|)$ una spazio normato. Sia $T : E \to E$ con $T(x) = Lx + v$ contrazione affine, cioè $L \in \mathcal{L}(E), \|L\| < 1$ e $v \in E$.*
*Allora il punto fisso sarà $x = (I - L)^{-1} v$.*

*Dimostrazione.* ——————————— ∎

**Corollario 2.5.1.3 - Generalizzazione**
*Nelle ipotesi del Teorema 2.5.1, sia $T$ non una contrazione, ma $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $T^n$ contrazione.*
*Allora $T$ ha un unico punto fisso in $E$.*

*Dimostrazione.* ——————————— ∎

**Corollario 2.5.1.4**
*Nelle ipotesi del Teorema 2.5.1, sia $C \subseteq M$ un chiuso $T$-invariante (cioè $T(C) \subseteq C$) non vuoto, allora $\bar{x} \in C$.*

*Dimostrazione.* ——————————— ∎

**Teorema 2.5.2 - Teorema delle Perturbazioni Lipschitziane dell'identità**
*Sia* $(E, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach, sia* $A \subseteq E$ *un aperto.*
*Sia* $g : A \to E$ *k-Lipschitziana con* $k < 1$*. Allora la mappa* $f = id + g$ *verifica i fatti:*

1. $f(A)$ *aperto in E, localmente:* $\forall a \in A, \forall r > 0$ *tali che* $\bar{B}(a, r) \subseteq A$ *allora* $f(\bar{B}(a, r)) \supset \bar{B}(f(a), (1-k)r)$*.*

2. $f : A \to f(A)$ *è un omeomorfismo bilipschitziano, precisamente:*

$$lip(f) \leq 1 + k \quad e \quad lip(f^{-1}) \leq \tfrac{1}{1-k}$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

*Osservazione 2.5.1*
Nelle ipotesi del Teorema 2.5.2, se $A = E$ allora $f(A) = E$.

# Capitolo 3

# Calcolo Differenziale

## 3.1 Differenziale di Fréchet

### 3.1.1 Definizione

**Definizione 3.1.1 - Funzione infinitesima in $x_0$**
Siano $E, F$ spazi normati, sia $f : A \subseteq E \to F$. Si dice che $f$ è infinitesima in $x_0$ punto di accumulazione di $A$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

**Definizione 3.1.2 - o piccolo**
Siano $f, g : A \subseteq E \to F$.
Si scrive $f = o(g)$ per $x \to x_0$ quando $f(x) = \|g(x)\| \cdot o(1)$.

**Definizione 3.1.3 - Differenziabilità secondo Fréchet**
Siano $E, F$ spazi normati e $\Omega \subseteq E$ aperto, $x_0 \in \Omega$. Una funzione $f : \Omega \to F$ è differenziabile secondo Fréchet se e solo se $\exists L \in \mathcal{L}(E, F)$ :

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{3.1}$$

In particolare, se tale $L$ esiste, è unica.

**Definizione 3.1.4 - Differenziale di Fréchet**
Sia $f : \Omega \subseteq E \to F$ una funzione differenziabile in $x_0 \in \Omega$. Sia $L \in \mathcal{L}(E, F)$ come nella Definizione 3.1.3, esso si chiama differenziale di Fréchet e si indica: $Df(x_0)$

**Definizione 3.1.5 - Classe $C^k$**
Siano $E, F$ spazi normati e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $f : \Omega \to F$ differenziabile in

ogni punto $x \in \Omega$. E' ben definita:

$$\begin{aligned} Df : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\longmapsto Df(x) \end{aligned}$$

Allora $f$ si dice di classe $C^1$ se e solo se $Df$ è continua:

$$C^1(\Omega, F) = \{f : \Omega \to F \mid Df \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(E, F))\}$$

Per induzione, definisco:

$$C^k(\Omega, F) = \{f : \Omega \to F \mid Df \in C^{k-1}\}$$

### 3.1.2 Proprietà di Calcolo

**Proposizione 3.1.1 - Somma**
*Siano $E, F$ spazi normati e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \Omega$. Siano $f, g : \Omega \to F$ funzioni differenziabili in $x_0$.*
*Allora $f + \lambda g$ è differenziabile in $x_0$, con:*

$$D(f + \lambda g)(x_0) = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0) \tag{3.2}$$

*Dimostrazione.* Siano $f$ e $g$ come nelle ipotesi. Allora per $x \to x_0$:

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0) \\ g(x) = g(x_0) + M(x - x_0) + o(x - x_0) \end{cases}$$

Se considero la funzione $f + \lambda g$ ottengo lo sviluppo per $x \to x_0$:

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x) &= f(x) + \lambda g(x) \\ &= f(x_0) + L(x - x_0) + \lambda g(x_0) + \lambda M(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= (f + \lambda g)(x_0) + (L + \lambda M)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

da cui per definizione di differenziale ho proprio che:

$$D(f + \lambda g)(x_0) = L + \lambda M = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$$

∎

**Proposizione 3.1.2 - Composizione**
*Siano $E, F, G$ spazi normati e $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ aperti.*

- *$f : U \to F$ funzione differenziabile in $x_0 \in U$, dove $Im(f) \subseteq V$.*

- $g : V \to G$ *funzione differenziabile in* $y_0 = f(x_0) \in V$.

*Allora* $g \circ f$ *è differenziabile in* $x_0$, *con:*

$$D(f \circ g)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0) \tag{3.3}$$

*Dimostrazione.* Siano $f$ e $g$ come nelle ipotesi. Allora in $x_0 \in X$:

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0) \\ g(y) = g(y_0) + M(y - y_0) + o(y - y_0) \end{cases}$$

Se considero la funzione $g \circ f$ ottengo lo sviluppo per $x \to x_0$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\big(f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0)\big) \\ &= g(f(x_0)) + M\big(L(x - x_0) + o(x - x_0)\big) + o\big(L(x - x_0) + o(x - x_0)\big) \end{aligned}$$

In particolare, vedo che in norma:

$$\|M\big(o(x - x_0)\big)\| \leq \|M\| \cdot \|x - x_0\| \cdot o(1) \leq o(\|x - x_0\|)$$

e valutando l'ultimo termine:

$$\begin{aligned} \|o\big(L(x - x_0) + o(x - x_0)\big)\| &\leq \|L(x - x_0) + o(x - x_0)\| \cdot o(1) \\ &\leq \big|\|L\| \cdot \|x - x_0\| + \|x - x_0\| o(1)\big| \cdot o(1) \\ &\leq O(\|x - x_0\|) \cdot o(1) = o(\|x - x_0\|) \end{aligned}$$

allora concludo lo sviluppo iniziale:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + M\big(L(x - x_0) + o(x - x_0)\big) + o(x - x_0)$$

da cui la tesi. ■

**Proposizione 3.1.3 - Inversione**
*Siano* $E, F$ *spazi normati, siano* $U \subseteq E$ *e* $V \subseteq F$ *aperti. Sia* $f : U \to V$ *un omeomorfismo differenziabile in* $x_0 \in U$, *con* $Df(x_0)$ *invertibile con inversa continua.*
*Allora* $f^{-1} : V \to U$ *è differenziabile in* $y_0 = f(x_0)$, *con:*

$$Df^{-1}(y_o) = [Df(x_0)]^{-1} \tag{3.4}$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto, considero senza perdere generalità[1] $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$.
Allora posso scrivere lo sviluppo in $x_0 = 0$ come:

$$f(x) = Lx + \|x\| o(1) \qquad \textit{per } x \to 0$$

[1] Tramite una traslazione basterebbe considerare $\phi(x) = f(x - x_0) - f(x_0)$ che lascia il differenziale invariato

Inoltre, sia $g = f^{-1}$, denoto $y = f(x)$. Posso riscrivere lo sviluppo come:

$$y = Lg(y) + \|g(y)\|o(1) \qquad per^2\ y \to 0$$

Cioè applicando $L^{-1}$ da entrambi i lati:

$$g(y) = L^{-1}y + \|g(y)\|o(1) \qquad per\ y \to 0 \tag{3.5}$$

Per ottenere la formula della definizione di differenziale, resta da vedere che:

$$\|g(y)\|o(1) = \|y\|o(1) \qquad per\ y \to 0 \tag{3.6}$$

Basta dimostrare che $\|g(y)\| \leq C\|y\|$ dove $C \in \mathbb{R}$ costante. Dalla equazione 3.5, passando in norma:

$$\|g(y)\| = \left\| L^{-1}y + \|g(y)\|o(1) \right\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|y\| + \|g(y)\|o(1)$$

e manipolando la disuguaglianza, per $y \to 0$:

$$\|g(y)\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 + o(1)}\|y\| = O(1)\|y\| \longrightarrow C\|y\|$$

Allora, provata l'uguaglianza 3.6, posso scrivere:

$$\begin{aligned} g(y) &= L^{-1}y + \|g(y)\|o(1) \\ &= L^{-1}y + \|y\|o(1) \end{aligned}$$

cioè la tesi, in quanto $Dg(y) = L^{-1}$. ■

*Osservazione 3.1.1 - Differenziale di Lineare*
Siano $E, F$ spazi normati, $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Allora $L$ è differenziabile $\forall x_0 \in E$, in particolare $DL(x_0) = L$.

*Osservazione 3.1.2 - Differenziale in Spazi Prodotto*
Siano $E, F_1, F_2$ spazi normati, sia $U \subseteq E$ aperto e $x_0 \in U$. Sia $f : U \to F_1 \times F_2$, allora sono equivalenti:

- $f$ è differenziabile in $x_0$
- $\pi_{F_1} \circ f$ e $\pi_{F_2} \circ f$ sono differenziabili in $x_0$

In particolare, considerando la norma prodotto:

$$\|(v_1, v_2)\|_{F_1 \times F_2} = max\{\|v_1\|_{F_1}, \|v_2\|_{F_2}\}$$

sono linearmente isometrici gli spazi:

$$\mathcal{L}(E, F_1 \times F_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E, F_1) \times \mathcal{L}(E, F_2)$$

[2] So che $y \to 0$ in quanto $f$ è omeomorfismo per ipotesi.

## 3.2 Differenziale Parziale

**Definizione 3.2.1 - Derivata Direzionale**
Siano $E, F$ spazi normati con $\Omega \subseteq E$ e $x_0, v \in E$. Sia $f : \Omega \to F$.
Se esiste, la derivata su $t \in \mathbb{R}$ in 0 di $f(x_0 + tv)$ si dice derivata direzionale di $f$ in direzione $v$. Si indica:

$$\partial_v f(x_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0} \tag{3.7}$$

*Osservazione 3.2.1*
Nelle ipotesi della Definizione 3.2.1, se $f$ è differenziabile in $x_0$ allora:

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)[v]$$

**Definizione 3.2.2 - Derivata Parziale**
Sia $E$ spazio normato e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $f : \Omega \to E$. Le derivate direzionali lungo i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono le derivate parziali di $f$. Si indica $\forall i = 1, ..., n$:

$$\partial_i f(x) = \frac{d}{dt}(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)\Big|_{t=x_i} \tag{3.8}$$

**Definizione 3.2.3 - Gradiente**
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Allora il gradiente di $f$ è:

$$\nabla f(x) = grad(f(x)) = \Big(\partial_1 f(x), ..., \partial_n f(x)\Big) \tag{3.9}$$

**Proposizione 3.2.1**
*Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$. Allora data $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$:*

$$\partial_i f(x) = Df(x)[e_i]$$

*Inoltre, dato $v \in \mathbb{R}^n$ ho:*

$$Df(x)[v] = Df(x)\Big[\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \Big(v_i \cdot \partial_i f(x)\Big)$$

**Proposizione 3.2.2**
*Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$, vale che:*

$$Df(x)[v] = \Big(\nabla f(x) \cdot v\Big)$$

*Allora $Df(x)$ è una forma bilineare nel duale di $\mathbb{R}^n$.*

**Definizione 3.2.4 - Matrice Jacobiana**
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$. Allora $Df(x)$ è rappresentata da un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ chiamata matrice Jacobiana di $f$ in $x$, cioè:

$$J_f(x) = \Big[\partial_1 f(x) \mid \partial_2 f(x) \mid ... \mid \partial_n f(x)\Big]$$

**Definizione 3.2.5 - Differenziale Parziale**
Siano $E_1, E_2, F$ spazi normati, $\Omega \subseteq E_1 \times E_2$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$.
Data l'applicazione $f : \Omega \to F$, sia $x \mapsto f(\cdot, y_0)$ applicazione differenziabile in $x_0$. Tale differenziale è il differenziale parziale nella prima variabile:

$$D_1 f(x_0, y_0) = D[f(\cdot, y_0)](x_0)$$

Analogamente il differenziale parziale nella seconda variabile è:

$$D_2 f(x_0, y_0) = D[f(x_0, \cdot)](y_0)$$

*Osservazione 3.2.2*
Nelle ipotesi della Definizione 3.2.5, se $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$ allora $\forall h \in E_1, k \in E_2$:

$$D_1 f(x_0, y_0)[h] = Df(x_0, y_0)[(h, 0)]$$

$$D_2 f(x_0, y_0)[k] = Df(x_0, y_0)[(0, k)]$$

cioè:

$$Df(x_0, y_0)[(h, k)] = D_1 f(x_0, y_0)[h] + D_2 f(x_0, y_0)[k]$$

## 3.3 Teoremi sui Differenziali

**Teorema 3.3.1 - Teorema del Differenziale Totale**
*Siano* $E_1, E_2, F$ *spazi di Banach,* $\Omega \subseteq E_1 \times E_2$ *aperto e* $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Sia* $f : \Omega \to F$ *tale che:*

1. $\exists D_1 f(x_0, y_0)$

2. *per ogni* $(x, y) \in \Omega$ *esiste* $D_2 f(x, y)$ *e in particolare l'applicazione* $(x, y) \mapsto D_2 f(x, y)$ *è continua in* $(x_0, y_0)$

*Allora* $f$ *è differenziabile in* $(x_0, y_0)$ *e vale:*

$$Df(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \circ \pi_{E_1} + D_2 f(x_0, y_0) \circ \pi_{E_2}$$

*Dimostrazione.* Si osserva subito che posso scrivere la tesi $f$ differenziabile in $(x_0, y_0)$ come:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)[(h, k)] + o(\|(h, k)\|) \tag{3.10}$$

per $(h, k) \to (0, 0)$.
Per ipotesi ho che per $(h, k) \to (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0) &= f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)[h] + o(\|h\|) \\ f(x_0, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + D_2 f(x_0, y_0)[k] + o(\|k\|) \end{aligned}$$

Usiamo queste nozioni per ottenere[3] l'equazione 3.10:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)[(h, k)] = (*) = \\ & = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)[h] - D_2 f(x_0, y_0)[k] \\ & = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - \\ & \qquad - D_1 f(x_0, y_0)[h] - D_2 f(x_0, y_0)[k] \\ & = \big\{ f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - D_2 f(x_0, y_0)[k] \big\} + \big\{ f(x_0 + h, y_0) - \\ & \qquad - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)[h] \big\} \\ & = \big[ f(x_0 + h, y_0 + tk) - t D_2 f(x_0, y_0) k \big]_{t=0}^{t=1} + \big\{ f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - \\ & \qquad - D_1 f(x_0, y_0)[h] \big\} \end{aligned}$$

[3] Mi spiace tantissimo raga, ma se il Majer fa righe di formule chilometriche, LaTeX non ce la fa...

Passando alle norme:

$$\begin{aligned}\|(*)\| &\leq \Big\| \big[ f(x_0 + h, y_0 + tk) - tD_2 f(x_0, y_0)k \big]_{t=0}^{t=1} \Big\| + \Big\| f(x_0 + h, y_0) - \\ &\quad - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)[h] \Big\| \\ &\leq \sup_{0<t<1} \|D_2 f(x_0 + h, y_0 + tk)k - D_2 f(x_0, y_0)k\| + o(\|h\|) \\ &\leq \sup_{0<t<1} \|D_2 f(x_0 + h, y_0 + tk) - D_2 f(x_0, y_0)\| \cdot \|k\| + o(\|h\|) \\ &\leq o(\|h\| + \|k\|)\end{aligned}$$

cioè la tesi. ■

**Corollario 3.3.1.1**
*Nelle ipotesi del Teorema 3.3.1, vale che:*

$$D_1 f(x, y) \text{ e } D_2 f(x, y) \text{ sono continui} \quad \Leftrightarrow \quad f \in C^1(\Omega, F)$$

*Dimostrazione.* Le ipotesi del Teorema 3.3.1 sono verificate per ogni punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Quindi $f \in C^1$. ■

**Proposizione 3.3.1 - Interpretazioni di** $D^2 f(x)$
*Siano $E, F$ spazi normati. Siano $\Omega \subseteq E$ e $x_0 \in \Omega$. Sia $f : \Omega \to F$ differenziabile 2 volte in $x_0$.*
*Si possono dare diverse interpretazioni a $D^2 f(x_0)$: $\forall u, v \in E$:*

1. $D^2 f(x_0)[u, v] = \partial_t \, \partial_s f(x + tu + sv)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}$

2. $D^2 f(x_0)[u, v] = f(x+u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x) + o(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

*Dimostrazione.* Dimostriamo le due interpretazioni separatamente:

1. Per ogni $u, v \in E$ vale che per definizione:

$$\partial_s f(x + tu + sv) = D(x + tu + sv)[v]$$

quindi per valutare $s$ in 0:

$$\partial_s f(x + tu + sv)\Big|_{s=0} = Df(x + tu)[v]$$

Sostituendo allora:

$$\partial_t \big( \partial_s f(x + tu + sv) \big)\Big|_{s=0, t=0} = D(Df)(x)[u, v] = D^2 f(x)[u, v]$$

2. Considero la differenza, e vedo che è un $o(\|u\|^2 + \|v\|^2)$:

$$\begin{aligned}\big\|f(x{+}u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x) - D^2 f(x)[u,v]\big\| &= \\ = \big\|\big[f(x+u+tv) - f(x+tv) - tD^2 f(x)[u,v]\big]_{t=0}^{t=1}\big\| \\ \leq \sup_{0<t<1} \big\|\big(Df(x+u+tv) - Df(x+tv) - D(Df(x))[u]\big)v\big\| \\ \leq \sup_{0<t<1} \big\|Df(x+u+tv) - Df(x+tv) - D(Df)(x)u\big\| \cdot \|v\| \\ = \sup_{0<t<1} \big\|D(Df)(x)[u+tv] - D(Df)(x)[tv] - D(Df)(x)[u] + \\ + o(\|u\| + \|v\|)\big\| \cdot \|v\| \\ = o(\|u\| + \|v\|) \cdot \|v\| = o\big((\|u\| + \|v\|)^2\big)\end{aligned}$$

■

**Teorema 3.3.2 - Simmetria del Differenziale Secondo**
*Siano $E, F$ spazi normati. Siano $\Omega \subseteq E$ e $x_0 \in \Omega$. Sia $f : \Omega \to F$ differenziabile 2 volte in $x_0$.*
*Allora $D^2 f(x_0)$ è simmetrico[4]:*

$$\forall u, v \in E : \quad D^2 f(x_0)[u,v] = D^2 f(x_0)[v,u]$$

*Dimostrazione.* Per l'interpretazione 2 della Proposizione 3.3.1, si ha che per ogni $u, v \in E$, per $(u,v) \to (0,0)$ vale la proprietà:

$$D^2 f(x)[u,v] - D^2 f(x)[v,u] = o\big((\|u\| + \|v\|)^2\big)$$

in quanto tutti i termini si cancellano.
Da ciò segue subito la tesi, per definizione di differenziale secondo. ■

**Teorema 3.3.3 - Inversione dell'Ordine di Derivazione (Schwarz)**
*Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aperto ed $f : \Omega \to (E, \|\cdot\|)$ una funzione tale che:*

1. $\exists\ \partial_1 f,\ \partial_2\partial_1 f$ *in* $\Omega$, *con* $\partial_2\partial_1 f$ *continua su* $(x_0, y_0) \in \Omega$
2. $\forall x \in \mathbb{R} :\ (x, y_0) \in \Omega\ \ \exists\ \partial_2 f$

*Allora* $\exists\ \partial_1\partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2\partial_1 f(x_0, y_0)$.

*Dimostrazione.* Definiamo la funzione ausiliaria $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ come:

$$\omega(r) = \sup_{\|x - x_0\| \leq r, \|y - y_0\| \leq r} \|\partial_2\partial_1 f(x,y) - \partial_2\partial_1(x_0, y_0)\|$$

[4]Viene usata la notazione: $D^2 f(x_0)[u,v] = \Big[D^2 f(x_0)[u]\Big][v]$.

Ed in particolare, osserviamo che $\omega$ infinitesima per $r \to 0$ in quanto $\partial_2\partial_1 f$ è continua in $(x_0, y_0)$ per ipotesi.

■

**Definizione 3.3.1 - Matrice Hessiana**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile 2 volte in $x \in \Omega$. Esiste quindi $D^2 f(x) \in \mathcal{L}^2_{simm}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ forma bilineare.
Per il Teorema 3.3.3 si definisce la matrice Hessiana, che rappresenta $D^2 f(x)$ in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{1,1} f(x) & \partial_{2,1} f(x) & ... & \partial_{n,1} f(x) \\ \partial_{1,2} f(x) & \partial_{2,2} f(x) & ... & \partial_{n,2} f(x) \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \partial_{1,n} f(x) & \partial_{2,n} f(x) & ... & \partial_{n,n} f(x) \end{bmatrix}$$

dove $\partial_{i,j} f(x) = \partial_i \partial_j f(x)$.

**Teorema 3.3.4 - Limite sotto Segno Derivata**
*Siano $E, F$ spazi di Banach. Sia $\Omega \subseteq E$ aperto connesso. Siano $f_n : \Omega \to F$ una successione di funzioni tali che:*

1. *$\{f_n(x_0)\}$ converge in $F$ per almeno un $x_0 \in \Omega$*
2. *$Df_n : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ convergono a $g : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ uniformemente e localmente, cioè:*

$$\forall a \in \Omega \ \exists\, r_a > 0 : \quad \|Df_n - g\|_{\infty, B(a, r_a)} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

*Allora:*

1. *$f_n$ convergono a $f : \Omega \to F$ uniformemente e localmente.*
2. *$f$ è differenziabile, $Df = g$.*

**Commento 1. *Disperazione degli autori***
*Sedetevi. Preparatevi l'acqua calda per una camomilla.*
*Fatto? Bene. Prendete il telefono e mettete la modalità aereo, non sia mai che qualcuno vi importuni proprio ora che vi accingete a questa dimostrazione.*
*Vi servirà concentrazione per capire le righe e righe di formula che seguiranno.*
*Ma vi prego non ce ne vogliate, LaTeX non è molto clemente con la lunghezza delle formule, abbiamo fatto il meglio che potevamo con tutti questi a capo.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo i punti separatamente.

1. Proviamo che $f_n(x)$ convergente per ogni $x \in B(a, r_a) \subseteq \Omega$ se e solo se $f_n(a)$ convergente. Affinchè valga l'equivalenza, vediamo che la differenza $f_n(x) - f_n(a)$ è di Cauchy. Allora la convergenza di una successione implica quella dell'altra. Per $p, q \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\|(f_p(x) - f_p(a)) - (f_q(x) - f_q(a))\| &\leq \|Df_p - Df_q\|_{\infty, B(a,r_a)} \cdot \|x - a\| \\ &\leq \|Df_p - Df_q\|_{\infty, B(a,r_a)} \cdot r_a = o(1)\end{aligned}$$

Quindi $\{f_n(x) - f_n(a)\}$ è di Cauchy e converge. Ma allora gli insiemi:

$$A = \{x \in \Omega \mid f_n(x) \textit{ converge}\} \text{ e } B = \{x \in \Omega \mid f_n(x) \textit{ non converge}\}$$

sono entrambi aperti in quanto se $a$ vi appartiene, allora tutta la palla $B(a, r_a)$ vi appartiene. I due aperti sono tra di loro complementari in $\Omega$ connesso. Inoltre per l'ipotesi (1), $A \neq \emptyset$ quindi $A = \Omega$. Ovvero le funzioni convergono puntualmente per ogni $x \in \Omega$.
Dimostriamo che lo fanno localmente uniformemente, cioè uniformemente sulle palle $B(a, r_a)$. Per TVM:

$$\|(f_p(x) - f_p(a)) - (f(x) - f(a))\| \leq \|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} \cdot \|x - a\|$$

Inoltre vale che:

$$\begin{aligned}\|f_p(x) - f(x)\| &\leq \|f_p(a) - f(a)\| + \|f_p(x) - f(x) - f_p(a) + f(a)\| \\ &\leq \|f_p(a) - f(a)\| + \|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} \cdot r_a\end{aligned}$$

e passando al $\sup\limits_{x \in B(a,r_a)}$:

$$\|f_p - f\|_{\infty, B(a,r_a)} \leq \|f_p(a) - f(a)\| + \|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} \cdot r_a$$

che prova la convergenza uniforme locale.

2. Vediamo che $g$ è differenziabile con $Df = g$ per ogni $a \in \Omega$. In particolare vediamo che la seguente quantità è $o(\|x - a\|)$ per $x \to a$:

$$\begin{aligned}&\|f(x) - f(a) - g(a)[x - a]\| \leq \|f(x) - f(a) - f_p(x) + f_p(a)\| + \\ &\quad + \|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x - a]\| + \|Df_p(a)[x - a] - g(a)[x - a]\| \\ &\quad \leq \left[\|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} + \frac{\|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x - a]\|}{\|x - a\|} + \right. \\ &\quad \left. + \|Df_p(a) - g(a)\|\right] \cdot \|x - a\| \\ &\quad \leq \left[2\|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} + \frac{\|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x - a]\|}{\|x - a\|}\right] \|x - a\|\end{aligned}$$

Segue, riscrivendo la disuguaglianza, che per ogni $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\|f(x) - f(a) - g(a)[x-a]\|}{\|x-a\|} \leq 2\|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} + \\ + \frac{\|f_p(x) - f_p(a) - Df_p(a)[x-a]\|}{\|x-a\|}$$

passando allora ad $\inf\limits_{p \in \mathbb{N}}$ all'ultimo termine:

$$\frac{\|f(x) - f(a) - g(a)[x-a]\|}{\|x-a\|} \leq 2\|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} + 0$$

e dato che per $p \to +\infty$ si ha $\|Df_p - g\|_{\infty, B(a,r_a)} = o(1)$ per cui si ottiene la tesi.

■

**Commento 2.** *Amen.*

**Definizione 3.3.2 - Integrale in Spazio di Banach**
Siano $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e $f : [a,b] \to (E, \|\cdot\|)$ continua.
Definisco per notazione:

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

dove $g' = f$ esiste per il Teorema 3.3.4.

**Definizione 3.3.3 - Diffeomorfismo**
Siano $E, F$ spazi di Banach, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ aperti. La funzione $f : U \to V$ è diffeomorfismo se:

- $f$ continua, differenziabile e invertibile
- $f^{-1}$ differenziabile

Se $f^{-1}$ è $C^k$, allora $f$ è $C^k$-diffeomorfismo.

**Teorema 3.3.5 - Inversione Locale**
*Siano $E, F$ spazi di Banach, $\Omega \subseteq E$ aperto, $x_0 \in \Omega$. Sia $f : \Omega \to F$ di classe $C^1$ con $Df(x_0)$ invertibile in $x_0$.*
*Allora $f$ è diffeomorfismo locale in $x_0$.*

*Dimostrazione.* Sia per ipotesi $L = Df(x_0)^{-1} \in L(E, F)$. La mappa

$$(L \circ f) : x \mapsto Lf(x)$$

ha differenziale $LDf(x)$ che in $x = x_0$ è l'identità.
Consideriamo la palla $U = B(x_0, r) \subseteq \Omega$, su cui banalmente vale che:

$$Lf(x) = x + (Lf(x) - x)$$

dove in particolare $D(Lf(x) - x) = LDf(x) - I$. Prendendo la norma, per $r \to 0$:

$$\|D(Lf(x) - x)\| = \|LDf(x) - I\| = o(1)$$

perchè la funzione $LDf(x) - I$ è continua in $x_0$ dove vale $I$. Ma allora la mappa $x \mapsto Lf(x) - x$ ha costante di Lipschitz $\|LDf - I\|_{\infty, B(x_0,r)}$ sulla palla $B(x_0, r)$. Prendiamo $r > 0$ abbastanza piccolo affinchè $\|LDf - I\|_{\infty, B(x_0,r)} \leq \frac{1}{2}$.
Allora per il Teorema delle Perturbazioni 1-Lipschitz 2.5.2 l'immagine di $U$ tramite $Lf(x) = x + (Lf(x) - x)$ è aperta in $E$ ed in particolare $Lf$ è omeomorfismo tra $U$ e la sua immagine.
Dato che $L$ è omeomorfismo (in quanto applicazione invertibile) allora applicando l'inversa ad $Lf$ omeomorfismo si ottiene che $f$ è omeomorfismo tra $U$ e la sua immagine $f(U) = V$.
Applicando la formula per il differenziale dell'inversa (la Proposizione 3.1.3) vale che $f^{-1} : V \to U$ è differenziabile con:

$$Df^{-1}(y) = \left[Df(f^{-1}(y))\right]^{-1}$$

Vale di più: $f^{-1} \in C^1$. Infatti $Df^{-1}$ è composizione di continue[5]:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{f^{-1}} & U & \xrightarrow{Df} & InvLin(E,F) & \xrightarrow{[\cdot]^{-1}} & L(F,E) \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) & \longmapsto & Df(f^{-1}(y)) & \longmapsto & [Df(f^{-1}(y))]^{-1} \end{array}$$

■

**Definizione 3.3.4 - Luogo di Zeri e Grafico**
Siano $E, F, G$ spazi di Banach, $\Omega \subseteq E \times F$ aperto. Sia $f : \Omega \to G$.
Il luogo di zeri di $f$ è: $Z(f) = (x, y) \in \Omega | f(x, y) = 0$.
$Z(f)$ è il grafico di $f$ come funzione da $x$ in $y$ nel punto $(x_0, y_0) \in Z(f)$ se $\exists\, \varepsilon, \delta > 0$ ed $\exists\, u : B_E(x_0, \varepsilon) \to B_F(y_0, \delta)$ tali che, equivalentemente:

[5] L'ultima freccia è continua in quanto l'inversa matriciale è una funzione continua nei coefficienti della matrice.

- $graf(u) = Z(f) \cap \big(B_E(x_0,\varepsilon) \times B_F(y_0,\delta)\big)$
- $\forall (x,y) \in B_E(x_0,\varepsilon) \times B_F(y_0,\delta) : (x,y) \in Z(f) \Leftrightarrow y = u(x)$

**Teorema 3.3.6 - Funzione Implicita**
*Siano $E, F, G$ spazi di Banach, $\Omega \subseteq E \times F$ aperto. Sia $f : \Omega \to G$ in classe $C^1$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e $D_2 f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(F, G)$ invertibile.*
*Allora:*

- *$\exists\, U$ intorno aperto di $x_0$, $\exists\, V$ intorno aperto di $y_0$ tali che $U \times V \subseteq \Omega$*
- *$\exists\, u : U \to V$ di classe $C^1$ tale che: $\{f = 0\} \cap \{U \times V\} = graf(u)$*

*In particolare, la funzione $u$ è tale che*

$$\forall x \in U : \quad \begin{cases} Du(x) = -[D_2 f(x, u(x))]^{-1} \circ D_1 f(x, u(x)) \\ f(x, u(x)) = 0 \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Omega & \longrightarrow & E \times G \\ & (x,y) & \longmapsto & (x, f(x,y)) \end{array}$$

che è $C^1$ in quanto le componenti sono $C^1$.
Verifichiamo che $D\Phi(x_0, y_0)$ è invertibile come mappa $E \times F \to E \times G$. Per $(x_0, y_0) \in \Omega$ ed $(h,k) \in E \times F$:

$$D\Phi(x_0, y_0)[h,k] = (h\ ,\ D_1 f(x_0, y_0)[h] + D_2 f(x_0, y_0)[k])$$

Indichiamo i differenziali parziali come $L = D_1 f(x_0, y_0)$ ed $M = D_2 f(x_0, y_0)$. Allora:

$$D\Phi(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & M \end{bmatrix}$$

e con semplici calcoli si ottiene che l'inversa sarà:

$$D\Phi(x_0, y_0)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M^{-1}L & M^{-1} \end{bmatrix}$$

Applichiamo il Teorema di Inversione Locale: esistono $W$ e $V$ intorni aperti di $x_0$ ed $y_0$ rispettivamente tali che $\Phi(W \times V)$ sia aperto e $\Phi|_{W \times V}$ diffeomorfismo. Definiamo allora il dominio $U$ della funzione $u$ come:

$$U = \{x \in E \mid (x, 0) \in \Phi(U \times V)\}$$

ed indicando con $\pi_F : E \times F \to F$ la proiezione, definiamo per ogni $x \in U$:

$$u(x) = \pi_F \left(\Phi^{-1}(x, 0)\right)$$

Perché così per costruzione vale:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) \in \Phi^{-1}(x, 0) \\ \Leftrightarrow y = \pi_F \left(\Phi^{-1}(x, 0)\right) \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che $u \in C^1(U, F)$ perché composizione di mappe $C^1$:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{j_1} & \Phi(U \times V) \subseteq U \times G & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & E \times F & \xrightarrow{\pi_F} & F \\ x & \longmapsto & (x, 0) & \longmapsto & \Phi^{-1}(x, 0) & \longmapsto & \pi_F(\Phi^{-1}(x, 0)) \end{array}$$

Calcoliamo quindi il differenziale di $u$. Partiamo dalla funzione $g(x) = f(x, u(x))$ che per definizione è la mappa nulla. Differenziando allora:

$$0 = Dg(x) = D_1 f(x, u(x)) + D_2 f(x, u(x)) \circ Du(x)$$

e riscrivendo:

$$Du(x) = -D_2 f(x, u(x))^{-1} \circ D_1 f(x, u(x))$$

ovvero la tesi. ■

**Corollario 3.3.6.1 - Caso di $\mathbb{R}^n$**
*Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$. Sia $x \in \Omega$ tale che $\nabla f(x) \neq 0$, in particolare suppongo per $\nabla f = \left(\partial_1 f, ..., \partial_2 f\right)$ che $\partial_n f(x) \neq 0$.*
*Allora per $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ con $U$ intorno di $\mathbb{R}^{n-1}$, $\exists\ u : U \to \mathbb{R}$ tale che $\exists\, \varepsilon > 0 : \quad \{f = 0\} \cap \big(\, U \times\, ]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\, \big) = graf(u)$.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Teorema 3.3.6. ■

**Teorema 3.3.7 - Teorema di Dini**
*Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Sia:*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad e \qquad \partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$$

*Allora il luogo di zeri di $F$ in un intorno di $(x_0, y_0)$ è il grafico di una funzione $u$ nella variabile $x$.*
*Più precisamente:*

$$\begin{aligned} \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \cap ([x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]) = \\ = \{(x, y) \mid x \in [x_0 - a, x_0 + a] \text{ e } y = u(x)\} \end{aligned}$$

*Ed inoltre $u \in C^1([x_0 - a, x_0 + a], \mathbb{R})$ dove:*

$$u'(x) = -\frac{\partial_x F(x, u(x))}{\partial_y F(x, u(x))}$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Teorema 3.3.6. ■

**Definizione 3.3.5 - Funzione omogenea**
Sia $\|\cdot\|$ spazio normato. Prendiamo $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Allora $f$ si dice $p$-omogenea se per ogni $t > 0$ ed $x \in E \setminus \{0\}$:

$$f(tx) = t^p f(x)$$

**Teorema 3.3.8 - Teorema di Eulero**
*Sia $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Vale l'equivalenza:*

$$f \text{ è } p\text{-omogenea} \quad \Leftrightarrow \quad Df(x)[x] = pf(x) \text{ per ogni } x \in E \setminus \{0\}$$

*Dimostrazione.* ($\Rightarrow$): sia $f(tx) = t^p f(x)$ per ogni $x \in E$ e $t > 0$. Allora:

$$\frac{d}{dt} f(tx)[x] = pt^{p-1} f(x)$$

Vedendo la derivata direzionale come la derivata della funzione $f \circ \gamma$ dove $\gamma : \mathbb{R} \to E$ è la retta $\gamma(t) = tx$:

$$Df(tx)[x] = pt^{p-1} f(x)$$

e scelto $t = 1$ si ottiene l'implicazione.
($\Leftarrow$): supponiamo che per ogni $x \in E \setminus \{0\}$:

$$Df(x)[x] = pf(x)$$

Ciò significa banalmente che anche per ogni $t > 0$:

$$Df(tx)[tx] = pf(tx)$$

Allora si ottiene:

$$\begin{aligned}
&tDf(tx)[x] = pf(tx) \\
&t^p \frac{d}{dt}\left(f(tx)\right) = t^p D(tx)[x] = pt^{p-1} f(tx) \\
&t^p \frac{d}{dt}\left(f(tx)\right) - pt^{p-1} f(tx) = 0 \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{f(tx)}{t^p}\right) t^{2p} = 0
\end{aligned}$$

ovvero si ottiene che $\frac{f(tx)}{t^p}$ è costante. Valutando in $t = 1$:

$$\frac{f(tx)}{t^p} = f(x)$$

cioè la tesi. ■

# 3.4 Polinomio di Taylor

## 3.4.1 Definizione

**Definizione 3.4.1 - Polinomio di Taylor per curve**
Sia $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach, sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to (E, \|\cdot\|)$ una funzione derivabile $n$ volte in $x_0 \in I$.
Il polinomio di Taylor di centro $x_0$ e ordine $n$ sarà:

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

**Proposizione 3.4.1 - Proprietà**
*Nelle ipotesi della Definizione 3.4.1, valgono le seguenti proprietà:*

1. $T_n(x, x, f) = f(x)$
2. $\partial_1 T_n(x, x_0, f) = T_{n-1}(x, x_0, f^{(1)})$
3. $\partial_2 T_n(x, x_0, f) = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

*Dimostrazione.* Le identità seguono dal calcolo diretto delle quantità. ■

**Definizione 3.4.2 - Polinomio di Taylor per Normati**
Siano $E, F$ spazi normati, sia $f : \Omega \subseteq E \to F$ una funzione differenziabile $n$ volte in $x_0 \in \Omega$.
Il polinomio di Taylor di centro $x_0$ e ordine $n$ sarà:

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(x_0)[x - x_0]^k$$

*Notazione 3.1 - Multi-indice*
Un multi-indice è $\alpha \in \mathbb{N}^m$ dove $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$. In particolare si denota:

- la somma: $|\alpha|_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$
- l'esponente: $x^\alpha = x^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x^{\alpha_m}$
- il binomiale: $\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! ... \alpha_m!}$

**Proposizione 3.4.2 - Polinomio di Taylor con Multi-indice**
*Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile $n$ volte in $x_0 \in U$. Allora:*

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{|\alpha|_1 \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

### 3.4.2 Stime del Resto per Curve

Siano $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e $f : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ derivabile $n$ volte in $x_0 \in I$.

**Proposizione 3.4.3 - Stima di Peano**
*Se $\exists\ f^{(n)}(x_0)$, allora per $x \to x_0$:*

$$\|R_n(x - x_0)\| = o(|x - x_0|^n)$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Proposizione 3.4.4 - Stima di Lagrange**
*Se $\exists\ f^{(n+1)}(x)\ \forall x \in I$, allora:*

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \sup_{t\in[x_0,x]} \|f^{(n+1)}(t)\| \cdot \tfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Proposizione 3.4.5 - Variazione di Lagrange 1**
*Se $\exists\ f^{(n)}(x)\ \forall x \in I$, allora:*

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \sup_{t\in[x_0,x]} \|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)\| \cdot \tfrac{|x-x_0|^{n}}{n!}$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Proposizione 3.4.6 - Variazione di Lagrange 2**
*Se $\exists\ f^{(n-1)}(x)\ \forall x \in I$ e $\exists\ f^{(n)}(x_0)$, allora:*

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \sup_{t\in[x_0,x]} \|f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(x_0) - (t - x_0)f^{(n)}(x_0)\| \cdot \tfrac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Proposizione 3.4.7 - Stima Integrale**
*Se $f \in C^{n+1}$, allora:*

$$R_n(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

### 3.4.3 Stime del Resto per Normati

Siano $E, F$ spazi normati, sia $f : \Omega \subseteq E \to F$ una funzione differenziabile $n$ volte in $x_0 \in \Omega$.

**Proposizione 3.4.8 - Stima di Lagrange**
*Se $\exists\ Dn + 1f(x)\ \forall x \in \Omega$ convesso, allora:*

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \|D^{n+1}f\|_{\infty,\Omega} \cdot \frac{\|x - x_0\|^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Dimostrazione.* ———————— ∎

**Proposizione 3.4.9 - Variazione di Lagrange 1**
*Se $\exists\ D^n f(x)\ \forall x \in \Omega$ e $D^n f(x)$ continua in $x_0$, allora:*

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \|D^n f - D^n f(x_0)\|_{\infty,\Omega} \cdot \frac{\|x - x_0\|^n}{n!}$$

*Dimostrazione.* ———————— ∎

**Proposizione 3.4.10 - Variazione di Lagrange 2**
*Se $\exists\ D^{n-1}f(x)\ \forall x \in \Omega$ e $\exists\ D^n f(x_0)$, allora:*

$$\|R_n(x - x_0)\| \leq \sup_{y\in\Omega} \|D^{n-1}f(t) - D^{n-1}f(x_0) - (y - x_0)D^n f(x_0)\| \cdot \frac{\|x - x_0\|^{n-1}}{(n-1)!}$$

*Dimostrazione.* ———————— ∎

## 3.5 Ottimizzazione di Funzioni

### 3.5.1 Punti di Minimo

**Definizione 3.5.1 - Valore di Minimo e Punto di Minimo**
Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme e $x \in S$, sia $f : S \to \mathbb{R}$:

- $x$ è punto di minimo di $f$ se: $\quad f(x) \leq f(y) \; \forall \, y \in S$
- $f(x)$ è in tal caso valore di minimo (o minimo)

### 3.5.2 Caratterizzazione di Minimo

Siano $E$ spazio di Banach e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

**Proposizione 3.5.1 - Proprietà Necessaria 1**
*Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo allora:*

$$\forall \, v \in E \quad \partial_v f(x_0) = 0$$

*purchè $\partial_v f(x_0)$ esista.*

*Dimostrazione.* Infatti

$$\partial_v f(x_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)|_{t=0} = 0$$

in quanto $t = 0$ è punto di minimo locale per $f(x_0 + tv)$. ■

**Proposizione 3.5.2 - Proprietà Necessaria 2**
*Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo ed $f$ è differenziabile 2 volte in $x_0$ (cioè $\exists \, D^2 f(x_0) \in \mathcal{L}^2_{simm}(E \times E)$) allora:*

$$\forall \, v \in E \quad D^2 f(x_0)[v, v] \geq 0$$

*ovvero $D^2 f(x_0)$ è positiva.*

*Dimostrazione.* Infatti per ogni $v \in E$:

$$D^2 f(x_0)[v, v] = \frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + tv)|_{t=0} \geq 0$$

poichè $t = 0$ è minimo di $f(x_0 + tv)$ definita in un intorno di 0, $]-\varepsilon, \varepsilon[$. ■

**Proposizione 3.5.3 - Proprietà Sufficiente**
*Sia $x_0 \in \Omega$ ed $f$ è differenziabile 2 volte in $x_0$.*
*In particolare $Df(x_0) = 0$; $D^2 f(x_0)$ bilineare simmetrica e definita positiva.*
*Allora: $\exists B(x_0, r) \subseteq \Omega$ tale che $x_0$ è unico punto di minimo per $f\big|_{B(x_0,r)}$.*

*Dimostrazione.* Infatti: $\forall v \in E, \|v\| < r$ dallo sviluppo al secondo ordine con resto di Peano:

$$\begin{aligned} f(x_0 + v) &= f(x_0) + df(x_0)v + \frac{1}{2}D^2 f(x_0)[v, v] + o(\|v\|^2) \\ &\geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 + o(\|v\|^2) \\ &= f(x_0) + (\frac{\alpha}{2} + o(1))\|v\|^2 \end{aligned}$$

Perciò esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ e $\forall r, 0 < \|v\| < r$ vale $f(x_0 + v) > f(x_0)$, cioè $x_0$ è l'unico punto di minimo di $f|_{B(x_0,r)}$. ■

*Osservazione 3.5.1*
In particolare queste proprietà sono analoghe al Principio Variazionale di Fermat (vedi Analisi Matematica 1).
Le ipotesi di queste proposizioni si trovano allora in contrasto con le ipotesi del Teorema di Weierstrass: una richiesta del primo principio è $\Omega$ aperto, mentre nel secondo $\Omega$ compatto.

### 3.5.3 Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

**Definizione 3.5.2 - Sottovarietà Differenziabili**
Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, sia $M \subseteq E$. $M$ si dice sottovarietà differenziabile di $E$ di classe $C^m$ se $\forall\, p \in M$:

- $\exists\, U$ intorno di $p$ in $E$.
- $\exists\, F_1, F_2$ spazi normati.
- $\exists\, \varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U)$ diffeomorfismo di classe $C^m$ dove $\varphi(U)$ aperto di $F_1 \times F_2$ tale che $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (F_1 \times \{0\})$.

*Osservazione 3.5.2*
Nelle ipotesi della Definizione 3.5.2:
$D\varphi(p)^{-1}(F_1 \times \{0\})$ non dipende dalla scelta del diffeomorfismo $\varphi$.

*Dimostrazione.* —————————— ■

Le seguenti definizioni seguono dall'Osservazione 3.5.2.

**Definizione 3.5.3 - Spazio Tangente $T_pM$**
Lo spazio $F_1 \times \{0\}$ si chiama spazio tangente a $M$ di $p$. Si indica $T_pM$.

**Definizione 3.5.4 - Fibrato Tangente $TM$**
Il fibrato tangente di $M$ è:

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM = \bigcup_{p\in M} (\{p\} \times T_pM) \subseteq E \times E$$

**Proposizione 3.5.4**
*Siano $E, F$ spazi normati, $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $u : \Omega \to F$ un diffeomorfismo $C^m$.*
*Allora $graf(u)$ è una sottovarietà differenziabile di $E \times F$. Inoltre:*

$$T_{(x,u(x))}graf(u) = graf(Du(x))$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Proposizione 3.5.5**
*Sia $E$ spazio normato, $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $M \subseteq \Omega$ sottovarietà differenziabile $C^m$. Sia $\Omega'$ aperto di $E'$.*
*Considero $\varphi : \Omega \to \Omega'$ diffeomorfismo $C^m$. Allora:*

- *$M' = \varphi(M)$ è sottovarietà differenziabile $C^m$ di $E'$*
- *$\forall\, p \in M : \quad T_{\varphi(p)}\varphi(M) = D\varphi(x)[T_pM]$*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Proposizione 3.5.6**
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $g : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una mappa $C^m$ tale che $\forall\, x \in g^{-1}(p)$ allora $Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ surgettiva.*
*Allora $g^{-1}(p)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^m$.*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Teorema 3.5.1 - Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange**
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Siano $f_0 \in C^1(\Omega)$ la funzione "obiettivo" e $f_1, ..., f_r \in C^1(\Omega)$ le funzioni "vincolo". Sia $\Sigma = \{x \in \Omega | f_1(x) = ... = f_r(x) = 0\}$.*
*Se $x^* \in \Sigma$ è un punto di massimo per $f_0\big|_\Sigma$ allora $\nabla f_0(x^*), \nabla f_1(x^*), ..., \nabla f_r(x^*)$ sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* (di Ennio de Giorgi)
Approssimiamo il problema di minimo vincolato con problemi di minimo libero con opportune penalizzazioni[6]: consideriamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione

[6] l'idea è di costruire la $g_k$ dove guardo le $f_i(x)$ quando sono $\neq 0$, questo porta, prendendo i quadrati, ad un aumento della quantità. Si vuole dunque calcolare il minimo di $g_k$ in seguito alle *penalità*

$g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$g_k(x) = f_0(x) + ||x - x^*||^2 + k \sum_{i=1}^{r} f_i(x)^2 \tag{3.11}$$

.
Sia $r > 0$ tale che $B = \overline{B(x^*, r)} \subseteq \Omega$ e sia $x_k$ punto di minimo di $g_k$ su $B$ (c'è per il teorema di Weierstrass). Seguono 3 passi.

1. Dico che $g_k(x_k)$ è limitata. Sia $x^* \in B$. Allora:

$$\min_{x \in B} f_0(x) \leq f_0(x_k) \overset{3.11}{\leq} g_k(x_k) \leq g_k(x^*) = f_0(x^*)$$

   Quindi esiste una successione $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tale che per $j \to +\infty$:

$$\begin{cases} x_{k_j} \longrightarrow \xi \in B \\ g_{k_j}(x_{k_j}) \longrightarrow c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Dico che $\xi \in \Sigma$. Osserviamo:

$$0 \leq k_j \sum_{i=1}^{r} f_i^2(x_{k_j}) \leq g_{k_j}(x_{k_j}) \leq f_0(x^*)$$

   Quindi dividendo per $k_j$ segue che:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{r} f_i^2(x_{k_j}) \leq \frac{1}{k_j} f_0(x^*) \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Ma per continuità, da $x_{k_j} \to \xi$, segue allora anche

$$\sum_{i=1}^{r} f_i^2(\xi) = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{r} f_i^2(x_{k_j}) = 0$$

   cioè $f_i(\xi) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, r$. Segue che $\xi \in \Sigma$.

3. Dico che $\xi = x^*$. Infatti:

$$f_0(x_{k_j}) + \|x_{k_j} - x^*\|^2 \leq g_{k_j}(x_{k_j}) \leq g_{k_j}(x^*) = f_0(x^*) \leq f_0(\xi)$$

   Passando al limite per $j \to +\infty$ si trova che:

$$f_0(\xi) + \|\xi - x^*\|^2 \leq f_0(\xi)$$

   e quindi che $\|\xi - x^*\| = 0$, ovvero $\xi = x^*$.

**Commento 3.** *Quindi la $\{x_k\}_k$ stessa converge a $x^*$.*
*Ciò segue dalla proprietà di Urysohn: se ogni sottosuccessione* arbitraria *di $\{x_k\}_k$ ha una sotto-sottosuccessione convergente a $x^*$, allora la successione $\{x_k\}_k$ converge a $x^*$.*

In particolare: gli $\{x_k\}$ sono minimi che appartengono a $\overset{\circ}{B} = B(x^*, r)$ definitivamente (in quanto $x_k \to x^*$), quindi vale (definitivamente) che:

$$\nabla g_k(x_k) = 0$$

per definizione di $x_k$ come punti di minimo di $g_k$. Deriviamo l'equazione 3.11:

$$\nabla g(x) = \nabla f_0(x) + 2(x - x^*) + 2k \sum_{i=1}^{r} f_i(x) \nabla f_i(x)$$

ottenendo così una combinazione lineare dei $\nabla f_i(x)$. Valutandolo per $x = x_k$ è nulla si ottiene:

$$0 = \nabla g(x_k) = \nabla f_0(x_k) + 2(x_k - x^*) + 2k \sum_{i=1}^{r} f_i(x_k) \nabla f_i(x_k)$$

Cambiamo notazione per i coefficienti dei vettori nella combinazione lineare definita per $k \in \mathbb{N}$:

- si definisce $\lambda_{0,k} = 1$ per $\nabla f_0(x_k)$.
- si definisce $\lambda_{i,k} = 2k f_i(x_k)$ per $\nabla f_i(x_k)$ (dove $i = 1, \cdots, r$).

Così la combinazione lineare si può riscrivere:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_{i,k} \nabla f_i(x_k) = -2(x_k - x^*)$$

Per passare al limite $k \to +\infty$, bisogna normalizzare in quanto per definizione dei coefficienti $\lambda_{i,k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Dividiamo allora per $\mu_k = \sqrt{1 + 4k^2 \sum_{i=1}^{r} f_i^2(x_k)}$, cioè la norma dei coefficienti $(\lambda_{0,k}, \lambda_{1,k}, \ldots, \lambda_{r,k})$. Così facendo:

$$\sum_{i=1}^{r} \widetilde{\lambda}_{i,k} \nabla f_i(x_k) = -\frac{2(x_k - x^*)}{\mu_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} o(1)$$

con:

$$\sum_{i=1}^{r} |\widetilde{\lambda}_{i,k}|^2 = 1 \tag{3.12}$$

Rifrasando, vuol dire che la successione di vettori $(\widetilde{\lambda}_{0,k}, \ldots, \widetilde{\lambda}_{r,k})_k \subseteq S^r$ compatto[7]. Quindi a meno di sottosuccessione, $(\widetilde{\lambda}_{0,k}, \ldots, \widetilde{\lambda}_{r,k})_k$ converge a una $(r+1)$-upla non nulla di coefficienti $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ (che ha norma euclidea $= 1$ per continuità della funzione norma). In conclusione:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0$$

che è una relazione di dipendenza lineare fra $\nabla f_0(x_0), \nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_r(x_0)$. Questo dimostra la tesi. ■

*Dimostrazione alternativa.* ————————- ■

[7]Per $S^r \subseteq \mathbb{R}^{r+1}$ si intende il bordo della sfera $r+1$-dimensionale, che ha come equazione proprio l'equazione 3.12.

## 3.6 Complessificazione

*Osservazione 3.6.1 - Restrizione ai Reali*
Sia $E$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. In particolare, esso è anche spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con la restrizione degli scalari sui reali. Denoto questa restrizione con $E_0$.
Vi è un endomorfismo $j : E_0 \to E_0$ tale che $j(x) = ix \quad \forall\, x \in E_0$.
Tale endomorfismo è radice quadrata di $-id : E_0 \to E_0$.

**Definizione 3.6.1 - Spazio vettoriale Complessificato**
Sia $E_0$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Il suo complessificato è:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{C}} &= \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{dim(E)} \alpha_i v_i \quad | \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, v_i \in E \right\} \\ &= E \times E \qquad \textit{dove}\ i \cdot (x, 0) = (0, x) \end{aligned}$$

**Definizione 3.6.2 - Applicazione Lineare in senso Complesso**
Siano $E, F$ spazi vettoriali reali. Un'applicazione $L : E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ si dice lineare in senso complesso se e solo se:

- $L : E \to F$ è lineare in senso reale
- $L$ e $j$ commutano

**Definizione 3.6.3 - Norma Complessa**
Sia $E$ spazio complesso. L'applicazione $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ è una norma complessa di $E$ se:

- $\|\cdot\|$ è norma su $E_0$
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ x \in E : \quad \|\lambda x\| = |x| \cdot \|x\|$

**Definizione 3.6.4 - Funzione Differenziabile in senso complesso**
Siano $E, F$ spazi normati complessi, sia $\Omega \subseteq E$ aperto.
L'applicazione $f : \Omega \to F$ si dice $\mathbb{C}$-differenziabile in $x_0 \in \Omega$ se per $x \to x_0$:

$$\exists\, L \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, F) : \quad f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0)$$

*Osservazione 3.6.2*
Nelle ipotesi della Definizione 3.6.4, sono equivalenti:

- $f$ è $\mathbb{C}$-differenziabile
- $f$ è $\mathbb{R}$-differenziabile e $L \circ j = j \circ L$

# Capitolo 4

# Equazioni Differenziali

## 4.1 Esponenziale in $\mathcal{L}(E)$

In questo capitolo lavoreremo sempre con spazi normati completi. Quando si troverà indicato lo spazio $E$, considereremo quindi uno spazio di Banach.

### 4.1.1 Definizione

**Definizione 4.1.1 - Esponenziale sui Lineari**
Sia $E$ spazio di Banach. Sia $A \in \mathcal{L}(E)$, si definisce:

$$exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

### 4.1.2 Proprietà

**Proposizione 4.1.1 - Convergenza in Norma**
*La serie esponenziale definita è normalmente convergente.* $\forall\, A \in \mathcal{L}(E)$*:*

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che per $A, B \in \mathcal{L}(E)$ vale che $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Quindi per $k \in \mathbb{N}$ ho $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Segue che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

■

**Proposizione 4.1.2 - Scrittura al limite**
*La serie esponenziale ha una scrittura al limite:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(I+\frac{A}{n}\right)^n = e^A$$

*Dimostrazione.* Dato per esercizio: ricalcare la dimostrazione dell'esponenziale complesso. ■

**Proposizione 4.1.3 - Continuità e Differenziabilità**
*L'applicazione exp : $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ definita dall'esponenziale è continua e differenziabile.*

*Dimostrazione.* Sia $B_R = B(0,R) \subseteq \mathcal{L}(E)$. Denotiamo le somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$. Vediamo che $s_n \longrightarrow e^A$ uniformemente per $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\|exp - s_n\|_{\infty,B_R} &= \sup\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\right\| \\ &\le \sup\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\|A\|^k}{k!} \le \sup\left(\frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\|A\|}\right) \\ &\le \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}e^R = o(1) \quad per\ n\to+\infty\end{aligned}$$

Quindi per ogni $R > 0$: $exp$ è limite uniforme (sulle palle $B_R$) di $s_n$ continue. Segue che $exp$ è una funzione continua.
La differenziabilità è lasciata per **esercizio**: trovare $Dexp(A)[H]$. ■

**Proposizione 4.1.4 - Curva Esponenziale**
*Sia $A \in \mathcal{L}(E)$. Si definisce la curva:*

$$\gamma : t \longmapsto e^{tA}$$

*Essa è derivabile, con derivata:*

$$(e^{tA})' = A\,e^{tA}$$

*Dimostrazione.* Siano le funzioni delle somme parziali:

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}t^k$$

Esse hanno derivate:

$$s_n'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{(k-1)!}t^{k-1} = A\cdot s_{n-1}(t)$$

Osserviamo che sui limitati $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ le funzioni appena definite convergono uniformemente (in modo analogo alla dimostrazione della Proposizione precedente):

$$s_n(t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{tA} \quad e \quad s'_n(t) = As_{n-1}(t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Ae^{tA}$$

per cui essendo $s_n(t)$ continue, lo è il loro limite $e^{tA}$.
La derivabilità segue direttamente usando il Teorema del Limite Sotto Segno di Derivata con $\{s'_n\}$. ■

### 4.1.3 Regole di Calcolo

**Proposizione 4.1.5 - Commutazione e Somma**
*Siano $A, B \in \mathcal{L}(E)$ che commutano, cioè $AB = BA$. Allora:*

$$Ae^B = e^B A \qquad ed \qquad e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

*Dimostrazione.* Dato che $A$ è $B$ commutano è banale osservare che:

$$A\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{AB^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k A}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right) A$$

ma allora passando al limite $n \to +\infty$ si ottiene che $Ae^B = e^B A$.
Consideriamo l'equazione differenziale $u'(t) = (A + B)u(t)$ e vediamo che $e^{tA}e^{tB}$ ed $e^{t(A+B)}$ la risolvono. Allora, dato che per $t = 0$ valgono entrambe $I$, devono coincidere per unicità della soluzione:

$$\left(e^{tA}e^{tB}\right)' = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A + B)e^{tA}e^{tB}$$

e pure

$$\left(e^{t(A+B)}\right)' = (A + B)e^{t(A+B)}$$

Infine, segue subito per commutatività della somma matriciale:

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)} = e^{t(B+A)} = e^{tB}e^{tA}$$

■

**Proposizione 4.1.6 - Coniugazione**
*Siano $A \in \mathcal{L}(E)$, $P \in GL(E)$. Allora:*

$$exp(PAP^{-1}) = Pexp(A)P^{-1}$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Proposizione 4.1.7 - Diagonale a Blocchi**
*Siano $E_1, E_2$ spazi di Banach. Siano $A_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ e $A_2 \in \mathcal{L}(E_2)$.*
*Definisco:*

$$A_1 \oplus A_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right] \tag{4.1}$$

*Allora:* $\quad exp(A_1 \oplus A_2) = exp(A_1) \oplus exp(A_2)$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Proposizione 4.1.8 - Blocchi di Jordan**
*Considero la matrice nilpotente di dimensioni $m \times m$:*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

*Allora per $t \to +\infty$ ho che:*

$$e^{tN} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1}(1 + o(1))$$

*Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora dato il blocco di Jordan $B = I + \lambda N$:*

$$e^{tB} = e^{t\lambda} e^{tN}$$

*e per $t \to +\infty$:*

$$\|e^{tB}\| = |e^{t\lambda}| \cdot \|e^{tN}\| = e^{t\,Re\lambda} \cdot \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot (1 + o(1))$$

**Corollario 4.1.0.1**
*Sia $B$ blocco di Jordan di dimensione $m \times m$. Allora per $t \to +\infty$:*

$$\|e^{tB}\| = o(1) \quad \Leftrightarrow \quad Re\lambda < 0$$
$$\|e^{tB}\| = O(1) \quad \Leftrightarrow \quad Re\lambda < 0 \quad oppure \quad Re\lambda = 0 \wedge m = 1$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla Proposizione precedente. ■

## 4.2 Equazioni Differenziali Ordinarie Lineari

### 4.2.1 E.D.O. Lineari a Coefficienti Costanti

**Definizione 4.2.1 - E.D.O. a Coefficienti Costanti**
Un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti è:

$$u'(t) = A \cdot u(t)$$

dove l'applicazione lineare è $A \in \mathcal{L}(E)$ e la funzione $u : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ è derivabile su tutto $I$.

*Osservazione 4.2.1 - Caso* $\mathbb{R}^n$
Nel caso $E = \mathbb{R}^n$ l'equazione differenziale della Definizione 4.2.1 equivale al sistema:

$$\begin{cases} u_1' = a_{1,1}u_1 + \cdots + a_{1,n}u_n \\ \qquad \cdots \\ u_n' = a_{n,1}u_1 + \cdots + a_{n,n}u_n \end{cases}$$

**Definizione 4.2.2 - Problema di Cauchy Omogeneo**
Il problema di Cauchy omogeneo associato a questa E.D.O. a coefficienti costanti è trovare $u : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ derivabile, tale che $\forall\, t \in I$:

$$\begin{cases} u'(t) = A \cdot u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $A \in \mathcal{L}(E)$ e dove $u_0 \in E$.

**Teorema 4.2.1 - Esistenza e Unicità della soluzione**
*Il problema di Cauchy della Definizione 4.2.2 ha una unica soluzione:*

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot u_0$$

*Dimostrazione.* Sia $u(t)$ soluzione al problema di Cauchy omogeneo. Moltiplico l'equazione differenziale per $e^{-tA}$ e si ottiene che:

$$0 = e^{-tA}u'(t) - e^{-tA}Au(t) = e^{-tA}u'(t) - Ae^{-tA}u(t) = \left(e^{-tA}u(t)\right)'$$

Ma allora $e^{-tA}u(t)$ è costante sull'intervallo in cui è definita $I$. Segue:

$$e^{-tA}u(t) = e^{-t_0A}u(t_0) = e^{-t_0A}u_0$$

per cui riscrivendo $u(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot u_0$ si ottiene la formula della soluzione per il problema di Cauchy.
Essa è unica perché potrei riapplicare lo stesso procedimento ad ogni soluzione $v(t)$ del problema di Cauchy. ■

**Definizione 4.2.3 - Problema di Cauchy Non Omogeneo**
Il problema di Cauchy non omogeneo associato a questa E.D.O. a coefficienti costanti è trovare $u : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ derivabile, tale che $\forall\, t \in I$:

$$\begin{cases} u'(t) = A \cdot u(t) + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $A \in \mathcal{L}(E)$, $b \in C(I, E)$ e dove $u_0 \in E$.

**Teorema 4.2.2 - Esistenza e Unicità della soluzione**
*Il problema di Cauchy della Definizione 4.2.3 ha una unica soluzione:*

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds$$

*Dimostrazione.* Sia $u : I \to E$ soluzione di classe $C^1$. Con lo stesso argomento del caso omogeneo, si ottiene:

$$e^{-tA} \left(u'(t) - Au(t)\right) = e^{-tA} b(t)$$

per cui:

$$\left(e^{-tA} u(t)\right)' = e^{-tA} b(t)$$

Integrando la funzione:

$$e^{-tA} u(t) = e^{-t_0 A} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s) ds$$

per cui l'unica scrittura della soluzione sarà:

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds$$

■

**Proposizione 4.2.1 - Casi Particolari**
*Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Ho 3 casi, ognuno con 3 proposizioni equivalenti.*

***Caso A***

1. *Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono $o(1)$ per $t \to +\infty$*
2. $\|e^{tA}\| = o(1)$
3. $Spec(A) \subset \{z \in \mathbb{C} | Re(z) < 0\}$

***Caso B***

1. *Le soluzioni di* $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ *sono* $O(1)$ *per* $t \to +\infty$
2. $\|e^{tA}\| = O(1)$
3. $Spec(A) \subset \{z \in \mathbb{C} | Re(z) \leq 0\}$ *e* $Spec(A) \cap i\mathbb{R}$ *è semisemplice*[1]

***Caso C***

1. *Le soluzioni di* $u' = Au$ *sono limitate in* $\mathbb{R}$
2. $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{tA}\| < +\infty$
3. $Spec(A) \subset i\mathbb{R}$ *e* $Spec(A)$ *è semisemplice*

*Dimostrazione.* ———————— ■

### 4.2.2 E.D.O. Lineari a Coefficienti Variabili

**Definizione 4.2.4 - E.D.O. a Coefficienti Variabili**
Un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti variabili è:

$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$$

dove la funzione $u : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ è derivabile su tutto $I$, $b \in C^0(I, E)$ e il cammino $A \in C^0(I, \mathcal{L}(E))$.

**Definizione 4.2.5 - Problema di Cauchy**
Il problema di Cauchy legato alla E.D.O. lineare a coefficienti variabili è trovare $u : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ tale che:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $u_0 \in E$.

**Lemma 4.2.1**
*Sia* $u \in C^1(I, E)$ *soluzione di* $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$. *Allora:*

$$u(t) \neq 0 \ \forall\, t \in I \quad \textit{oppure} \quad u(t) = 0 \ \forall\, t \in I$$

[1] Lo $spec(A)$ si definisce "semisemplice" se $\forall\, \lambda \in spec(A)$ si ha $m_{geom}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che il luogo di zeri di $u$ è un aperto in $I$. Infatti, dato che $I$ è connesso e che $\{u \neq 0\} = u^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$ è aperto, deve per forza valere che $\{u = 0\} = I$ o $\{u = 0\} = \emptyset$, ovvero la tesi.
Sia $t_0 \in \{u = 0\}$. Sia $J \subseteq I$ intorno di $t_0$ ed intervallo tale che:

$$|J| \cdot \|a\|_{\infty,J} < 1$$

(condizione che viene verificata da qualche $J$ in quanto $A$ è continua e localmente limitata).
Ma allora per ogni $t \in J$ vale che:

$$u(t) = u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)ds = \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)ds$$

quindi per il Teorema del Valor Medio integrale:

$$\|u(t)\| \leq |t - t_0| \cdot \|A\|_{\infty,J} \cdot \|u\|_{\infty,J}$$

Passando quindi al $\sup_{t \in J}$:

$$\|u\|_{\infty,J} \leq |J| \cdot \|A\|_{\infty,J} \cdot \|u\|_{\infty,J}$$

ma per ipotesi avevamo $|J| \cdot \|a\|_{\infty,J} < 1$ per cui deve per forza valere $\|u\|_{\infty,J} = 0$ ovvero $J \subseteq \{u = 0\}$. Quindi $\{u = 0\}$ è aperto. ∎

**Teorema 4.2.3 - Unicità della soluzione**
*Due soluzioni del Problema di Cauchy 4.2.5 coincidono sull'intersezione dei loro domini.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Lemma 4.2.1: date infatti $u, v$ soluzioni dello stesso problema di Cauchy su uno stesso dominio $I$, allora la funzione $u - v : I \to \mathbb{R}$ risolve il problema omogeneo.
Per il Lemma, $u - v = 0$ su tutto $I$ in quanto $(u - v)(t_0) = u_0 - u_0 = 0$, cioè $u$ e $v$ coincidono. ∎

**Proposizione 4.2.2 - Operatore di Transizione**
*Sia $A \in C^0(I, \mathcal{L}(E))$. Allora esiste $W = W_A \in C^0(I \times I, \mathcal{L}(E))$ tale che:*

- *esista $\partial_1 W \in C^0(I \times I, \mathcal{L}(E))$*
- *per ogni $t, s \in I$ vale* $\begin{cases} \partial_1 W(t, s) = A(t) \cdot W(t, s) \\ W(s, s) = id_E \end{cases}$

*Dimostrazione.* Costruiamo l'operatore $W(t,s)$ con la Serie di Peano-Baker. Consideriamo la successione $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(I\times I, L(E))$ definita per induzione come:

$$\begin{cases} v_0(t,s) = id_E \\ v_{k+1}(t,s) = \int_s^t A(\tau)v_k(\tau,s)d\tau \end{cases}$$

Definisco allora $W_A(t,s) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t,s)$.
Proviamo che la serie è normalmente convergente sui compatti $J \times J \subseteq I \times I$ dove $J$ intervallo chiuso limitato. Sappiamo che:

$$v_k(t,s) = \int_s^t \int_s^{\tau_k} \int_s^{\tau_{k-1}} \cdots \int_s^{\tau_2} A(\tau_k)A(\tau_{k-1})\dots A(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{\infty,J\times J} &\le \left| \int_s^t \int_s^{\tau_k} \int_s^{\tau_{k-1}} \cdots \int_s^{\tau_2} \|A\|_{\infty,J}^k d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \right| \\ &= \|A\|_{\infty,J}^k \cdot \left| \int_s^t \int_s^{\tau_k} \int_s^{\tau_{k-1}} \cdots \int_s^{\tau_2} 1 d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \right| \\ &= \|A\|_{\infty,J}^k \frac{|t-s|^k}{k!} \le \|A\|_{\infty,J}^k \frac{|J|^k}{k!} \end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\|W_A\|_{\infty,J\times J} \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|J|^k \|A\|_{\infty,J}^k}{k!} = e^{|J|\cdot\|A\|_{\infty,J}} < +\infty$$

Ma allora la serie di funzioni continue converge uniformemente sui compatti a $W_A$ che apparterrà a $C^0(I \times I, L(E))$.
Inoltre, si osserva subito che $\partial_1 v_{k+1}(t,s) = A(t)v_k(t,s)$ quindi:

$$\partial_1 \left[ \sum_{k=0}^{m+1} v_k(t,s) \right] = \sum_{k=0}^{m} A(t)v_{k+1}(t,s) = A(t)\sum_{k=0}^{m} v_{k+1}(t,s)$$

e per il Teorema del Limite Sotto Segno di Derivata per $m \to +\infty$ si ha la convergenza uniforme sui compatti. Segue che:

$$\partial_1 W(t,s) = A(t)W(t,s)$$

■

**Teorema 4.2.4 - Esistenza della soluzione nel caso omogeneo**
*Considero il Problema di Cauchy omogeneo:*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t) \cdot u(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

*Allora la sua soluzione sarà* $u(t) = W(t, t_0)[u_0]$.

*Dimostrazione.* Dato l'operatore di transizione $W$ definito nella Proposizione 4.2.2, si verifica subito che:

$$u'(t) = \partial_1 W(t, t_0)[u_0] = A(t) \cdot W(t, t_0)[u_0] = A(t)u(t)$$

e che:

$$u(t_0) = W(t_0, t_0)[u_0] = id_E[u_0] = u_0$$

dunque la funzione $u(t)$ così definita risolve il Problema di Cauchy omogeneo. ■

**Proposizione 4.2.3 - Proprietà dell'operatore $W_A$**
*L'operatore di transizione $W$ definito nella Proposizione 4.2.2 ha le seguenti proprietà:*

1. $\partial_1 W_A(t, s) = A(t) \cdot W_A(t, s) \quad \forall\, t, s \in I$
2. $W(s, s) = id_E \quad \forall\, s \in I$
3. $W(t, s) \cdot W(s, r) = W(t, r) \quad \forall\, t, s, r \in I$
4. $W(t, s) \cdot W(s, t) = id_E \quad \forall\, t, s \in I$
5. *Esiste il differenziale parziale:* $\partial_2 W_A(t, s) = -W_A(t, s) \cdot A(s) \quad \forall t, s \in I$
6. *L'operatore $W_A$ è di classe* $C^1(I \times I, \mathcal{L}(E))$
7. *Se $E$ è uno spazio di dimensione finita, allora* $W_{-A^T} = W_A^{-T}$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Teorema 4.2.5 - Esistenza della soluzione nel caso non omogeneo**
*Considero il Problema di Cauchy non omogeneo:*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

*Allora la sua soluzione sarà* $u(t) = W(t, t_0)[u_0] + \int_{t_0}^{t} W(t, \tau) b(\tau) d\tau$.

*Dimostrazione.* ——————————— ■

*Osservazione 4.2.2 - $W_A$ costruito in una variabile*
Sia il punto iniziale $t_0 \in I$ fissato. Allora $\forall\, t, s \in I$ posso costruire $W(t,s)$ come funzione in una variabile:

$$W(t,s) = W(t,t_0) \cdot W(s,t_0)^{-1}$$

Infatti, basta usare le proprietà 3 e 4 della Proposizione 4.2.3:

$$W(t,s) = W(t,t_0) \cdot W(t_0,s) = W(t,t_0) \cdot W(s,t_0)^{-1}$$

**Proposizione 4.2.4 - Mappa $W$**
*Considero la mappa:*

$$\begin{aligned} W : C^0(I, \mathcal{L}(E)) &\to C^0(I \times I, \mathcal{L}(E)) \\ A &\mapsto W_A \end{aligned}$$

*Tale mappa è $C^{+\infty}$ da $(C^0(I, \mathcal{L}(E)), \|\cdot\|_{\infty,I})$ a $(C^0(I \times I, \mathcal{L}(E)), \|\cdot\|_{\infty,I\times I})$. In particolare, si ha che*

$$DW(A)[H] = \int_{t_0}^{t} W_A(t,\tau) \cdot H(\tau) \cdot W_A(\tau,t_0)d\tau$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Lemma 4.2.2 - Sviluppo di $det(I + H)$**
*Sia $H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. Per $H \to 0$ vale:*

$$det(I + H) = 1 + trH + o(H)$$

*Dimostrazione.* Usando lo sviluppo di Leibnitz di $det(I + H)$ si trova:

$$\begin{aligned} det(I + H) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (I + H)_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (\delta_{i,\sigma(i)} + h_{i,\sigma(i)}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 + h_{i,i}) + O(\|H\|^2) = 1 + \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} + O(\|H\|^2) \\ &= 1 + tr(H) + O(\|H\|^2) \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.2.6 - Formula del Determinante Wronskiano**
*Sia* $A \in C^0(I, \mathcal{M}(n, \mathbb{C}))$*. Per ogni* $t, s \in I$ *definisco* $w(t,s) = detW_A(t,s)$*. Vale:*

$$\begin{cases} \partial_t w(t,s) = trA(t) \cdot w(t,s) \\ w(s,s) = 1 \end{cases}$$

*Si ottiene allora che:*

$$w(t,s) = e^{\int_s^t trA(\tau)d\tau}$$

*Dimostrazione.* Sia $\delta > 0$. Posso scrivere la derivata parziale di $W(t,s)$ nella prima variabile come:

$$\begin{aligned} W(t+\delta, s) &= W(t,s) + \partial_1 W(t,s) \cdot \delta + o(\delta) = W(t,s) + \delta A(t) W(t,s) + o(\delta) \\ &= (I + \delta A(t) + o(\delta)) \cdot W(t,s) \end{aligned}$$

Passando ai determinanti allora:

$$\begin{aligned} det\,(W(t+\delta,s)) &= det\,(I + \delta A(t) + o(\delta)) \cdot det\,(W(t,s)) \\ &= (1 + \delta tr(A(t)))det\,(W(t,s)) + o(\delta) \end{aligned}$$

grazie al Lemma 4.2.2. Nella notazione introdotta nel Teorema:

$$w(t+\delta,s) = w(t,s) + \delta tr(A(t)) \cdot w(t,s) + o(\delta)$$

che è la definizione di derivata parziale: $\partial_1 w(t,s) = tr(A(t))\, w(t,s)$. ■

### 4.2.3 E.D.O. Lineare a Coefficienti Periodici

Considereremo in questa Sezione 4.2.3 $E = \mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$, distinguendo i due casi ove necessario.

**Definizione 4.2.6 - Sistema con soluzione periodica**
Sia $A \in C^0_T(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$ un cammino $T$-periodico. Consideriamo il sistema:

$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) \quad \leftrightsquigarrow^{2} \quad u(t) = W(t,0) \cdot u(0)$$

Esso ammette una soluzione periodica se esiste $x_0 \in E$ tale che:

$$x_0 = u(T) = W_A(T,0)[x_0]$$

cioè equivalentemente l'operatore $W_A(t,0)$ ha autovalore 1.

[2] Per quanto visto nella Sezione 4.2.2, il sistema equivale alla seconda scrittura.

*Osservazione 4.2.3 - Sistema equivalente*
Nella pratica, invece di esprimere la soluzione con $W_A(t,0)$, si può descrivere una soluzione di:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) \\ X(0) \in GL(n, \mathbb{C}) \end{cases}$$

dove $X \in C^0_T(\mathbb{R}, \mathcal{M}(n, \mathbb{C}))$.
Data tale soluzione, allora $X(t) = W(t,0) \cdot X(0)$ ed è invertibile $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (in quanto $X(0)$ e $W(t,0)$ invertibili). Il particolare, posso scrivere le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ come:

$$u(t) = X(t) \cdot u_0$$

e la condizione di periodicità, definita nella Definizione 4.2.6, diventa:

$$X(T) \cdot u_0 = X(0) \cdot u_0$$

cioè 1 è autovalore di $X(0)^{-1} \cdot X(T)$.
A conferma di questo, $X(0)^{-1} \cdot X(T)$ e $W(T,0)$ sono coniugate:

$$X(0)^{-1} \cdot X(T) = X(0)^{-1} \cdot W(T,0) \cdot X(0)$$

*Osservazione 4.2.4 - Periodicità di $W(t,s)$*
Nelle ipotesi della Definizione 4.2.6, vale che per ogni $t, s \in \mathcal{R}$:

$$W_A(t+T, s+T) = W_A(t,s)$$

Infatti entrambe risolvono l'equazione differenziale $\partial_t W(t,s) = A(t) \cdot W(t,s)$:

$$\begin{aligned} \partial_t W(t+T, s+T) &= A(t+T) \cdot W(t+T, s+T) \\ &= A(t) \cdot W(t+T, s+T) \end{aligned}$$

quindi per unicità della soluzione di $u'(t) = A(t)u(t)$ entrambe sono l'unico operatore di transizione.
In particolare, sfruttando questa proprietà, per $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W(mT, 0) &= W(mT, (m-1)T) \cdot \dots \cdot W(2T, T) \cdot W(T, 0) \\ &= W(T,0)^m \end{aligned}$$

La condizione di periodicità per $W(mT,0)$ è che abbia autovalore 1. Data l'uguaglianza $W(mT,0) = W(T,0)^m$, equivalentemente $W(T,0)$ ha autovalori che sono radici $m$-esime dell'unità.

**Definizione 4.2.7 - Matrice di Monodromia**
Definisco come Matrice di Monodromia del sistema $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ come:

$$M_T(X) = X(0)^{-1} \cdot X(T) = X(0)^{-1} \cdot W_A(T, 0) \cdot X(0)$$

**Fatterello 4.2.1 - Invertibili come Esponenziali in $\mathbb{C}^n$**
*Ogni matrice $M \in GL(n, \mathbb{C})$ è l'esponenziale per una matrice $L \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.*

*Dimostrazione.* Considero la forma di Jordan[3] per la matrice $M$:

$$M = P \cdot \Big[ \bigoplus_{1 \le j \le r} \lambda_j \Big( I + \frac{1}{\lambda_j} N_{m_j} \Big) \Big] \cdot P^{-1}$$

dove $P \in GL(n, \mathbb{C})$.
Allora senza perdere generalità si restringe lo studio ai singoli blocchi diagonali: proviamo che una matrice nella forma $I + N$ con $N^n = 0$ (cioè $N$ nilpotente) si può scrivere in forma esponenziale.
Definisco per $z \in \mathbb{C}$ il polinomio $Q(z)$:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k}$$

ossia come polinomio di Taylor di $log(1 + z)$ all'ordine $n - 1$, cioè:

$$log(1 + z) = Q(z) + O(z^m)$$

da cui:

$$e^{Q(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q(z)^k}{k!} = 1 + z + z^n H(z)$$

dove $H(z)$ è una serie di potenze in $z$.
Considero allora $Q(z)$ come polinomio di $N$, definisco $L = Q(N)$:

$$e^L = e^{Q(N)} = I + N + N^n \cdot H(N) = I + N$$

ossia la tesi. ■

**Proposizione 4.2.5 - Scrittura per Soluzioni fondamentali in $\mathbb{C}^n$**
*Sia $X(t) \in GL(n, \mathbb{C})$ soluzione fondamentale del sistema $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$. Essa si può riscrivere come:*

$$X(t) = P(t) \cdot e^{tB}$$

*dove $P(t)$ è $T$-periodica e $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.*

[3] Uso la notazione di matrice diagonale a blocchi definita in 4.1.

*Dimostrazione.* Per il Fatto 4.2.1, esiste $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ tale che $e^{TB} = M_T$ matrice di monodromia del sistema $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$. Allora:

$$e^{TB} = M_T = X(0)^{-1} \cdot X(T)$$

$$X(0) = X(T) \cdot e^{-TB}$$

Posso allora considerare l'esponenziale $e^{tB}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
In particolare, definisco il cammino $P(t) \in GL(n, \mathbb{C})$:

$$P(t) = X(t) \cdot e^{-tB} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Con questa definizione, si dimostra che $P(t)$ è $T$-periodica, infatti:

$$P(0) = X(0) = X(T) \cdot e^{-TB} = P(T)$$

che è proprio la condizione di $T$-periodicità. ■

**Fatterello 4.2.2 - Invertibili come Esponenziali in $\mathbb{R}^n$**
*Per ogni matrice $M \in GL(n, \mathbb{R})$, $M^2$ è l'esponenziale per una matrice $L \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.*
*Ne segue una discussione analoga a quella della Proposizione 4.2.5: data $X(t) \in GL(n, \mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale del sistema $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ allora è possibile scrivere:*

$$X(t) = P(t) \cdot e^{tB}$$

*dove $P(t)$ è $2T$-periodica e $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.*

*Dimostrazione.* E' solo una "curiosità" per il lettore. (cit. Majer) ■

**Proposizione 4.2.6 - Proprietà di $M_T$**
*La matrice di monodromia $M_T$ del sistema $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ ha le seguenti proprietà:*

1. *$u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ ha soluzione $T$-periodica $\Leftrightarrow$ $M_T$ ha autovalore 1.*
   *In particolare, ha $k$ soluzioni indipendenti se l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica $k$.*

2. *$u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ ha soluzione $mT$-periodica $\Leftrightarrow$ $M_T$ ha come autovalore una radice $m$-esima dell'unità.*
   *In particolare, ha $k$ soluzioni indipendenti se gli autovalori radici $m$-esime dell'unità hanno molteplicità geometrica totale $k$.*

3. *$M_T$ è coniugata a $W(T, 0)$.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Definizione 4.2.8 - Moltiplicatori di Floquet**
Gli autovalori di $M_T(X)$ (o equivalentemente del coniugato $W_A(T,0)$) vengono chiamati moltiplicatori di Floquet.

**Proposizione 4.2.7 - Casi Particolari**
*Sia $A \in C^0_T(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$ un cammino $T$-periodico. Ho 3 casi, ognuno con 3 proposizioni equivalenti.*

***Caso A***

1. *Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono $o(1)$ per $t \to +\infty$*
2. $\|X(t)\| = o(1)$
3. $Spec(M_T(X)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

***Caso B***

1. *Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono $O(1)$ per $t \to +\infty$*
2. $\|X(t)\| = O(1)$
3. $Spec(M_T(X)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ *e* $Spec(M_T(X)) \cap \{|z| = 1\}$ *è semisemplice*[4]

***Caso C***

1. *Le soluzioni di $u'(t) = A(t) \cdot u(t)$ sono limitate su $\mathbb{R}$*
2. $\|X(t)\|_{\infty,\mathbb{R}} < +\infty$
3. $Spec(M_T(X)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *e* $Spec(M_T(X))$ *è semisemplice*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

[4]Lo $spec(A)$ si definisce "semisemplice" se $\forall\, \lambda \in spec(A)$ si ha $m_{geom}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$

## 4.3 Equazioni Differenziali Ordinarie

In questa Sezione 4.3, considereremo $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach, con particolare attenzione per $E = \mathbb{R}^n$.

### 4.3.1 Definizione di E.D.O.

**Definizione 4.3.1 - Equazione Differenziale Ordinaria**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times E$ un aperto. Un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale, si definisce come:

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

dove $f : \Omega \to E$ e l'incognita è $u : \mathbb{R} \to E$.
Un'equazione differenziale di ordine $k$ si definisce come:

$$u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), ..., u^{(k-1)}(t))$$

**Proposizione 4.3.1 - Riformulazione ad E.D.O. di primo ordine**
*Considero l'equazione differenziale di ordine $k$:*

$$u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), ..., u^{(k-1)}(t))$$

*Essa si può ricondurre ad un'equazione di primo ordine sullo spazio $E^{k-1}$. Considero infatti $x(t) \in E^{k-1}$ come:*

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ ... \\ u^{(k-1)}(t) \end{bmatrix}$$

*Allora l'equazione differenziale si può scrivere $x'(t) = F(t, x(t))$ dove:*

$$F(t, x(t)) = F\left(t, \begin{bmatrix} u(t) \\ u^{(2)} \\ ... \\ u^{(k-1)}(t) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ u^{(2)}(t) \\ ... \\ f(t, u(t), u'(t), ..., u^{(k-1)}(t)) \end{bmatrix}$$

*Affronteremo quindi il caso delle E.D.O. di primo ordine, da cui si può ricavare poi un metodo di soluzione generale.*

**Definizione 4.3.2 - Soluzione Locale**
Una soluzione locale dell'equazione $u'(t) = f(t, u(t))$ definita come sopra è

una funzione $u : I \to E$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto ed $u$ derivabile su $I$. In particolare deve valere:

$$\begin{cases} graf(u) \subseteq \Omega \\ u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall\, t \in I \end{cases}$$

*Osservazione 4.3.1 - $u'$ continua*
Dato che $f$ ed $u$ continue, allora $u'(t) = f(t, u(t))$ composizione di continue, quindi è continua. Segue che $u \in C^1$.

*Osservazione 4.3.2*
In generale, le soluzioni possono non ricoprire interamente il dominio di $f$, ossia $\mathbb{R} \times E$.
Ad esempio, prendiamo per $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f(t, x(t)) = 1 + x(t)^2$$

Allora una soluzione a questa equazione è $x(t) = tan(t-c)$ con $c \in \mathbb{R}$, infatti:

$$\begin{aligned} f(t, x(t)) &= f(t, tan(t-c)) = 1 + tan^2(t-c) \\ &= \frac{1}{cos^2(t-c)} = (tan(t-c))' = x'(t) \end{aligned}$$

ovvero il dominio di $x(t)$ sarà il solo intervallo $]c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}[$.

**Definizione 4.3.3 - Problema di Cauchy**
Il problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria di primo grado è:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $(t_0, x_0) \in \Omega$ e l'incognita è $u : I \in \mathbb{R} \to E$ con $t_0 \in I$.

### 4.3.2 Teorema di Cauchy - Lipschitz - Picard - Lindelöf

**Definizione 4.3.4 - Ipotesi di Lipschitz (IdL)**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto. La funzione $f : \Omega \to E$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz se $f$ è continua e per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$ esistono $L, \varepsilon, \delta > 0$ tali che:

- $\big[t_0 - \delta, t_0 + \delta\big] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$
- per ogni $t \in \big[t_0 - \delta, t_0 + \delta\big]$ e per ogni $x, x' \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ vale:

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L\|x - x'\|$$

Equivalentemente, $f$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz se e solo se:

- $f$ continua
- $f$ localmente[5] Lipschitziana nella seconda variabile

*Osservazione 4.3.3 - Condizione sufficiente per Ipotesi di Lipschitz*
Se $f \in C^0$ tale che $D_2 f \in C^0$ allora $f$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Teorema del Valor Medio. ■

*Osservazione 4.3.4 - Caso $f$ lineare*
Sia $\Omega = I \times E \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto. Sia $A \in C^0(I, L(E))$ cammino continuo. Sia $f : \Omega \to E$ dove $f(t,x) = A(t) \cdot x$.
Allora per ogni $J \in I$ chiuso, $x, x' \in E$:

$$\|f(t,x) - f(t,x')\| \leq \|A(t)\|_{\infty,J} \cdot \|x - x'\|$$

ovvero $f$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz.

**Proposizione 4.3.2 - Caso di dimensione finita**
*Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \to E$ una mappa che soddisfa le ipotesi di Lipschitz. Sia $K \subseteq \Omega$ un compatto tale che per ogni $t \in I$ sia convesso[6]:*

$$K_t = \big\{x \in E \mid (t,x) \in K\big\} = j_t^{-1}(K)$$

*Allora $f\big|_K$ è Lipschitziana nella seconda variabile.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Corollario 4.3.0.1**
*Nel caso $E = \mathbb{R}^n$ la Proposizione 4.3.2 è particolarmente rilevante.*
*Supponiamo $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soddisfi le ipotesi di Lipschitz. Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$.*
*Allora (data la natura dello spazio normato $\mathbb{R}^n$) esistono $\varepsilon, \delta > 0$ per cui i compatti saranno nella forma:*

$$K = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

[5] Per "localmente" si intende in un intorno di $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$, non solo in un intorno della seconda variabile $x_0 \in E$

[6] Consideriamo in particolare $j_t : E \to \mathbb{R} \times E$ l'immersione tale che $j_t(x) = (t,x)$

**Proposizione 4.3.3 - Unicità locale della soluzione sotto IdL**
*Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto ed $f : \Omega \to E$ funzione che soddisfa le ipotesi di Lipschitz. Allora due soluzioni locali $u_1$ e $u_2$ del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*coincidono in un intorno di $t_0$.*

*Dimostrazione.* Siano dalle ipotesi di Lipschitz: $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ ed $L$ costante di Lipschitz per la seconda variabile.
Consideriamo quindi $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e $B = \bar{B}(x_0, \varepsilon)$, con $J \times B \subseteq \Omega$ in modo che $f|_{J\times B}$ sia $L$-lipschitziana.
Date $u_1$ ed $u_2$ soluzioni del problema di Cauchy, senza perdere generalità (a meno di prendere $\delta$ più piccolo) si vuole che $u_1(J) \subseteq B$ e $u_2(J) \subseteq B$ e che $\delta \cdot L < 1$.
Ma allora, siccome $u_1(t_0) = u_2(t_0) = x_0$:

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_{t_0}^{t} (u_1'(\tau) - u_2'(\tau))\, d\tau = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, u_1(\tau) - f(\tau, u_2(\tau))))\, d\tau$$

Ma allora, siccome $(\tau, u_i(\tau)) \in J \times B$ per ogni $\tau \in J$ e $i = 1, 2$:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq |t - t_0| \cdot L \cdot \|u_1 - u_2\|_{\infty,J} \leq \delta L \cdot \|u_1 - u_2\|_{\infty,J}$$

Prendendo il $\sup\limits_{t\in J}$ si ottiene che:

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty,J} \leq \delta L \|u_1 - u_2\|_{\infty,J}$$

e siccome $\delta L < 1$ allora $\|u_1 - u_2\|_{\infty,J} = 0$. Cioè $u_1 = u_2$ su tutto $J$. ∎

**Corollario 4.3.0.2 - Uguaglianza sull'intersezione di domini**
*Nelle ipotesi della Proposizione 4.3.3, date due soluzioni $u_1$ e $u_2$, esse coincidono sull'intersezione dei loro domini:*

$$I = dom(u_1) \cap dom(u_2)$$

*Dimostrazione.* Il corollario segue dal fatto che $J = \{t \in I | u_1(t) = u_2(t)\}$:

- $J$ è aperto, in quanto intorno di ogni suo punto.
- $J$ è chiuso in quanto luogo degli zeri di $u_1(t) - u_2(t) = 0$ ($u_1 - u_2$ è una funzione continua, quindi la controimmagine di $\{0\}$ chiuso, è chiusa).

Allora, essendo $I$ un compatto, $I = J$. ■

**Corollario 4.3.0.3 - Soluzione Massimale**
*Nelle ipotesi di Lipschitz, un problema di Cauchy ha soluzione massimale, data per inclusione sul dominio.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Corollario 4.3.0.2. ■

**Teorema 4.3.1 - Esistenza e Unicità della soluzione sotto IdL**
*Siano $E, \|\cdot\|$ uno spazio di Banach e $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$. Siano:*

- $(t_0, x_0) \in \Omega$
- $\delta, \varepsilon > 0$ *e siano* $J = \big[t_0 - \delta, t_0 + \delta\big]$ *e* $B = \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ *tali che* $J \times B \subseteq \Omega$
- $f : \Omega \to E$ *una funzione L-Lipschitz su* $J \times B$ *nella seconda variabile*

*Supponiamo inoltre che* $\delta \cdot \|f\|_{\infty, J\times B} \leq \varepsilon$.
*Allora il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*ha una soluzione unica* $u : J \to E$. -

*Osservazione 4.3.5 - Enunciato più debole*
La dimostrazione del Teorema diventa più semplice supponendo che $\delta L < 1$. Questo rende però il risultato più debole.

*Dimostrazione.* Riformuliamo la tesi come un problema di Punto Fisso, osservando l'equivalenza tra:

1. il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2. il problema di Punto Fisso:

$$\begin{cases} u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ u \in C^0(J, B) = \bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq C^0(J, E) \end{cases}$$

Se $u \in C^0(J, E)$ risolve il problema (2) allora la funzione $u'(t) = f(t, u(t))$ è continua (composizione di continue) quindi $u \in C^1(J, B)$ e vale

$$u(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))d\tau = x_0$$

cioè $u$ risolve (1).
Se $u$ risolve il problema (1), vale che:

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(\tau)d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))d\tau$$

ed inoltre $u(J) \subseteq B$. Supponendo che entrambe le proprietà vengano verificate, $u$ risolverebbe (2). Dimostriamo l'inclusione $u(J) \subseteq B$. Se per assurdo esistesse $t^* \in J$ tale che $\|u(t^*) - x_0\| > \varepsilon$. Senza perdere generalità, sia $t^* \in [t_0, t_0 + \delta[$. Possiamo considerare:

$$t_1 = min \{t \in [t_0, t^*] \mid \|u(t) - x_0\| = \varepsilon\}$$

che esiste perché $u$ continua e l'insieme di cui prendiamo il minimo è chiuso non vuoto.
Allora per ogni $\tau \in [t_0, t_1[$ vale che $(\tau, u(\tau)) \in J \times B$ quindi

$$|u'(\tau)| = |f(\tau, u(\tau))| \leq \|f\|_{\infty, J\times B}$$

Ma allora, per il Teorema del Valor Medio per Curve:

$$\varepsilon = \|u(t_1) - u(t_0)\| \leq |t_1 - t_0| \cdot \sup_{\tau\in[t_0,t_1]} \|u'(\tau)\| < \delta\|f\|_{\infty, J\times B} \leq \varepsilon$$

che è assurdo (l'ultima disuguaglianza vale per ipotesi).
Dimostriamo che vi è un'unica soluzione al problema (2) di Punto Fisso. Consideriamo la mappa:

$$\begin{array}{rccc} T: & B_\infty = \bar{B}(x_0, \varepsilon) & \longrightarrow & C^0(J, E) \\ & v & \longmapsto & Tv \end{array}$$

dove per ogni $t \in J$:

$$Tv(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, v(\tau))d\tau$$

Allora osserviamo che $T(B_\infty) \subseteq B_\infty$ in quanto se $v \in B_\infty$ allora per ogni $(\tau, v(\tau)) \in J \times B$ vale che $\|f(\tau, v(\tau))\| \leq \|f\|_{\infty, J\times B}$ e allora:

$$\begin{aligned} \|Tv(t) - x_0\| = \| \int_{t_0}^{t} f(\tau, v(\tau))d\tau\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f\|_{\infty, J\times B} d\tau \right| \\ &\leq |t - \tau| \cdot \|f\|_{\infty, J\times B} \leq \delta \cdot \|f\|_{\infty, J\times B} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

quindi passando a $\sup\lim_{t\in J}$:

$$\|Tv - x_0\|_{\infty,J} \leq \varepsilon$$

cioè $Tv \in B_\infty$.
Si conclude allora in diversi modi:

1. assumendo l'ipotesi $dL < 1$, risulta che $T$ è una contrazione di costante $dL$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty,J}$. Infatti per ogni $v, w \in B_\infty$ e per ogni $t \in J$:

$$\begin{aligned}\|Tv(t) - Tw(t)\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, w(\tau)))\, d\tau\right| \\ &\leq |t - t_0| \cdot L \cdot \|v - w\|_{\infty,J} \leq \delta L \|v - w\|_{\infty,J}\end{aligned}$$

   passando a $\sup_{t\in J}$:

$$\|Tv - Tw\|_{\infty,J} \leq dL \cdot \|v - w\|_{\infty,J}$$

   cioè $T$ è $\delta L$-lipschitziana. Il Teorema delle Contrazioni garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione al problema del Punto Fisso (e quindi al problema di Cauchy).

2. nel caso generale, dimostriamo che esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $T^{\overline{n}}$ sia contrazione su $B_\infty$. Questo basta per dare l'esistenza e unicità della soluzione al problema di Punto Fisso.
   Siano $v, w \in B_\infty$, $t \in J$ ed $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che:

$$\|T^n v(t) - T^n w(t)\| \leq \frac{L^n}{n!} |t - t_0|^n \cdot \|v - w\|_{\infty,J}$$

   per induzione su $n \in \mathbb{N}$:

   - <u>$n = 0$</u>: è banale in quanto $\|v(t) - w(t)\| \leq \|v - w\|_{\infty,J}$
   - <u>$n > 0$</u>: supponiamo che la disuguaglianza valga per $n - 1$. Allora:

$$\begin{aligned}\|T^n v(t) - T^n w(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, T^{n-1}v(\tau)) - f(\tau, T^{n-1}w(\tau))\right) d\tau\right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \left\|f(\tau, T^{n-1}v(\tau)) - f(\tau, T^{n-1}w(\tau))\right\| d\tau \\ &\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} \|T^{n-1}v(\tau) - T^{n-1}w(\tau)\| d\tau \\ &\leq \frac{L^n}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0|^{n-1} d\tau \\ &= \frac{L^n}{(n-1)!} \int_{0}^{|t-t_0|} s^{n-1} ds \leq \frac{L^n}{n!} |t - t_0|^n\end{aligned}$$

Passando a $\sup_{t \in J}$:

$$\|T^n v - T^n w\|_{\infty,J} \leq \frac{(\delta L)^n}{n!} \|v - w\|_{\infty,J}$$

e per andamento asintotico di $\frac{(\delta L)^n}{n!}$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{(\delta L)^{\overline{n}}}{\overline{n}!} < 1$.
Allora $T^{\overline{n}}$ è contrazione e questo conclude la dimostrazione.

■

### 4.3.3 Caratterizzazione delle Successioni Massimalmente Definite

**Proposizione 4.3.4 - Estensione di Dominio delle soluzioni (limiti)**
*Sia $u : ]a, b[ \to E$ una soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \to E$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz.*
*Supponiamo che $\exists \lim_{t \to b} u(t) = x$ tale che $(b, x) \in \Omega$.*
*Allora esiste $\delta > 0$ tale che $u$ ammette un'estensione propria ad una soluzione con dominio $]a, b + \delta[$.*

*Dimostrazione.* Sia $v$ una solizione locale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(b) = x \end{cases}$$

dove $v : ]b - \delta, b + \delta[ \to E$. Definiamo quindi la funzione $u_\star : ]a, b + \delta[ \to E$ tale che:

$$u_\star(t) = \begin{cases} u(t) & a < t < b \\ v(t) & b \leq t < b + \delta \end{cases}$$

Per costruzione $u_\star$ è continua su $]a, b + \delta[$ ed $u'_\star$ è continua su $]a, b[$ e su $]b, b + \delta[$. Vale inoltre che $u'_\star(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in ]a, b + \delta[ \setminus \{b\}$. Per ipotesi esiste il limite:

$$\lim_{t \to b} u'_\star(t) = \lim_{t \to b} f(t, u_\star(t)) = f(b, x)$$

in quanto sia per il limite sinistro che destro $u'(t)$ e $v'(t)$ sono continue. Quindi per il Principio della rimozione di singolarità per funzioni derivabili $u_\star$ è derivabile in $t = b$ con $u'(b) = f(b, u(b))$. ■

**Proposizione 4.3.5 - Estensione di Dominio delle soluzioni (successioni)**
*Sia* $u : ]a, b[ \to E$ *una soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*dove* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \to E$ *soddisfa le ipotesi di Lipschitz.*
*Supponiamo che* $\exists\, (t_k)k \in \mathbb{N} \subseteq ]a, b[$ *tale che:*

- $t_k \longrightarrow b \quad e \quad u(t_k) \longrightarrow x$
- $(b, x) \in \Omega$

*Allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $u$ *ammette un'estensione propria ad una soluzione con dominio* $]a, b + \delta[$.

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 4.3.4 basta provare che esiste $\lim_{t \to b} u(t)$.
Siccome $f$ è continua, è localmente limitata in $(b, x) \in \Omega$: esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $R = [b - \varepsilon_0] \times \overline{B}(x, \varepsilon_0) \subseteq \Omega$ vale $\|f\|_{\infty,R} = M < \infty$.
Supponiamo per assurdo che non esista il limite $\lim_{t \to b} u(t)$ o che $\lim_{t \to b} u(t) \neq x$.
Equivalentemente, ciò significa che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$u([t_k, b[) \nsubseteq B(x, \varepsilon) \tag{4.2}$$

e si può supporre senza perdere generalità che $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Definiamo:

$$t_k^* = \min \{t \in [t_k, b[ \mid \|u(t) - x\| \geq \varepsilon\}$$

ben definito in quanto è un insieme non vuoto per l'osservazione 4.2.
Quindi per ogni $t \in [t_k, t_k^*]$ vale che $\|u(t) - x\| \leq \varepsilon$ perciò:

$$\|u'(t)\| = \|f(t, u(t))\| \leq \|f\|_{\infty,[t_k,b]\times\overline{B}(x,\varepsilon)} \leq \|f\|_{\infty,R} = M$$

Ma allora per $k \to +\infty$:

$$\|u(t_k^*) - u(t_k)\| \leq (t_k^* - t_k)M = o(1)$$

e al contempo:

$$\|u(t_k^*) - u(t_k)\| \geq \|u(t_k^*) - x\| + \|x - u(t)\| \geq \varepsilon \neq o(1)$$

che è un assurdo. Segue che esiste il limite $\lim_{t \to b} u(t) = x$ e questo conclude. ∎

**Proposizione 4.3.6 - "Fuga dai Compatti"**
*Sia* $u : ]a, b[ \to E$ *una soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*dove* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times E \to E$ *soddisfa le ipotesi di Lipschitz. Sia* $K \subseteq \Omega$ *un compatto.*
*Allora* $\exists \alpha, \beta$ *tali che* $a < \alpha \leq \beta < b$ *tali che:*

$$(t, u(t)) \notin K \quad \forall\, t \in ]a, b[ \setminus \{\alpha, \beta\}$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che la tesi sia falsa. Esisterebbe una successione $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq ]a, b[$ convergente ad $a$ o $b$ (supponiamo che converga a $b$, l'altro caso è analogo) tale che $\{(t_k, u(t_k))\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$.
A meno di estrarre una sottosuccessione, per compattezza di $K$ supponiamo che $(t_k, u(t_k)) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (b, x) \in \Omega$.
Ma allora per la Proposizione 4.3.5 il dominio di definizione della soluzione $u$ non è massimale, assurdo. ∎

### 4.3.4 Dipendenza dai Dati Iniziali

**Teorema 4.3.2 - Dipendenza continua da $u(t_0) = x_0$**
*Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ *aperto e* $f \in C^0(\Omega, E)$ *una funzione che soddisfi le ipotesi di Lipschitz.*
*Sia* $u : I \to E$ *soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*e sia* $t_1 \in I$.
*Allora esistono* $\rho > 0$ *e* $c \geq 0$ *tali che per ogni problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_0) = y_0 \\ \|x_0 - y_0\| < \rho \end{cases}$$

*ha soluzione massimalmente definita* $v : J \to E$ *tale che:*

- $t_1 \in J$ *e* $t_0 < t_1$
- $\|v - u\|_{\infty,[t_0,t_1]} \leq c \cdot \|x_0 - y_0\|$

*Osservazione 4.3.6*
In altre parole, perturbando il dato iniziale $x_0$ del problema di Cauchy, la soluzione varia in modo continuo e localmente Lipschitziano.

*Dimostrazione.* Possiamo ricoprire il compatto $graf(u|_{[t_0,t_1]})$ (compatto in quanto immagine continua di $[t_0, t_1]$ compatto) con un numero finito di aperti della forma $\{J_i \times B_i\}_{i\in I}$ dove per ogni $i \in I$ vale che $J_i \times B_i \subseteq \Omega$ e che $f|_{J_i\times B_i}$ sia $L_i$-lipschitziana (per Ipotesi di Lipschitz).
Sia a questo punto[7]:

$$\varepsilon = \min_{t_0\leq t\leq t_1} d\left((t, u(t))\ ,\ \Omega \setminus \bigcup_{i\in I}(J_i \times B_i)\right)$$

Allora definisco:

$$T_\varepsilon = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times E \mid \|x - u(t)\| < \varepsilon\}$$

Per costruzione allora $T_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i\in I}(J_i \times B_i) \subseteq \Omega$.
Ponendo $L = \max_{i\in I} L_i$ otteniamo che $f|_{T_\varepsilon}$ è $L$-lipschitziana nella seconda variabile. Inoltre osserviamo che $f$ è limitata su $T_\varepsilon$ da:

$$M := \max_{t_0\leq t\leq t_1} \|f(t, u(t))\| + \varepsilon L \geq \|f\|_{\infty,T_\varepsilon}$$

Dimostriamo che le richieste del teorema sono soddisfatte ponendo:

$$\begin{cases} \rho = \varepsilon \cdot e^{-L(t_1-t_0)} \\ c = e^{L(t_1-t_0)} \end{cases}$$

Sia $y_0 \in E$ tale che $\|x_0 - y_0\| < \rho$ e consideriamo la soluzione massimale $v : ]a, b[ \to E$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_0) = y_0 \end{cases}$$

e dico che $graf\left(v|_{[t_0,b[}\right) \nsubseteq T_\varepsilon$. Infatti se per ogni $t \in [t_0, b[$ valesse che $(t, v(t)) \in T_\varepsilon$, allora:

$$\|v'(t)\| = \|f(t, v(t))\| \leq M$$

cioè $v|_{[t_0,b[}$ sarebbe $M$-lipschitziana quindi esisterebbe $\lim_{t\to b} v(t)$ e per la Proposizione 4.3.4 la soluzione $v$ non sarebbe massimale.

[7] Considero la distanza $d$ punto-insieme che si vede essere continua.

Ma allora esiste $t \in [t_0, b[$ tale che $(t, v(t)) \neq T_\varepsilon$ cioè $t > t_1$ oppure $\|u(t) - v(t)\| > \varepsilon$. In particolare sia:

$$t_* = \min \{t \in [t_0, b[ \mid \|u(t) - v(t)\| \geq \varepsilon\} \cup \{t_1\}$$

per costruzione $t_0 \leq t_* \leq t_1$ ed in particolare noto che se $t_* < t_1$ per continuità vale per forza che:

$$\|u(t_*) - v(t_*)\| = \varepsilon$$

Vediamo che questa uguaglianza è assurda, allora per forza $t_* = t_1$.
Definiamo $r = \|u(t_0) - v(t_0)\|$. Per ogni $t \in [t_0, t_*]$ vale:

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\| &= r + \| \int_{t_0}^{t} (u'(\tau) - v'(\tau))\, d\tau \\
&\leq r + \int_{t_0}^{t} \|u'(\tau) - v'(\tau)\| d\tau \\
&= r + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\|\, d\tau \\
&\leq r + L \int_{t_0}^{t} \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

Definiamo $\phi(t) = \int_{t_0}^{t} \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau$. Allora questa funzione risolve il sistema:

$$\begin{cases} \phi'(t) \leq r + L\phi(t) \\ \phi(t_0) = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando per il fattore derivante $e^{-tL}$ la prima disequazione del sistema si ottiene:

$$0 \geq e^{-tL} (\phi'(t) - L\phi(t) - r) = \left[ e^{-tL} \left( \phi(t) + \frac{r}{L} \right) \right]'$$

Quindi la funzione $e^{-tL} \left( \phi(t) + \frac{r}{L} \right)$ è decrescente su $[t_0, t_*]$ quindi in particolare per ogni $t \in [t_0, t_*]$:

$$e^{-tL} \left( \phi(t) + \frac{r}{L} \right) \leq e^{-t_0 L} \frac{r}{L}$$

cioè riscrivendo:

$$r + L\phi(t) \leq e^{L(t - t_0)} r$$

Ma a questo punto vediamo che:

$$\|u(t) - v(t)\| = \phi'(t) \leq r + L\phi(t) \leq e^{L(t-t_0)} < e^{L(t-t_0)} \rho = \varepsilon$$

e per $t = t_*$ la disequazione diventa:

$$\|u(t_*) - v(t_*)\| < \varepsilon$$

che è un assurdo per costruzione di $t_*$. Quindi $t_* = t_1$. Ma allora:

$$\|u - v\|_{\infty,[t_0,t_1]} \leq e^{L(t_1-t_0)}\|x_0 - y_0\| = c\|x_0 - y_0\|$$

ovvero la tesi. ■

**Definizione 4.3.5 - Flusso o Soluzione Generale**
Sia $u'(t) = f(t, u(t))$ una E.D.O. che soddisfa le ipotesi di Lipschitz (dove $f : \Omega \to E$).
Sia $\Xi \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ sottoinsieme dove $\forall\, (t_1, t_0, x_0) \in \Xi$:

- $u : I \in \mathbb{R} \to E$ soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- $t_1 \in I$

La mappa $\xi : \Xi \to E$ definita come:

$$\xi(t_1, t_0, x_0) = u(t_1)$$

si chiama flusso o soluzione generale.

**Definizione 4.3.6 - Mappe $\tau_*$ e $\tau^*$**
Nelle ipotesi della Definizione 4.3.5, definisco per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$:

$$\tau_*(t_0, x_0) = \inf\big(dom(u)\big) \in [-\infty, +\infty[$$
$$\tau^*(t_0, x_0) = \sup\big(dom(u)\big) \in ]-\infty, +\infty]$$

*Osservazione 4.3.7 - Proprietà di $\xi$*
Valgono in particolare le seguenti proprietà:

- $\xi(t, t, x) = x \quad$ per ogni $(t, x) \in \Omega$
- $\xi(t_2, t_1, \xi(t_1, t_0, x_0)) = \xi(t_2, t_0, x_0)$

*Dimostrazione.* Seguono dalla definizione di $\xi$. ■

**Teorema 4.3.3 - Teoremi sulle mappe $\tau_*$ e $\tau^*$**
*Considero le ipotesi della Definizione 4.3.5. Allora $\Xi$ è aperto e il flusso $\xi : \Xi \to E$ è una funzione continua nella prima e terza variabile. Inoltre:*

- $\tau_* : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ *è semicontinua superiormente*
- $\tau^* : \Omega \to ]-\infty, +\infty]$ *è semicontinua inferiormente*

*Dimostrazione.* La continuità di $\xi : \Xi \to \Omega$ nella prima variabile segue dal fatto che le soluzioni ai problemi di Cauchy sono continue.
Dimostriamo la semicontinuità inferiore di $\tau^*$ vedendo che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $\{\tau^* > c\}$ aperto.
Sia $(t_0, x_0) \in \{\tau^* > c\} \subseteq \Omega$. Ma allora sia $\tau^*(t_0, x_0) = T$. Consideriamo $t^* \in \mathbb{R}$ tale che $\max(c, t_0) < t^* < T$, allora la soluzione massimalmente definita al problema di Cauchy con dati iniziali $u(t_0) = x_0$ sarà ben definita su tutto $[t_0, t^*]$.
Per il Teorema 4.3.2, esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $y_0 \in B(x_0, \rho)$ la soluzione massimale $v$ al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è tale che $t^* \in dom(v)$. In altre parole, $[t_0, t^*] \times \{t_0\} \times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$. Con un analogo argomento per $\tau_*$ si ottiene che esiste $\tau_*(t_0) < t_* < t_0$. Quindi:

$$[t_*, t^*] \times \{t_0\} \times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$$

Inoltre, sappiamo che $t_0 \in [t_*, t^*]$. Per continuità di $\xi$ nella prima variabile esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$\xi(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, t_0, x_0) \subseteq B(\xi(t_0, t_0, x_0), \rho) = B(x_0, \varepsilon)$$

Ma allora osservo che per ogni $t_1 \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_1) = \xi(t_1, t_0, x_0) \end{cases}$$

coincidono ed in particolare coincidono i loro domini: $dom(u) = dom(v)$. Per cui per ogni $t_1 \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ vale che

$$[t_*, t^*] \times \{t_1\} \times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$$

Quindi in particolare:

$$[t_*, t^*] \times ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi \tag{4.3}$$

Ma allora per ogni $(t_1, x_1) \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \rho)$ vale che $\tau^*(t_1, x_1) \geq t^* > c$, ovvero:

$$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \rho) \subseteq \{\tau^* > c\}$$

Questo implica che $\{\tau^* > c\}$ è intorno di ogni suo punto $(t_0, x_0)$, ovvero $\{\tau^* > c\}$ è aperto. Con un ragionamento analogo si vede che $\tau_*$ è semicontinua superiormente.
Osserviamo che in questo modo abbiamo dimostrato $\Xi$ è un aperto. Ciò segue sempre dal fatto che per $(t_1, t_0, x_0) \in \Xi$ si possono scegliere $t_*, t^* \in \mathbb{R}$ affinché $\tau_*(t_0) < t_* < t_1 < t^* < \tau^*(t_0)$ ed $\varepsilon, \rho > 0$ tali che:

$$[t_*, t^*]\times]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, \rho) \subseteq \Xi$$

con lo stesso risultato di prima 4.3. Così $\Xi$ è intorno di ogni suo punto, aperto. ■

*Osservazione 4.3.8*
La dimostrazione potrebbe sembrare a prima lettura molto contorta. Tuttavia un'idea utile per motivare i passaggi può essere pensare al fatto che:

"$\Xi$ aperto" e "$\tau^*, \tau_*$ semicontinue inferiore e superiore rispettivamente"

sono nozioni equivalenti. Entrambi i fatti, poi, sono giustificati interamente dai risultati del Teorema 4.3.2. Riporto ora una figura che personalmente ritengo esplicativa:

**INSERIRE IMMAGINE**

**Teorema 4.3.4 - Dipendenza Differenziabile dai Dati**
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ aperto e sia $f : \Omega \to E$ tale che:*

$$\begin{cases} f \in C^0(\Omega, E) \\ D_2 f \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(E)) \end{cases}$$

*Allora $f$ soddisfa le ipotesi di Lipschitz e il flusso $\xi : \Xi \to E$ è una funzione $C^1$.*

*Dimostrazione.* Per il Teorema del Differenziale Totale 3.3.1 è sufficiente provare che che siano continui:

1. esiste $\partial_1 \xi \in C^0(\Omega, E)$
2. esiste $\partial_2 \xi \in C^0(\Omega, E)$
3. esiste $D_3 \xi \in C^0(\Omega, L(E))$

Infatti vediamo che:

1. dalla definizione di $\xi$ segue che $\partial_1\xi(t,s,x) = f(t,\xi(t,s,x))$ quindi per continuità della composizione:

$$(t,s,x) \longrightarrow (t,\xi(t,s,x)) \xrightarrow{f} f(t,\xi(t,s,x))$$

   anche $\partial_1\xi$ è continua.

2. supponendo che valgano (1) e (3), prendiamo l'identità valida per ogni terna $(t,s,x) \in \Xi$:

$$x = \xi\left(s,t,\xi(t,s,x)\right)$$

   Denotiamo per $t,x$ fissati: $u(s) = \xi(t,s,x)$. Ma allora l'identità si riscrive:

$$x = \xi(s,t,u(s))$$

   Siccome per il punto (3) la funzione $\xi$ ha differenziale nella terza variabile continuo (cioè invertibile), per il Teorema della Funzione Implicita 3.3.6 si ottiene che $u \in C^1$.

3. proviamo che esiste $D_3\xi(t,s,x) \in GL(E)$.
   L'idea è ricondursi ad una E.D.O. lineare a coefficienti variabili. Infatti supponendo che esista il differenziabile nella terza variabile, partiamo dall'identità:

$$\partial_1\xi(t,s,x) = f(t,\xi(t,s,x))$$

   Differenziando in $x$ (assumendo che i differenziali parziali commutino $\partial_1 D_3 = D_3\partial_1$) segue:

$$\partial_1 D_3\xi(t,s,x) = D_3\partial_1\xi(t,s,x) = D_2 f(t,\xi(t,s,x)) \circ D_3\xi(t,s,x)$$

   e dato che $\xi(t,t,x) = x$, allora $D_3\xi(t,t,x) = I_E$.
   Ma allora formuliamo un problema di Cauchy la cui soluzione sia proprio il differenziale $D_3\xi(t,s,x)$. Indichiamo $A(t) = D_2 f(t,\xi(t,s,x))$, allora:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(s) = I_E \end{cases}$$

   Il "candidato" differenziale è $D_3\xi(t,s,x) = W_A(t,s)$, l'operatore di transizione che risolve il problema di Cauchy.
   Dimostriamo che $W_A(t,s)$ verifica la definizione di differenziale, ovvero per $y \to x$:

$$\xi(t,s,y) - \xi(t,s,x) - W_A(t,s)[y-x] = o(\|x-y\|)$$

Chiamiamo $z(t) = \xi(t, s, y) - \xi(t, s, x) - W_A(t, s)[y - x]$. Allora:

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, \xi(t, s, y)) - f(t, \xi(t, s, x)) - A(t)W_A(t, s)[y - x] \\ &= A(t)\left[\xi(t, s, y) - \xi(t, s, x) - W_A(t, s)[x - y]\right] + f(t, \xi(t, s, y)) - \\ &\quad - f(t, s, \xi(t, s, x)) - A(t)\left[\xi(t, s, y) - \xi(t, s, x)\right] \\ &= A(t)z(t) + h(t) \end{aligned}$$

dove:

$$h(t) = f(t, \xi(t, s, y)) - f(t, s, \xi(t, s, x)) - A(t)\left[\xi(t, s, y) - \xi(t, s, x)\right]$$

Per la Formula di Variazione con Costante Arbitraria:

$$z(t) = \int_s^t W_A(t, \tau)h(\tau)d\tau$$

per cui passando alla norma:

$$\|z(t)\| \leq |t - s| \cdot \|W_A\|_{\infty,[s,t]\times[s,t]} \cdot \|h\|_{\infty,[s,t]}$$

Concludiamo provando che $\|h\|_{\infty,[s,t]} = o(\|x - y\|)$, denotando i punti $X = \xi(t, s, x)$ e $Y = \xi(t, s, y)$. Per ogni $\tau \in [s, t]$:

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t, Y) - f(t, s, X) - A(t)\left[Y - X\right] \\ &= f(t, Y) - f(t, X) - D_2 f(t, X)[Y - X] \end{aligned}$$

Si applica il Teorema del Valor Medio[8] alla funzione $f(t, \cdot)$ tra $X$ ed $Y$:

$$\begin{aligned} \|h(\tau)\| \leq &\|\xi(\tau, s, y) - \xi(\tau, s, x)\| \cdot \sup_{0\leq\lambda\leq 1} \|D_2 f(\tau, \xi(\tau, s, x) + \\ &+ \lambda[\xi(\tau, s, y) - \xi(\tau, s, x)] - D_2 f(\tau, \xi(\tau, s, x)))\| \end{aligned}$$

Passando alla norma $\|\cdot\|_{\infty,[s,t]}$:

$$\begin{aligned} \|h\|_{\infty,[s,t]} &\leq \|\xi(\cdot, s, y) - \xi(\cdot, s, x)\|_{\infty,[s,t]} \cdot \sup_{\substack{0\leq\lambda\leq 1 \\ \tau\in[s,t]}} \|D_2 f(\cdot, \xi(\cdot, s, x) + \\ &\quad + \lambda[\xi(\cdot, s, y) - \xi(\cdot, s, x)] - D_2 f(\cdot, \xi(\cdot, s, x)))\| \\ &= O(\|y - x\|) \cdot o(\|y - x\|) = o(\|y - x\|) \end{aligned}$$

che implica la tesi.

■

[8] Il TVM applicato all'operatore $X \mapsto F(X) - LX$ si scrive come:
$\|F(Y) - F(X) - L(X)[Y - X]\| \leq \|Y - X\| \cdot \sup_{0\leq\lambda\leq 1} \|DF(X + \lambda(Y - X)) - L\|$

## 4.4 Esercitazioni su E.D.O.

### 4.4.1 E.D.O. a Variabili Separabili

**Definizione 4.4.1 - E.D.O. a Variabili Separabili**
Una E.D.O. a variabili separabili è del tipo:

$$f(t,x) = h(t) \cdot g(x)$$

**Fatterello 4.4.1 - Metodo di Integrazione**
*Sia lo spazio di Banach*[9] $E = \mathbb{R}$.
*Un metodo utile per risolvere il problema di Cauchy relativo alle E.D.O. a variabili separabili*

$$\begin{cases} \dot{x} = h(t) \cdot g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*è utilizzare la seguente identità:*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{t_0}^{t} h(s) ds$$

*In particolare, è possibile ricavare informazioni qualitative sulle soluzioni del problema di Cauchy o, individuando delle primitive, trovare la soluzione stessa al problema.*

*Dimostrazione.* Divido la discussione in 2 casi:

- il caso $g(x_0) = 0$ è banale. Infatti allora $x(t) = x_0$ costante è soluzione:

$$\dot{x} = h(t) \cdot g(x) = h(t) \cdot g(x_0) = 0$$

- se $g_(x_0) \neq 0$, allora almeno in un intorno $I$ di $x_0$ la funzione $g$ non si annulla. In questo intorno si può allora dividere per $g(x)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = h(t) \cdot g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ g(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in I \end{cases}$$

  Posso dividere l'equazione differenziale per $g(x(t))$ e ottengo:

$$\frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = h(t)$$

[9] Questa condizione è necessaria in quanto è necessario il buon ordinamento dello spazio.

e integrando rispetto a $t$ ottengo:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^{t} h(s) ds$$

Basta ora fare la sostituzione $\tau = x(s)$ e si ottiene la tesi in quanto il termine a sinistra diventa:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)}$$

■

### 4.4.2 Equazioni di Bernoulli

**Definizione 4.4.2 - Equazione di Bernoulli**
Un problema di Cauchy legato ad un'equazione di Bernoulli è della forma:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $\alpha \in [0, +\infty)$.

**Fatterello 4.4.2 - Metodo di risoluzione**
*Da un'equazione di Bernoulli è possibile ricondursi ad una E.D.O. lineare con il metodo seguente.*
*Il caso $y(x_0) = 0$ ha come soluzione banale $y(x) = 0$ costante.*
*Se $y(x_0) \neq 0$, allora $y$ non si annullerà in un intorno $I$ di $x_0$. In questo caso è lecito dividere per $y^\alpha$ l'equazione di Bernoulli:*

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{a(x)}{y^{\alpha-1}} + b(x)$$

*e se chiamo $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ ottengo l'equazione differenziale lineare:*

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(x)z + b(x)$$

### 4.4.3 E.D.O. con Teorema di Dini

Supponiamo di voler risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{A(x,y)}{B(x,y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dico che se la forma differenziale $A(x,y)dx - B(x,y)dy$ è esatta (nell'intorno di $(x_0,y_0)$) e se $F(x,y)$ è una sua primitiva tale che $F(x_0,y_0)=0$, allora si può applicare il Teorema di Dini 3.3.7 l'equazione differenziale si scrive come segue:

$$y' = -\frac{\partial_x F(x,y)}{\partial_y F(x,y)}$$

e quindi $y(x)$ in un intorno di $x_0$ non può che essere la funzione implicita associata a $F$ nelle vicinanze di $(x_0,y_0)$.

### Caso in cui $Adx - Bdy$ non è esatta

(che si verifica $\iff$ non è chiusa se mi restringo in un intorno di $(x_0,y_0)$)
In questo caso potrebbe essere utile ricorrere alla tecnica del fattore integrante.
Data la forma $Adx - Bdy$ posso trovare $M(x,y)$ tale che AMdx - BMdy è esatta? Se ci riesco e se $F$ è una sua primitiva locale, allora il luogo di zeri risolverà $y' = \frac{AM}{BM} = \frac{A}{B}$
Per capire se $\exists M$ che renda la forma $MAdx - MBdy$ esatta (localmente)[10] è equivalente a capire se trovo $M$ tale che

$$\partial_y(MA) + \partial_x(MB) = 0 \iff \partial_y MA + M\partial_y A + \partial_x MB + M\partial_x B = 0$$

(questa è quella che si chiama una forma del trasporto). Vediamo ora una serie di casi particolari:

- $\frac{\partial_y A + \partial_x B}{B}$ dipende solo da $x$. Dico che in questo caso trovo un fattore integrante $M' = M(x)$. Infatti se scelgo $M$ dipendente solo da $x$ allora l'equazione per $M$ diventa:

  $$M\partial_y A + \partial_x MB + M\partial_x B = 0 \iff \partial_x M = M(\frac{-\partial_y A - \partial_x B}{B})$$

  quindi posso scegliere $M = e^{-\int_{x_0}^{x}(\frac{\partial_y A + \partial_x B}{B} d\tau)}$

- $\frac{\partial_y A + \partial_x B}{A}$ dipende solo da $y$. Sto assumendo qui $A(x_0,y_0) \neq 0$. In questo caso cerco $M = M(y)$. Quindi l'equazione su $M$ si riduce a:

  $$\partial_y MA + M\partial_y A + M\partial_x B = 0$$

  quindi posso scegliere $M(y) = e^{-\int_{x_0}^{x}(\frac{\partial_y A + \partial_x B}{A} d\tau)}$

[10] Commento su chiusura min 28 da scrivere lezione 30/03

### 4.4.4 Studio di Soluzioni globali e non

**Proposizione 4.4.1 - Condizioni sufficienti per Soluzioni globali**
*Sia $f(t,x) : \mathbb{R} \times E \to E$ tale che:*

$$\|f(t,x)\| \leq A(t) + B(t)\|x\|$$

*dove $A, B \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
*Allora le soluzioni di $\dot{x} = f(t,x)$ sono globali su $\mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Definizione 4.4.3 - Soprasoluzioni e Sottosoluzioni**
Sia un'equazione differenziale $\dot{y} = f(x,y)$ e sia $z(x)$ una funzione definita su un intervallo $I$. Allora:

- $z$ è una soprasoluzione dell'equazione differenziale quando:

$$\dot{z}(x) \geq f(x, z(x)) \qquad \forall\, x \in I$$

- $z$ è una sottosoluzione dell'equazione differenziale quando:

$$\dot{z}(x) \leq f(x, z(x)) \qquad \forall\, x \in I$$

**Teorema 4.4.1 - Confronto sottosoluzioni e soprasoluzioni**
*Considero un'equazione differenziale $\dot{y} = f(x,y)$ che soddisfi le ipotesi di Lipschitz.*
*Siano $z(x)$ una soprasoluzione e $w(x)$ una sottosoluzione definite su un intervallo $I$. Segue che:*

- *Se $z(x_0) \geq w(x_0)$ per un certo $x_0 \in I$ allora:*

$$z(x) \geq w(x) \qquad \forall\, x \in I \cap [x_0, +\infty)$$

- *Se $z(x_0) \leq w(x_0)$ per un certo $x_0 \in I$ allora:*

$$z(x) \leq w(x) \qquad \forall\, x \in I \cap (-\infty, x_0]$$

*Dimostrazione.* Trattiamo il caso $z(x_0) \geq w(z_0)$. L'altro caso sarà analogo. Per ipotesi vale che:

$$\begin{cases} \dot{z}(x) \geq f(x, z(x)) \\ \dot{w}(x) \leq f(x, w(x)) \\ z(x_0) \geq w(x_0) \end{cases}$$

da cui facendo la differenza:

$$\begin{cases} \dot{w}(x) - \dot{z}(x) \leq f(x, w(x)) - f(x, z(x)) \\ z(x_0) - w(x_0) \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre possiamo considerare senza perdere generalità $I$ intervallo compatto. Infatti se fosse $I$ illimitato, potremmo suddividere l'intervallo in sottointervalli compatti, verificare la tesi e ottenere in questo modo che la disuguaglianza vale su tutto $I$.
Allora per compattezza di $I$, la Lipschitzianità di $f$ nella seconda variabile è globale (e non solo locale, come garanticono le ipotesi di Lipschitz). Scriviamo allora:

$$\begin{cases} \dot{w}(x) - \dot{z}(x) \leq L \cdot |w - z| \\ w(x_0) - z(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

Ora per concludere usiamo il seguente lemma, con $u(x) = w(x) - z(x)$, da cui segue subito la tesi. ■

**Lemma 4.4.1**
*Considero il sistema, per I intervallo:*

$$\dot{u}(x) \leq L \cdot |u(x)| \qquad \forall\, x \in I u(x_0) \leq 0$$

*dove* $x_0 \in I$. *Allora* $u(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in I \cap [x_0, +\infty)$.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista $\bar{x} > x_0$ tale che $u(\bar{x}) > 0$. Allora sicuramente esisterebbe $\xi \in [x_0, \bar{x})$ tale che $u(\xi) = 0$ e posso garantire che:

$$\big\{x \in [x_0, \bar{x}] \mid u(x) = 0\big\} \neq \emptyset$$

Posso allora trovare $x_1 = max\big\{x \in [x_0, \bar{x}] \mid u(x) = 0\big\}$. Ma allora per $x \in [x_1, \bar{x}]$ il valore assoluto della condizione 1 scompare, e rimane il sistema:

$$\begin{cases} \dot{u}(x) \leq Lu(x) \qquad \forall\, x \in [x_1, \bar{x}] \\ u(x_1) = 0 \end{cases}$$

Per cui si ottiene moltiplicando per $e^{-Lx}$:

$$e^{-Lx}\dot{u}(x) \leq e^{-Lx} L u(x)$$

da cui derivando:

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-Lx}u(x)\big) \leq 0$$

e per monotonia, confrontando gli estremi:

$$e^{-L\bar{x}}u(\bar{x}) \leq e^{-Lx_1}u(x_1) = 0$$

da cui ho un assurdo perchè per ipotesi $u(\bar{x}) > 0$. ■

**Teorema 4.4.2 - Lemma di Gromwall**
*Supponiamo che $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ sia continua e soddisfi la condizione:*

$$y(x) \leq A + B \int_{x_0}^{x} y(s) ds$$

*per ogni $x \in [x_0, x_1]$ e dove $A, B > 0$.*
*Allora per ogni $x \in [x_0, x_1]$ vale la stima:*

$$y(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}$$

*Dimostrazione.* Considero la funzione ausiliaria:

$$F(x) = A + B \int_{x_0}^{x} y(s) ds$$

Allora in particolare vale che $F'(x) = By(x)$. Ma per ipotesi, abbiamo che:

$$\begin{cases} F'(x) \leq B \cdot F(x) \\ F(x_0) = A \end{cases}$$

da cui moltiplicando la prima disuguaglianza si ottiene $e^{-Bx}F'(x) \leq Be^{-Bx}F(x)$ che riscrivo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\big(e^{-Bx}D(x)\big) \leq 0 \\ F(x_0) = A \end{cases}$$

e per monotonia, agli estremi risulta:

$$e^{-Bx}F(x) \leq e^{-Bx_0}A$$

da cui ottengo che $F(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}$. Per il Teorema 4.4.1, ottengo la tesi. ■

**Corollario 4.4.2.1**
*Sia lo spazio di Banach $X$. Supponiamo che:*

$$\|f(x, y)\|_X \leq C(x) + D(x) \cdot \|x\|_X$$

*dove $C, D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funzioni continue.*
*Allora ogni soluzione di $\dot{y}(x) = f(x, y)$ è definita globalmente su $\mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* Proviamo che le soluzioni sono definite globalmente sulle semirette a destra. Fatto questo, basta ripetere l'argomento per la soluzione $y(-x)$ della corrispettiva equazione differenziale (si nota che l'ipotesi resta

verificata) per ottenere la tesi.
Supponiamo per assurdo che esista $x^* > 0$ tale che $\lim\limits_{x\to(x^*)^-} \|y(x)\|_X = +\infty$.
Allora posso definire $C^* = \max\limits_{[0,x^*]} C(x)$ e $D^* = \max\limits_{[0,x^*]} D(x)$ per cui:

$$\begin{aligned}\|f(x,y(x))\|_X &\le C(x) + D(x)\|y(x)\|_X \\ &\le C^* + D^*\|y(x)\|_X\end{aligned}$$

Posso d'altra parte scrivere la versione integrale di $\dot{y} = f(x,y(x))$ come:

$$y(x) \le y(0) + \int_0^x f(s,y(s))ds$$

e passando alle norme, per ogni $x \in [0,x^*]$:

$$\begin{aligned}\|y(x)\| &\le \|y(0)\| + \int_0^x \|f(s,y(s))\|ds \\ &\le \|y(0)\| + \int_0^x \big(C^* + D^*\|y(s)\|_X\big)ds \\ &\le \big(\|y(0)\| + C^*x^*\big) + D^*\int_0^x \|y(s)\|ds\end{aligned}$$

che soddisfa le ipotesi del Lemma 4.4.2 per cui per ogni $x \in [0,x^*]$:

$$\|y(x)\| \le \big(\|y(0)\| + C^*x^*\big)e^{D^*x}$$

e passando al superiore:

$$\sup_{x\in[0,x^*)} \|y(x)\| \le \big(\|y(0)\| + C^*x^*\big)e^{D^*x^*} < +\infty$$

da cui ho un assurdo. Dato che non esiste tale $x^*$, allora la soluzione è definita su tutta la semiretta destra. ■

### 4.4.5 Stabilità dei Punti di Equilibrio - Teoria di Lyapunov

**Definizione 4.4.4 - Punto di Equilibrio Stabile**
Sia $x^* \in \mathbb{R}^d$ uno zero di $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Si dice che $x^*$ è un punto di equilibrio stabile (per tempi positivi) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f\,(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

soddisfa la condizione: $\sup_{t>0} \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$ se $\|x_0 - x^*\| < \delta$.

*Osservazione 4.4.1*
Il Teorema 4.3.2 di Dipendenza Continua dai dati iniziali ci garantisce che per ogni $T > 0$ fissato, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\sup_{t \in (0,T)} \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad se \quad \|x_0 - x^*\| < \delta$$

Tuttavia questo non basta, in quanto $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ dipende da $T$ e potrebbe succedere che:

$$\delta(\varepsilon, T) \overset{T \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

**Definizione 4.4.5 - Punto di Equilibrio Asintoticamente Stabile**
Il punto di equilibrio $x^*$ si dice asintoticamente stabile se è un punto di equilibrio stabile per cui:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*$$

**Definizione 4.4.6 - Funzionale di Lyapunov**
Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tale che $f(x^*) = 0$. Si chiama funzionale di Lyapunov una qualsiasi funzione $V : B^d(x^*, r) \to \mathbb{R}^+$ tale che:

1. $V(x) = 0$ se e solo se $x = x^*$
2. per ogni $x \in B^d(x^*, r)$ vale che $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$

**Teorema 4.4.3**
*Se esiste un funzionale di Lyapunov associato ad $f$ con $x^*$ punto di equilibrio, allora $x^*$ è stabile.*

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Teorema 4.4.4**
*Sia $V$ un funzionale di Lyapunov associato a $x^*$ ed $f$ che soddisfi per ogni $x \neq x^*$:*

$$\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$$

*Allora $x^*$ è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Teorema 4.4.5 - Teorema**
*Sia $x^*$ punto di equilibrio per $x' = f(x)$. Se si ha che*

$$Spec\,(Jf(x^*)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid Re z < 0\}$$

*allora $x^*$ è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* ———————————— ■

# Capitolo 5

# Teoremi di Densità

## 5.1 Equicontinuità e Ascoli-Arzelà

Seguono ora 3 definizioni equivalenti di equicontinuità.

**Definizione 5.1.1 - Insiemi Equicontinui di Mappe tra Metrici (1)**
Siano $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ spazi metrici.
Un insieme $\Lambda \subseteq Y^X$ si dice equicontinuo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, x' \in X$ e per ogni $f \in \Lambda$ vale:

$$d_X(x, x') < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

**Definizione 5.1.2 - Insiemi Equicontinui di Mappe tra Metrici (2)**
L'insieme $\Lambda$ definito come sopra è equicontinuo se la mappa valutazione

$$\begin{array}{rccc} val: & Y^X \times X & \longrightarrow & Y \\ & (f, x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

è uniformemente continua su $\Lambda \times X$ rispetto alla distanza[1] $d_\infty + d_X$.

**Definizione 5.1.3 - Insiemi Equicontinui di Mappe tra Metrici (3)**
Nelle ipotesi precendenti, tutte le $f \in \Lambda$ hanno stesso modulo di continuità.

**Proposizione 5.1.1**
*Le definizioni appena enunciate sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* Infatti:
$1 \Rightarrow 2$: $\forall f, f' \in \Lambda, \forall x, x' \in X$

$$\begin{aligned} d_Y(val(f, x'), val(f, x)) = d_Y(f'(x'), f(x)) &\leq d_Y(f'(x'), f(x')) + d_Y(f(x'), f(x)) \\ &\leq d_\infty(f, f') + d_Y(f(x'), f(x)) \end{aligned}$$

[1] dove, supponendo senza perdere generalità $d_Y$ limitata, $d_\infty + d_X = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$

Se vale (1), questa quantità si può rendere minore di ogni preassegnato $\varepsilon > 0$ con la sola condizione

$$\begin{cases} d_\infty(f, f') \leq \delta \\ d_X(x, x') \leq \delta \end{cases} \quad \textit{opportuno}$$

$2 \Rightarrow 3$ Se $val : \Lambda \times X \to Y$ è uniformemente continua ha un modulo di continuità $\omega$

$$d_Y(f'(x'), f(x)) \leq \omega(d_\infty(f, f') + d_X(x, x'))$$

In particolare se $f = f'$

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \omega(d_X(x, x')) \forall f \in \Lambda, \forall x, x' \in X$$

$3 \Rightarrow 1$ Dato $\varepsilon > 0$ ponendo $\delta > 0$ tale che $\omega(\delta) < \varepsilon$

■

**Lemma 5.1.1 - Convergenze in Equicontinui**
*Siano $(X, d)$ spazio metrico e $(E, \|\cdot\|)$ spazio normato. Sia $f_n : X \to E$ una successione di funzioni equicontinue*[2]*. Allora:*

1. *l'insieme $C = \{x \in X \mid f_n(x)$ è di Cauchy$\}$ è chiuso in $X$.*

2. *se $f_n$ converge puntualmente a $f : X \to E$, allora $f$ è $\omega$-continua (cioè equicontinua a $\{f_n\}$) e il limite è uniforme sui compatti.*

*Dimostrazione.* La tecnica è sempre quella di aggiungere e togliere termini misti.

1. Sia $x \in \overline{C}$. Sia $c \in C$. Per $p, q \in \mathbb{N}$ voglio vedere la "cauchyiezza":

$$\begin{aligned} \|f_p(x) - f_q(x)\| &\leq \|f_p(x) - f_p(c)\| + \|f_p(c) - f_q(c)\| + \|f_q(c) - f_q(x)\| \\ &\leq 2\omega(d(x, c)) + \|f_p(c) - f_q(c)\| \end{aligned}$$

allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\omega(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{4}$; siccome $x \in \overline{C} \exists c \in C$ tale che $d(x, c) \leq \delta$; per questo dato $c$, essendo $f_n(c)$ di Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall p, q \geq n_0$ RECUPERA (e se $E$ era Banach, $C = \{x : f_n(x)$ converge$\}$)

2. $\forall x, x' \in X$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n(x) - f_n(x')\| \leq \omega(d(x, x'))$$

[2] Ossia l'insieme $\{f_n\}$ è equicontinuo

Verifichiamo che $f_n \to f$ uniformemente sui compatti.
Sia K compatto $\subseteq X$, wlog $f = 0$ ($f_n - f \to 0$ puntualmente ed è equicontinua). Sia $x_n \in K$ tale che $\|f_n\|_{\infty,K} = \|f_n(x_k)\|$ per compattezza esiste una sottosuccessione $x_{k_j}$ convergente a $x^* \in K$

$$\begin{aligned}\|f_{k_j}(x_{k_j})\| &\leq \|f_{k_j}(x^*))\| + \|f_{k_j}(x^*) - f_{k_j}(x_{k_j})\| \\ &\leq \|f_{k_j}(x^*))\| + \omega(d(x^*, x_{k_j})) = o(1) \; per \; j \to \infty\end{aligned}$$

Quindi, per argomento di Urisohn (minuto 9.57), $\|f_n(x_n)\| \to 0$ cioè $\|f_n\|_{\infty,K} \to 0$

■

**Teorema 5.1.1 - Teorema di Ascoli-Arzelà**
*Siano $(X, d)$ spazio metrico compatto e $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach.*
*Sia $\Lambda \subseteq \left(C^0(X, E), \|\cdot\|_\infty\right)$. Allora $\Lambda$ è compatto se e solo se:*

1. *$\Lambda$ è chiuso*

2. *$\Lambda$ è equicontinuo*

3. *esiste $S \subseteq X$ denso tale che per ogni $x \in S$ l'insieme*

$$\Lambda(x) = \{f(x) \mid f \in \Lambda\} = val(\Lambda \times \{x\})$$

   *è relativamente compatto[3] in $E$.*

   (a) *oppure, condizione più forte $\Lambda(x). = ev(\Lambda \times X)$ è compatto*

*Dimostrazione.* $\Rightarrow$: Sia $\Lambda$ compatto. Allora:

- è chiuso (ogni compatto di uno spazio di Hausdorff è sempre chiuso)

- Siccome $val : C(X, E) \to E$ è continua (verificalo per esercizio) per il teorema di Heine è anche uniformemente continua e quindi $\Lambda$ è equicontinuo

- (vale addirittura la 3.a) Siccome $ev$ è continua e $\Lambda \times X$ è compatto (prodotto di due compatti), l'immagine $\Lambda(X) = ev(\Lambda \times X)$ è compatto

[3]Un insieme è relativamente compatto se la sua chiusura è compatta. Se $X$ è spazio metrico completo (esercizio) allora $Y$ relativamente compatto $\equiv$ totalmente limitato

$\Leftarrow$: Per questa implicazione, usiamo 5.1.1 Sia $\Lambda \subseteq C^0(X, E)$ con le proprietà 1,2,3. Proviamo che $\Lambda$ è sequenzialmente compatto. Sia $(f_n)_n$ una successione in $\Lambda$ $X$ è compatto quindi separabile; $S \subseteq X$ quindi $S$ è separabile. (Ricorda:la separabilità non è una proprietà ereditaria in generale, ma per spazi metrici invece si. $(S \equiv A_2)$ )
Sia $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso $\subseteq S$: $\overline{\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}} = X$.
Ora facciamo un argomento diagonale: $\exists$ sottosuccesione di $(f_k)_k, (f_{k,1})_k$ tale che $f_{k,1}(s_1)$ converge (semplicemente perchè $f_k(s_1) \subseteq \Lambda(s_1)$ relativamente compatto) $\exists$ una sottosuccessione $(f_{k,2})_k$ di $(f_{k,1})_k$ che converge in $s_2, (f_{k,2})_k$ etc.
Più formalmente: per induzione segue che $\exists$ una successione di sottosuccessioni consecutive $(f_{k,n})$ tale che

$$\begin{cases} (f_{k,n+1})_k \textit{è sottosuccessione della } (f_{k,n})_k \\ f_{k,n}(s_n) \textit{ converge } [\Lambda(s_k) \textit{ è relativamente compatto}] \end{cases}$$

dunque $f_{k,n}$ converge nei punti $s_1, \ldots, s_n$. Allora la $(f_{k,k})_k$ è definitivamente sottosuccessione di ciascuna $(f_{k,n})$ e quindi converge puntualmente su tutto l'insieme $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. A questo punto per il lemma, essendo le $f_k$ equicontinue $f_k$ converge puntualmente su tutto $X$; inoltre la convergenza è uniforme; e il limite appartiene a $\Lambda$ (che era chiuso) ■

*Dimostrazione.* Per un'altra dimostrazione del teorema: Siano $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ spazi metrici. Siano $\{x_j\}_{1\leq j\leq m} \subseteq X$, $\{y_i\}_{1\leq i\leq n} \subseteq Y$, rispettivamente una $\delta-$rete di $X$ e una $\varepsilon-$rete di $Y$ finite.
Sia $\omega$ un modulo di continuità, e

$$C_\omega := \{f : X \to Y \omega - \textit{continua}\}$$

Sia $\forall \alpha \in [n]^m$ ($\alpha$ multiindice) sia

$$\mathcal{S}_\alpha := \{f \in C_\omega : d_Y(f(x_j), y_{\alpha(j)}) \leq \varepsilon \ \forall j \in [n]\}$$

DISEGNO

Allora: $C_\omega = \bigcup_{\alpha\in[n]^m} S_\alpha$ [perchè ogni $f \in C_\omega$ appartiene a $S_\alpha$ per qualche $\alpha \in [n]^m$]
$S_\alpha$ ha diametro $\leq 2(\varepsilon + \omega(\delta))$ perchè se $f, g \in S_\alpha$ e $x \in X$, $x$ dista $\leq \delta$ da qualche $x_j$

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), y_{\alpha(j)}) + d(y_{\alpha(j)}, g(x_j)) + d(g(x_j), g(x)) \\ &\leq \omega(d(x, x_j)) + \varepsilon + \varepsilon + \omega(d(x, x_j)) \leq 2(\varepsilon + \omega(\delta)) \end{aligned}$$

Se scelgo $f_\alpha \in S_\alpha, \forall \alpha \in [n]^m$ ho trovato una $\eta-$rete finita, con $\eta = 2(\varepsilon + \omega(\delta))$, precisamente di $\leq n^m$ elementi.
CONSEGUENZA:
se $X, d_X$ e $Y, d_Y$ sono spazi metrici totalemente limitati e $\omega$ è un modulo di continuità anche $C_\omega \subseteq C(X, Y)$ è totalmente limitato.
Da qui segue la dimostrazione di $\Leftarrow$ di 5.1.1 con l'ipotesi $3.a$ $Y := \overline{\Lambda(X)}$ è compatto.

$\blacksquare$

## 5.2 Semicontinuità

**Definizione 5.2.1 - Topologia della Semicontinuità inferiore**
La topologia della semicontinuità inferiore su $\bar{\mathbb{R}}$ è data dagli aperti:

$$\tau_{inf} = \left\{ ]c, +\infty] \mid c \in \bar{\mathbb{R}} \right\} \cup \left\{ \bar{\mathbb{R}} \right\}$$

*Osservazione 5.2.1 - Compattezza in $\tau_{inf}$*
Un insieme $C \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ non vuoto è compatto in $\tau_{inf}$ se e solo se ha minimo.

**Definizione 5.2.2 - Semicontinuità inferiore**
Sia $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ dove $X$ è spazio topologico. $f$ è semicontinua inferiore se è continua rispetto a $\tau_{inf}$ su $\bar{\mathbb{R}}$.

**Definizione 5.2.3 - Semicontinuità inferiore sequenziale**
Sia $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$. E' semicontinua inferiore sequenzialmente se lo è rispetto a $\tau_{inf}$. Cioè se per ogni $x_k \to x^\star$:

$$\liminf_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_\star)$$

**Proposizione 5.2.1**
*Siano $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ semicontinua inferiore (sequenzialmente[4]) ed $X$ spazio topologico compatto (sequenzialmente). Allora $f$ ha minimo.*

*Dimostrazione.* $f(X)$ è compatto in $(\bar{\mathbb{R}}, \tau_{inf})$ che è non vuoto visto che $X$ stesso è non vuoto e quindi come visto ha minimo.
Sia $(x_k) \subset X$ una successione minimizzante: $f(x_k) \to \inf f(X)$; per compattezza sequenziale WLOG si può assumere $x_k$ convergente in $X$ a un punto $x^* \in X$. Allora per l'ipotesi di semicontinuità inferiore sequenziale

$$\inf f = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \liminf_{k \to \infty} f(x_k) \geq f(x^*)$$

quindi $x^*$ è minimo

■

**Proposizione 5.2.2**
*Sia $\{f_\lambda : X \to \bar{\mathbb{R}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di funzioni semicontinue inferiori. Allora l'inviluppo superiore $f(x) = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ è semicontinua inferiore.*

*Dimostrazione.* Infatti: per $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}, \sup A > c \iff \exists a \in A, a > c$, quindi $\forall c \in \bar{\mathbb{R}}, \forall x \in X$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) > c \iff \exists \lambda \in \Lambda : f(x)_\lambda > c$$

[4] La proposizione vale equivalentemente nel caso sequenziale.

cioè
$$\{\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda > c\} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{f_\lambda \in c\}$$

■

## 5.3 Lunghezza di Curve e Hopf-Rinow

**Definizione 5.3.1 - Lunghezza di curve in metrici**
Sia $(X, d)$ spazio metrico. Siano $\gamma : [a, b] \to X$ una curva e $P \in \mathbb{P}[a, b]$ una suddivisione.
Definiamo la lunghezza parziale di $\gamma$ su $P$ come:

$$l(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k-1}))$$

La lunghezza della curva $\gamma$ allora è:

$$l(\gamma, [a, b]) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} l(\gamma, P)$$

**Proposizione 5.3.1 - Proprietà**
*Valgono le seguenti proprietà:*

1. ***additività**: siano $a < c < b$ numeri reali e $\gamma : [a, b] \to X$ una curva. Allora:*
$$l(\gamma, [a, b]) = l(\gamma, [a, c]) + l(\gamma, [c, b])$$

2. ***invarianza per riparametrizzazione**: sia $\sigma : [a, b] \to [c, d]$ una funzione bigettiva monotona tra intervalli e sia $\gamma : [c, d] \to (X, d)$. Allora:*
$$l(\gamma \circ \sigma, [a, b]) = l(\gamma, [c, d])$$

3. ***scrittura con limite**: supponendo $\gamma \in C^0([a, b], X)$, allora:*
$$l(\gamma, [a, b]) = \lim_{|P| \to 0} l(\gamma, P)$$

4. ***scrittura con limite**: supponendo $\gamma \in C^1([a, b], E)$, dove $(E, \|\cdot\|)$ spazio normato. Allora:*
$$l(\gamma, [a, b]) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(x)\| dx$$

*Dimostrazione.* Per le relative dimostrazioni si consiglia di riguardare i propri appunti di Analisi 1, sperando che non siano già stati bruciati ■

**Proposizione 5.3.2 - Continuità del funzionale lunghezza rispetto all'intervallo**
*Siano* $\gamma \in C([a,b],X)$ *e* $L = l(\gamma,[a,b])$. *Allora il funzionale:*

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & [0,L] \\ x & \longmapsto & l(\gamma,[a,x]) \end{array}$$

*è continuo e crescente su* $[a,b]$.

*Dimostrazione.* La crescenza è ovvia.
Proviamo che è continua (a sinistra) in $b$: Sia $L' < L = \ell(\gamma,[a,b])$. Proviamo che esiste $b' < b$ tale che $\ell(\gamma,[a,b']) > L'$

DISEGNO

Per definizione esiste $P \in \mathbb{P}[a,b]$ tale che

$$L' < \sum_{k=1}^{n-1} d(\gamma(x_k),\gamma(x_{k-1}) = \ell(\gamma,P) - d(\gamma(x_{n-1}),\gamma(b))$$

(si può sempre prendere $P$ in modo che l'ultimo addendo, $d(\gamma(x_{n-1}),\gamma(b))$ sia piccolo, perchè $\gamma$ è continua in $b$) E poichè il termine a destra è

$$\ell(\gamma,P\backslash\{b\}) \leq \ell(\gamma,[a,x_{n-}])$$

si è trovato $b' := x_{n-1}$ tale che $L' < l(\gamma,[a,b'])$. Ciò prova la continuità in $b$. Allora considerando $\gamma|_{[a,c]}$ si ha che $\gamma$ è continua a sinistra in ogni $c \in [a,b]$. Considerando

$$\tilde{\gamma} : x \to \gamma(b-a+x) \in C([a,b],X$$

(ripercorre $\gamma$ alla rovescia) si ha che è continua a destra la $x \to \ell(\gamma,[x,b])$; poichè

$$\ell(\gamma,[a,x]) = \ell(\gamma,[a,b]) - \ell(\gamma,[x,b])$$

anche $x \to \ell(\gamma,[a,x])$ è continua a destra. ■

**Proposizione 5.3.3 - Continuità del funzionale lunghezza rispetto a $\gamma$**
*Il funzionale:*

$$\begin{array}{ccc} C([a,b],X) & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ \gamma & \longmapsto & l(\gamma,[a,b]) \end{array}$$

*è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme (e sequenzialmente semicontinuo inferiore rispetto alla convergenza puntuale.)*

*Dimostrazione.* Immediata dalla definizione

$$\ell(\gamma, [a,b]) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} \ell(\gamma, P)$$

e $\gamma \to \ell(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k-1})$ è continua e come ricordato, inviluppo superiore di funzioni semicontinuità inferiore è semicontinuità inferiore. ■

*Osservazione 5.3.1*
In altre parole:$\gamma : [a,b] \to X$ continua di lunghezza $L$ si può riparametrizzare su $[0, L+1]$ (o $[0, L+\varepsilon]$) in modo che sia $1-$Lip o anche riparametrizzare su $[0,1]$ in modo che sia $(L+1)-$Lip

**Teorema 5.3.1 - Teorema di Hopf-Rinow**
*Sia $(X,d)$ spazio metrico compatto e siano $x_0, x_1 \in X$ collegati da un cammino di lunghezza finita. Allora esiste un cammino di lunghezza minima tra quanti collegano $x_0$ e $x_1$.*
*In altre parole, se l'insieme*

$$C_{x_0,x_1} = \left\{ \gamma \in C([0,1], X) \mid \gamma(0) = x_0 \ , \ \gamma(1) = x_1 \ e \ l(\gamma, [0,1]) < \infty \right\}$$

*è non vuoto, allora il funzionale "lunghezza" $\gamma \mapsto l(\gamma, [0,1])$ ammette minimo in $C_{x_0,x_1}$.*

*Teorema di HR.* Per ipotesi esiste una curva continua fra $x_0, x_1$ si lunghezza finita $L$. Allora

$$\inf_{\gamma \in C_{x_0 x_1}} \ell(\gamma, [0,1]) = \inf_{\substack{\gamma \in C_{x_0 x_1} \\ \ell(\gamma([0,1]) \leq L}} \ell(\gamma, [0,1]) =^{5} \inf_{\substack{\gamma \in C_{x_0 x_1} \\ lip\gamma \leq L+1}} \ell(\gamma, [0,1])$$

e l'inf è quindi raggiunto per semicontinuità inferiore, viene da roba di inviluppo di sci, e compatezza ■

infatti data $\gamma : [a,c] \to X$ la $\widetilde{\gamma} : [0,1] \ni t \to \gamma(a,t)$ ha $\ell(\widetilde{\gamma}, [0,1]) = \ell(\gamma, [0,c])$ e $lip\ell(\widetilde{\gamma} = clip\gamma$

[5]che è un insieme più piccolo che però ha lo stesso inf

## 5.4 Polinomi di Bernstein

**Definizione 5.4.1 - Polinomi di Bernstein**
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ una funzione. Il suo polinomio di Bernstein di ordine $n \in \mathbb{N}$ è:

$$\big(B_n f\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

### 5.4.1 Costruzione euristica

Partendo dall'operatore derivata, dove $I \subset \mathbb{R}$ intervallo:

$$\begin{array}{rccc} D: & C^1(I) & \longrightarrow & C^0(I) \\ & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

si può considerare la sua approssimazione discreta $D_n$ definita:

$$D_n f(x) = \frac{f\left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}x\right)}{\frac{1}{n}}$$

Si può riscrivere questa approssimazione usando altri operatori lineari "traslazione" e "moltiplicazione" definiti su $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$:

$$\begin{cases} \tau_h(f(\cdot)) = f(\cdot + h) \\ \delta_h(f(\cdot)) = f(h\cdot) \end{cases}$$

e in particolare si ottiene:

$$D_n = n\, \delta_{\frac{n-1}{n}} \left(\tau_{\frac{1}{n}} - id\right)$$

A questo punto, si possono definire i polinomi di Bernstein tramite una successione in $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} B_0 f = f(0) \\ (B_n f)(0) = f(0) \\ DB_n = B_{n-1} D_n \end{cases} \tag{5.1}$$

ed in particolare, usando l'operatore di valutazione: $val_x(f) = f(x)$:

$$\begin{cases} val_x B_0 = e_0 = val_0 B_n \\ DB_n = B_{n-1} D_n \end{cases} \tag{5.2}$$

**DA SCRIVERE WHYYY**. Segue quello che Andrea pensa essere why. per trascrivere le citazioni si fa riferimento alla lezione del 16/03 (le prime due si scrivono anche in termini della valutazione in $x$ $e_x : f \to f(x)$

$$e_x B_0 = e_0 = e_0 B_n$$

**Citazione 1.** *minuto 11.25*

Vediamo come le relazioni di ricorrenza di parentesi portino alla formula di $B_n$.
Dalle parentesi si ha, per $f \in C^0([0,1])$ [essendo $B_n f(0) = f(0)$]

$$B_n f(x) = f(0) + \int_0^x (B_{n-1} D_n f)(t) dt$$

e per induzione è un polinomio di grado $\leq n$. Quindi in particolare coincide con il suo polinomio di Taylor in 0 di ordine $n$.
Iterando abbiamo che:

$$D^k B_n = B_{n-k} D_{n-k+1} \dots D_{n-1} D_n$$

Da $D_n = n\delta_{\frac{n-1}{n}}(\tau_{\frac{1}{n}} - I)$ osserviamo che:

$$\tau_{a+b} = \tau_a \tau_b$$

$$\delta_{ab} = \delta_a \delta_b$$

$$\tau_{ab} = \delta_b^{-1} \tau_a \delta_b \equiv \delta_b \tau_{ab} = \tau_{ab} \delta_b$$

dove l'ultima è: $f \to f(x + ab) = f(b(\frac{x}{b} + a))$ e segna passaggio

**Citazione 2.** *minuto 11.36*

segue, per induzione:

$$D_{n-k+1} \dots D_{n-1} D_n = (n-k+1) \dots (n-1) n \delta_{\frac{n-k}{n}} (\tau_{\frac{1}{n}} - I)^k$$

moltiplicano a sinistra per

$$D_{n-k} = (n-k)\delta_{\frac{n-k-1}{n-k}}(\tau_{\frac{1}{n-k}} - I)$$

si trova:

$$(n-k) \dots (n-1) n \delta_{\frac{n-k-1}{n}} (\tau_{\frac{1}{n}} - I)(\tau_{\frac{1}{n}} - I)^k$$

**Citazione 3.** *Quindi c'è questo abominio, va bene...*

Quindi

$$D^k B_n = B_{n-k} D_{n-k-1} - D_n = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k} \delta_{\frac{n-k}{n}} (\tau_{\frac{1}{n}} - I)^k$$

siccome il polinomio di Taylor di ordine $n$ in 0 di $B_n f$ è $B_n f$ abbiamo

$$e_x B_n = e_0 (\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} D^k B_n) = e_0 [\sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} B_{n-k} \delta_{\frac{n-k}{n}} (\tau_{\frac{1}{n}} - I)^k] =$$

dove $e_0 : f \to T_n(x, 0, f)$ e qui $x$ è un parametro

**Citazione 4.** *Ora si semplifica tutto magicamente*

$$= e_0 - [\sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} (\tau_{\frac{1}{n}} - I)^k] =$$

**Citazione 5.** *A questo punto dico (in falsetto) TOP!! e allora*

$$= e_0[(I + x((\tau_{\frac{1}{n}} - I))]^n = e_0[x\tau_{\frac{1}{n}} + (1-x)I]^n = e_0[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tau_{\frac{k}{n}}]$$

Da qui viene l'espressione per $B_n f$

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$$

**Commento 4.** *Alla fine hai f(k/n) perchè stai traslando k/n volte la f(0). avresti quindi f(0-1/n) per altre k-1 volte, dunque hai f(k/n)*

cioè $B_n f$ è una *combinazione convessa* dei valori di $f$ nei nodi $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x) DACOPIARE$$

**Citazione 6.** *Volendo ora ci siamo divertiti ma se volessimo fare in modo più standard*

**Proposizione 5.4.1 - Proprietà di $B_n$**
*Valgono le seguenti proprietà:*

1. *l'operatore $B_n$ verifica le proprietà definite da 5.2.*
2. *$B_n$ ha valori sulle funzioni polinomiali di grado $\leq n$ e non aumenta il grado di tali polinomi.*
3. *si verifica per i monomi $1$, $x$ e $x^2$ che:*
$$\begin{cases} B_n 1 = 1 \\ B_n x = x \\ B_n x^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n} \end{cases}$$
4. *l'operatore $B_n$ è positivo:*
$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad B_n f \geq 0$$
*e lineare:*
$$f \geq g \quad \Rightarrow \quad B_n f \geq B_n g$$
5. *in norma degli operatori $\|\cdot\|$: $\|B_n\| = 1$*

*Dimostrazione.* ―――――――――――――――― ■

**Teorema 5.4.1 - Teorema di Bernstein**
*Gli operatori $B_n : C^1(I) \to C^0(I)$ di Bernstein convergono puntualmente all'identità. In altre parole, per ogni $f \in C^1(I)$ si ha che $B_n f \to f$ uniformemente per $n \to +\infty$.*
*Inoltre, dato $\omega$ modulo di continuità concavo*[6] *per $f$ e dato $\in I$:*
$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

*Dimostrazione.* Sia $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ con modulo di continuità concavo $\omega$; sia $x \in I$
$$|f(x) - B_n f(x)| = |f(x) B_n 1 - B_n f(x)| =$$

[6] Si può sempre considerare senza perdere generalità un modulo di continuità concavo.

$$= |\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |(f(x)-f(\frac{k}{n}))|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq^{7} \sum_{k=0}^{n} \omega(|x-\frac{k}{n}|)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq^{8}$$

$$\leq \omega\Big(\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|x-\frac{k}{n}|^2 x^k(1-x)^{n-k}}\Big)$$

l'espressione sotto $\surd$ è il polinomio di Bernstein della funzione $t \to |x-t|^2$, calcolato in $x$ (x è parametro). Cioè

$$x^2 B_n 1 - 2x B_n(x)^9 + B_n(x^2) = x^2 - 2x^2 + (1\frac{1}{n})x^2 + \frac{x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Dunque

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \omega(\sqrt{(\frac{x(1-x)}{n}})$$

■

Osserviamo che il Teorema di Bernstein segue dal fatto che per $p \in \{1, x, x^2\}$ si può vedere che $B_n p \to p$ uniformemente. Questo fatto può essere generalizzato con il seguente teorema.

**Teorema 5.4.2 - Teorema di Korovkin**
*Siano $L_n$ operatori lineari positivi su $C^0(I)$ tali che per $p \in \{1, x, x^2\}$ valga:*

$$L_n p \longrightarrow p \quad uniformemente$$

*Allora per ogni $f \in C^0(I)$ vale che:*

$$L_n f \longrightarrow f \quad uniformemente$$

*cioè $L_n \longrightarrow I$ puntualmente come mappe $C^0(I) \to C^0(I)$.*

**Commento 5.** *(dire essere lineare positivo implica essere continuo come abbiamo già osservato). Questo prova il teorema di Bernstein, considerando $B_n$ come operatore, che effettivamente è lineare positivo*

*Dimostrazione.* Sia $f \in C^0(I)$, sia $\varepsilon > 0$, sia $\forall a \in I, m_a \in \mathbb{R}$ tale che valga

$$p_a(x) = f(a) + \varepsilon + m_a(x-a)^2 \geq f(a) \ \forall x \in I$$

[7] Per subadditività di norma e $\omega$ mdc
[8] è la disuguaglianza di concavità della funzione concava $t \to \omega(\sqrt{t})$
[9] (x) indica funzione identica

DISEGNO

per esempio: $m_a := \max_{x\in I, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)-\varepsilon}{(x-a)^2}$ Perchè abbiamo massimo? Perchè una funzione continua che su a assume valore $-\infty$ e dunque anche se non è continuo Weierstrass si applica lo stesso (su a hai rogne, ma situazione puoi visualizarla così)

DISEGNO

Vale
$$0 < p_a(a) - f(a) = \varepsilon < 2\varepsilon$$
quindi c'è un intorno $U_a$ di $a$ in $I$ tale che
$$0 < p_a(a) - f(a) < 2\varepsilon \ \forall x \in U_a$$
Per Heine-Borel vi sono $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ tali che $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ ricoprono $I$.
Poichè ogni $p_{a_j}$ è un polinomio di grado $\leq 2$ $L_n p_{a_j} \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} p_{a_j}$ $j = 1, 2, \dots, m$) e quindi
$$L_n p_{a_j} \leq p_{a_j} + \varepsilon$$
definitivamente ($\forall m \geq n_0, j = 1, 2, \dots, m$) Inoltre essendo $f \leq p_{a_j}$ anche
$$L_n f \leq L_n p_{a_j} \leq p_{a_j} + \varepsilon$$
definitivamente, quindi
$$L_n f \leq \min_{1\leq j\leq m} p_{a_j} + \varepsilon \leq f + 2\varepsilon + \varepsilon$$
dove l'ultimo $\leq$ segue perchè $\forall x \in I$ vi è un $j_0$ tale che $x \in U_{a_{j_0}}$ e $p_{a_{j_0}} \leq f(x) + 2\varepsilon$.
Lo stesso argomento applicato alla funzione $f$ dice che $L_n f \geq f - 3\varepsilon$ definitivamente, e quindi
$$|L_n f - f| \leq 3\varepsilon \ in \ I$$
cioè $\|L_n f - f\|_{\infty, I} \leq 3\varepsilon$

■

**Teorema 5.4.3 - Teorema di Temple**
*Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convessa. Allora la successione $B_n f$ è decrescente.*

*Dimostrazione.* Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convessa; $n \in \mathbb{N}$.
Si osserva che $\forall k = 1, \dots, n$ vale che
$$\frac{k-1}{n} < \frac{k}{n+1} < \frac{k}{n}$$

e quindi il termine di mezzo si può scrivere come combinazione lineare dei due estremi:[10]

$$\frac{k}{n+1} = \frac{k}{n+1}\frac{k-1}{n} + \frac{n+1-k}{n+1}\frac{k}{n}$$

Applichiamo la disuguaglianza di convessità per $f$

$$f(\frac{k}{n+1}) \leq \frac{k}{n+1} f(\frac{k-1}{n}) + \frac{n+1-k}{n+1} f(\frac{k}{n})$$

questo è valido anche per $k = 0$ oppure $k = n+1$ con la convenzione che $0(?)^{11} = 0$ Moltiplico per $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

$$\binom{n+1}{k} f(\frac{k}{n+1}) \leq \binom{n}{k-1} f(\frac{k-1}{n}) + \binom{n}{k} f(\frac{k}{n})$$

Moltiplico per $x^k(1-x)^{n+1-k}$, sommo per $k = 0, 1, \dots, k+1$

$$B_{n+1}f(x) \leq xB_nf(x) + (1-x)B_nf(x) = B_nf(x)$$

■

### 5.4.2 Interpretazione Probabilistica

Possiamo dare un'interpretazione probabilistica ai polinomi di Bernstein e al teorema di Bernstein.

#### Polinomi di Bernstein

Siano $f \in C^0(I)$ e $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Date $\omega_1, \dots, \omega_n$ variabili aleatorie di Bernoulli di parametro[12] $x \in [0,1]$. Posso identificare il cammino randomico composto da $n$ passi di lunghezza $\frac{1}{n}$ come:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{n}$$

Allora, il valore atteso di $f(\bar{x})$ è proprio:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{n}\right) = B_nf(x)$$

[10] se ho $a < c < b$ posso scrivere $c$ come combinazione convessa: $c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b$

[11] dove con (?) si intende "cosa non definita"

[12] cioè tale che $\mathbb{P}[\omega_i = 1] = x$

**Teorema di Bernstein**

Il Teorema di Bernstein può essere allora interpretato come la Legge Debole dei Grandi Numeri, ossia: per ogni $\varepsilon > 0$ vale che per $n \to +\infty$:

$$\mathbb{P}\left[\left|f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon\right] \longrightarrow 0$$

## 5.5 Teorema di Stone-Weierstrass

**Teorema 5.5.1 - Teorema di Dini**
*Sia $X$ topologico compatto, sia $(f_k)$ successione monotona di funzioni continue $f_k : X \to \mathbb{R}$.*
*Supponiamo $f_k \to f$ puntualmente. Allora la successione converge uniformemente a $f$.*

*Dimostrazione.* Senza perdere generalità, consideriamo $f(x) = 0$ per ogni $x \in X$. Supponiamo $f_k(x) \geq 0$ ed $f_{k+1} \leq f_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Fissato $\varepsilon > 0$, dato $x \in X$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che:

$$f_{n_x}(x) < \varepsilon$$

e vale di più, vi è un intorno $U_x$ di $x$ tale che $f_{n_x}(y) < \varepsilon$ per ogni $y \in U_x$. Per compattezza, esistono $x_1, \ldots, x_m$ tali che $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ ricoprono $X$. Ma allora per $N = max(n_{x_1}, \ldots, n_{x_m})$ vale:

$$f_N(x) < \varepsilon$$

per ogni $x \in X$. Dato che questo vale per ogni $\varepsilon > 0$, allora $f_n \to f$ uniformemente. ■

**Definizione 5.5.1 - Algebra di funzioni**
Un'algebra di funzioni sul campo $\mathbb{K}$ e sull'insieme $S$ è un sottospazio vettoriale $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{K}^S$ tale che:

$$f, g \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad fg \in \mathcal{A}$$

In particolare l'algebra è unitaria se la funzione costante $1 \in \mathcal{A}$.

*Notazione 5.1 - Max e Min*
Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora denoto:

$$\begin{cases} a \vee b = max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \\ a \wedge b = min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) \end{cases}$$

**Definizione 5.5.2 - Reticolo**
Un reticolo di funzioni reali sull'insieme $S$ è un sottoinsieme $R \subseteq \mathbb{R}^S$ tale che per ogni $f, g \in R$:

$$f \vee g, \ f \wedge g \in R$$

**Proposizione 5.5.1**
*Ogni $\mathbb{R}$-algebra di funzioni limitate, chiusa uniformemente, è un reticolo.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(S,\mathbb{R})$, chiusa per $\|\cdot\|_{\infty,S}$. é sufficiente provare che per ogni $f \in \mathcal{A}$ si ha $|f| \subseteq \mathcal{A}$; siccome $\forall\delta > 0, |f| = \frac{1}{\delta}|f\delta|$, basta verificarlo per $f$ con $\|f\|_\infty \leq 1$. Sia $p_n$ una succesisone di polinomi convergente uniformemente su $[0,1]$ a $\sqrt{x}, p_n \in x\mathbb{R}[x]$[13] allora $p_n \circ f^2 \in \mathcal{A}$ e converge uniformemente a $\sqrt{f^2} = |f|$. Infatti, siccome $\{f(s)^2 : s \in S\} \subseteq [0,1]$

$$\|p_n \circ f^2 - |f|\|_{\infty,S} = \sup_{s\in S}|p_n(f(s)^2 - |f(s)|| \leq \sup_{t\in[0,1]}|p_n(t) - \sqrt{t}| = \|p_n - \sqrt{\cdot}\|_{\infty,[0,1]}$$

dunque $p_n \circ f^2 \to |f|$ e siccome $\mathcal{A}$ è chiuso uniformemente si ha $|f| \in \mathcal{A}$

■

**Proposizione 5.5.2**
*Un reticolo $\mathcal{R}$ di funzioni continue su uno spazio compatto $X$ è uniformemente denso in $C(X,\mathbb{R})$ se ogni "problema di interpolazione*[14] *su 2 punti" ha soluzione.*

*Dimostrazione.* Sia $X$ compatto, $\mathcal{R}$ reticolo $\subseteq C(X)$ con la proprietà detta; sia $f \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$. Per ogni $x, y \in X$ esiste una $g_{x,y} \in \mathcal{R}$ tale che

$$f(z) < g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$$

Valga per $z = x$ e per $z = y$ e quindi anche in un intorno (per conservazione del segno) $U_{x,y}$ di $\{x, y\}$

DISEGNO

Per HeineBorel, per ogni $x$ fissato vi sono $y_1, \ldots, y_m$ DA RICOPIARE PEZZO, HAI STACCATO
Inoltre per ogni $x \in V_x := \bigcup_{1\leq i\leq m} U_{x_i,y_i}$ vale $g_x(z) < f(x) + \varepsilon$ quindi $f < g_x < f + \varepsilon$ vale in $V_x$.
I $\{V_x\}_{x\in X}$ sono un ricoprimento aperto di $X$ quindi per HeineBorel esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \cup_{1\leq i\leq n} V_{x_i}$. Consideriamo la funzione

$$g := g_{x_i} \wedge g_{x_2} \cdots \wedge g_{x_n} \in \mathcal{R}$$

Allora, siccome $V_{x_1} \ldots V_{x_n}$ ricoprono $X$ vale

$$f < g < f + \varepsilon \text{ in } X$$

Quindi $\|f - g\|_{\infty,X} \leq \varepsilon$ e $\mathcal{R}$ è denso uniformemente in $C(X)$

■

[13] li vorrei nell'ideale

[14] Formalmente, il problema si può definire: per ogni $x, y \in X$ distinti e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ esiste $f \in \mathcal{R}$ tale che $f(x) = a$ ed $f(y) = b$

**Definizione 5.5.3 - Insieme Separante**
Un insieme di funzioni $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^S$ è separante se:

$$\forall\, s, s' \in S \; distinti \quad \exists\, f \in \mathcal{F} : \quad f(s) \neq f(s')$$

**Definizione 5.5.4 - Completamente Regolare**
Sia $X$ topologico. $X$ si dice completamente regolare se per ogni $x \in X$ ed $F \subseteq X$ chiuso tale che $x \notin F$ esiste $f \in C(X)$ per cui:

$$f(x) = 1 \qquad\qquad f|_F = 0$$

**Definizione 5.5.5 - Spazio di Tychonoff**
Sia $X$ spazio topoogico. $X$ si dice di Tychonoff se è completamente regolare e Hausdorff.

**Teorema 5.5.2 - Teorema di Stone - Weierstrass**
*Sia $\mathcal{A}$ un'algebra chiusa e separante di funzioni continue su uno spazio compatto $X$.*
*Allora vale una delle seguenti:*

1. $\mathcal{A} = C(X)$
2. *esiste $x_0 \in X$ per cui $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{x_0}$ ideale massimale definito:*

$$\mathcal{M}_{x_0} = \{f \in C(X) \mid f(x_0) = 0\}$$

*Dimostrazione.* Sia $X$ spazio compatto e sia $\mathcal{A}$ un'algebra chiusa di $C(X)$ e separante. Quindi un reticolo [$\Rightarrow X$ è $\tau_2$]. Vi sono 2 casi:

1. Non vi è alcun zero comune delle $f \in \mathcal{A}$

$$\forall x \in X \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0$$

Allora ogni problema di interpolazione su due punti ha soluzione in $\mathcal{A}$: infatti dati $x \neq y$ in $X$ siccome $\mathcal{A}$ è separante, $\exists f \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) \neq f(y)$ e si può prendere $f$ in modo che $f(x) \neq 0, f(y) \neq 0$; posso farlo perchè per esempio se fosse $f(x) = 0$(quindi $f(y) \neq 0$) posso usare invece di $f$, $f + \varepsilon g$ con $g \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) \neq 0$ con $\varepsilon \neq 0$, piccolo $f + \varepsilon g$ non si annulla nè in $x$ nè in $y$ e ha valori diversi in $x \& y$.
L'insieme di coppie $\{(u(x), u(y) : u \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale; gli elementi $(f(x), f(y))$ e $(f^2(x), f^2(y))$ sono linearmente indipendenti, infatti

$$det(??) = f(x)f^2(y) - f^2(x)f(y) = f(x)f(y)(f(y) - f(x)) \neq 0$$

dunque è tutto $\mathbb{R}^2$, che è come dire che ogni problema di interpolazione su $\{x, y\}$ ha soluzione. Allora per la proposiozione 2 $\mathbb{Q}$ è denso e poichè è chiusa $\mathbb{Q} = C(X)$

2. Vi è un $x_0 \in X$ zero comune a tutte le $f \in \mathbb{Q}$ (che è anche l'unico). In questo caso la mappa

$$+ : \mathbb{R} \times \mathcal{A} \ni (\lambda, f) \to \lambda + f \in \mathbb{R} + \mathbb{Q}$$

è un omeomorfismo lineare con inversa

$$g \to (g(x_0), g - g(x_0)) \in \lambda \times \mathbb{Q}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subseteq C(X)$ è completo perchè lo è $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ e quindi è chiuso; è un'algebra; separa i punti (già lo faceva $\mathcal{A}$), contiene le costanti dunque cade nel caso precedente: $\mathbb{R}$è$\mathcal{A} = C(X)$ cioè

$$A = m_x := \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$$

che è un ideale massimale (per questo la m)

■

**Teorema 5.5.3**
*Sia $\mathcal{A}$ un'algebra chiusa e separante di funzioni continue su uno spazio compatto $X$. Allora essa è tutto $C(X)$ oppure, per un $x_0 \in X$ è l'insieme $m_x$ delle funzioni nulle in $x_0$*

**Proposizione 5.5.3 - Ideali massimali di $C(X)$**
*Sia $X$ compatto. Allora gli insiemi $\mathcal{M}_x$ con $x \in X$ sono gli unici ideali massimali di $C(X)$.*

*Dimostrazione.* Osservo che innanzitutto che gli insiemi $\mathcal{M}_x$ con $x \in X$ sono tutti massimali, in quanto sono iperpiani di $C(X)$[15].
Viceversa sia $\mathcal{M}$ ideale massimale di $C(X)$, dimostro che vi è uno zero comune a tutte le funzioni di $\mathcal{M}$. Se così non fosse, per ogni $x \in X$ considero $g_x \in \mathcal{M}$ tale che $g_x(y) = 0$ per ogni $y \in U_x$ intorno di $x$. Per Heine-Borel vi sono $x_1, \dots, x_n$ tali che $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ ricoprono $X$. Definisco allora:

$$g = g_{x_1}^2 + \dots + g_{x_n}^2$$

e osservo che $g(x) > 0$ per ogni $x \in X$. Allora è ben definita $\frac{1}{g} \in \mathcal{M}$ reciproco. Ne segue che $1 \in \mathcal{M}$ ovvero $\mathcal{M} = C(X)$, assurdo. ■

[15]Consideriamo $C(X)$ come spazio vettoriale delle funzioni continue $X \to \mathbb{R}$. Denotando $f = 1$ la funzione costante ad 1, si può scrivere $C(X) = \mathcal{M}_{x_0} \oplus span\{f\}$ (verificando che ogni funzione $g \in C(X)$ si può decomporre nella somma diretta, dato che $g - g(x_0) \in \mathcal{M}_{x_0}$). Ma $dimSpan\{f\} = 1$ quindi $\mathcal{M}_{x_0}$ è un iperpiano.

# 5.6 Conseguenze

## 5.6.1 Sulla convergenza dei Polinomi di Bernstein

**Definizione 5.6.1 - Norma $\|\cdot\|_{C^r}$**
Consideriamo lo spazio $C^r(I)$. Allora si definisce la norma:

$$\|f\|_{C^r} = \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty + \cdots + \|f^{(r)}\|_\infty$$

**Proposizione 5.6.1 - Convergenza $B_n$**
*Sia $f \in C^r(I)$, allora risulta che per $n \to +\infty$ ed in norma $\|\cdot\|_{C^r}$:*

$$B_n f \longrightarrow f$$

*cioè il Teorema di Bernstein implica il Teorema di Stone-Weierstrass.*

*Dimostrazione.* Se $f \in C^r(I)$, risulta che $B_n f \overset{\|\cdot\|_{C^r}}{\longrightarrow} f$ dove $\|g\|_{C^r} = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \cdots + \|g^{(r)}\|_\infty$ quindi migliora non tanto la velocità di convergenza, quanto la qualità della convergenza.
Si era osservato che se $A_n \to A$ puntualmente, $A_n \in L(E, F), E, F$ spazi normati e $C_n \to C$ puntualmente $\in L(F, G)$ e $C_n$[16] sono limitati ($\|C_n\| \leq K$) allora anche $C_n A_n \to CA$ puntualmente; infatti

$$\begin{aligned}\|C_n A_n v - CAv\| &\leq \|C_n A_n v - C_n Av\| + \|C_n Av - CAv\| \\ &\leq \|C_n\| \|A_n v - Av\| + \|C_n(Av) - C(Av)\| = o(1)\end{aligned}$$

Nel nostro caso [17]:$DB_n = B_{n-1} D_n$ e $D_n : C^1(I) \to C^0(I)$ lineari, convergono puntualmente a $D : C^1(I) \to C^0(I)$; infatti $\forall f \in C^1(I)$ e $\forall x \in I$

$$D_n f(x) = \frac{f(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}) - f(\frac{n-1}{n}x)}{\frac{1}{n}} = f'(\xi)$$

con $\frac{n-1}{n}x < \xi < \frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}$ quindi $|x - \xi| \leq \frac{1}{n}$ e se $\omega$ è modulo di continuità di $f \in C^0(I)$

$$\|D_n f - f'\|_{\infty, I} \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

cioè $D_n \to D$ puntualmente su $C^1(I)$.
Quindi: $\forall f \in C^1(I)$

$$DB_n f = B_{n-1} D_n f \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f'$$

[16] Occhio. $C_n$ è operatore random, non quello di Bernstein
[17] quindi consideriamo $B_n$ come operatore di Bernstein

cioè $\begin{cases} B_n f \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f \\ (B_n f)' \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f' \end{cases}$ e più in generale, se $f \in C^r(I), r \in \mathbb{N}$,

$$D^k B_n f = B_{n-k} D_{n-k+1} \dots D_n f \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f^{(k)}$$

dunque se $f \in C^r(I)$ la successione $B_n f$ converge a $f$ nella norma $\|\cdot\|_{C^r}$, $(B_n f)^{(k)} \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f^{(k)}$ per $k = 0, 1, \dots, r$ ■

Vale anche il viceversa:

**Proposizione 5.6.2**
*Il Teorema di Stone-Weierstrass implica il Teorema di Bernstein.*

*Dimostrazione.* Infatti: dico che $B_n f \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$ per ogni polinomio $f$: per induzione su $deg(f)$:
Se $deg f \leq 0 \to f = costante$; $B_n f = f$;
da $(B_n f)' = B_{n-1} D_n f$, per $f$ polinomio, siccome $deg D_n f = deg f - 1$, per ipotesi induttiva e per il principietto di prima sulla composizione di operatori, abbiamo che $(B_n f)' \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f'$; siccome $B_n f(0) = f(0)$, per il teorema di limite sotto il segno di derivata, $B_n f \to f$. Ergo: $B_n f \to f$ uniformemente per ogni $f$ polinomiale.
I $B_n$ come applicazioni $C^0(I) \to C^0(I)$ sono una successione equicontinua (sono $1-$Lipschitz, $\|B_n\| = 1 \forall n$). Quindi l'insieme $\{f \in C^0(I) : B_n f$ converge in $\|\cdot\|_\infty\}$ è chiuso in $C^0(I)$, ma contenendo l'insieme dei polinomi denso per Weierstrass, è tutto: $B_n f$ converge $\forall f \in C^0(I)$, e il limite $L$ è uniforme sui compatti quindi è sequenzialmente continuo ed è l'identità sull'insieme dei polinomi, quindi ovunque

■

**Definizione 5.6.2 - Polinomi di Bernstein Vettoriali**
Sia $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Possiamo definire formalmente gli operatori $B_n$, $D$ e $D_n$ per curve:

$$f : [0,1] \longrightarrow E$$

Valgono tutti i risultati già dimostrati nella Sezione 5.4 (a meno della positività di $B_n$).

### 5.6.2 Sul Teorema di Stone-Weierstrass

Sia $X$ spazio topologico compatto ed $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ un'algebra chiusa.
Consideriamo il seguente insieme (che individua una relazione di equivalenza

per i punti di $X$):

$$R_{\mathcal{A}} = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x') \ \forall\, f \in \mathcal{A}\}$$

e la proiezione al quoziente (compatto per continuità di $\pi$):

$$\pi : X \longrightarrow X/R_{\mathcal{A}}$$

Per costruzione dell'insieme $R_{\mathcal{A}}$, per ogni $f \in C(X, \mathbb{R})$ vi è $\tilde{f} : X/R_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

Si può allora definire l'algebra:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{g \in C(X/R_{\mathcal{A}}) \mid g \circ \pi \in \mathcal{A}\}$$

Vi è quindi l'isomorfismo algebrico:

$$\begin{array}{rccc} \pi^\star : & \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & g & \longmapsto & g \circ \pi \end{array}$$

che è anche isometria dato che[18]:

$$\|\pi^\star(g)\|_{\infty,X} = \max_{x \in X} |g(\pi(x))| = \max_{y \in X/R_{\mathcal{A}}} |g(y)| = \|g\|_{\infty,X/R_{\mathcal{A}}}$$

Inoltre vale che:

1. $\tilde{\mathcal{A}}$ chiuso in $C(X)$, infatti $\mathcal{A}$ chiuso in $C(X)$ completo, quindi $\mathcal{A}$ completo, da cui segue per isomorfismo $\tilde{\mathcal{A}}$ completo, chiuso.

2. $\tilde{\mathcal{A}}$ separante per costruzione.

Si può applicare il Teorema di Stone-Weierstrass: $\tilde{\mathcal{A}}$ è l'ideale generato da $1 \in C(X/R_{\mathcal{A}})$ o un ideale massimale di $C(X/R_{\mathcal{A}})$.

**Corollario 5.6.0.1 - Corollario di Stone-Weierstrass (reale)**
*Sia $X$ spazio compatto, $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ algebra chiusa. Allora vi è una partizione $\mathcal{F}$ in chiusi di $X$ tale che valga una delle seguenti:*

1. $\mathcal{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f|_C \text{ costante } \forall\, C \in \mathcal{F}\}$

2. *esiste un chiuso $C_0 \in \mathcal{F}$ tale che:*

$$\mathcal{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f|_C \text{ costante } \forall\, C \in \mathcal{F} \ \text{ e } \ f|_{C_0} = 0\}$$

[18] vale perchè $\pi$ è surgettiva

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue dalla discussione precedente, considerando $\mathcal{F}$ come l'insieme delle fibre della funzione $\pi$ (ogni fibra infatti corrisponde a $f^{-1}(x)$ chiuso, dove $x \in \mathbb{R}$):

1. se $\mathcal{A} = C(X/R_{\mathcal{A}})$ allora è soddisfatto il caso (1).
2. se $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{x_0}$ ideale massimale di $C(X/R_{\mathcal{A}})$ con $x_0 \in X$, allora è soddisfatto il caso (2) dove $C_0 = f^{-1}(x_0)$.

■

**Corollario 5.6.0.2 - Corollario di Stone-Weierstrass (complesso)**
*Sia $X$ spazio compatto, $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ algebra chiusa uniformemente, separante ed autoconiugata*[19]*. Allora vi è una partizione $\mathcal{F}$ in chiusi di $X$ tale che valgano:*

1. $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$
2. *esiste $x \in X$ tale che $\mathcal{A} = \mathcal{M}_x$*

*Dimostrazione.* Dato che l'algebra è autoconiugata posso scrivere (definito $\mathcal{A}_\mathbb{R} = \{f \in \mathcal{A} \mid f = \bar{f}\}$):
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$$
dove in particolare:

1. $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ è un'algebra: se $f, g$ a valori reali allora $f + g, f \cdot g$ a valori reali.
2. $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ è separante: dati $x \neq x'$ elementi di $X$, esiste $f \in \mathcal{A}$ separante tale che $f(x) \neq f(x')$. Allora $Ref(x) \neq Ref(x')$ oppure $Imf(x) \neq Imf(x')$, dove $Ref, Imf \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$.
3. $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ è chiuso in $C(X, \mathbb{R})$: come spazi vettoriali vi è un isomorfismo lineare $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_\mathbb{R} \times \mathcal{A}_\mathbb{R}$. Dato che $\mathcal{A}$ è chiuso, è completo. Allora $\mathcal{A}_\mathbb{R} \times \mathcal{A}_\mathbb{R}$ completo, per cui $\mathcal{A}_\mathbb{R} \cong \mathcal{A}_\mathbb{R} \times \{0\}$ completo (e chiuso).

Applicando il Corollario 5.6.0.1, segue che:

1. $\mathcal{A}_\mathbb{R} = C(X, \mathbb{R})$ per cui $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$
2. $\mathcal{A}_\mathbb{R} = \mathcal{M} \cap C(X, \mathbb{R})$ cioè $\mathcal{A} = \mathcal{M}$

che è la tesi. ■

[19] Un'algebra è autoconiugata quando per ogni $f \in \mathcal{A}$ vale $\bar{f} \in \mathcal{A}$ o equivalentemente $Re(f) \in \mathcal{A}$.

**Teorema 5.6.1 - Teorema di Müntz-Szàsz**
*Sia* $I = [0,1]$. *Data una successione non negativa* $(\lambda_k)$ *tale che* $\lambda_0 = 0$ *e* $\lambda_k \to +\infty$ *vale che:*

$$Span(x^{\lambda_k}) \mid k \in \mathbb{N} \text{ è denso in } C([0,1],\mathbb{R}) \text{ se e solo se } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$$

*Dimostrazione.* Dimostrazione della parte di sufficienza: se $\sum_k = 1^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty \Rightarrow \overline{span\{x^{\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}} = C(I,\mathbb{R})$ Dimostrazione di Golitschek, 1980. Dimostrazione facile, ma non si sa da dove sia uscita l'idea.
Sia $q > 0$. Mostriamo che $x^q \in \overline{span\{x^{\lambda_k}\}}$. Consideriamo la successione $(Q_n) \subseteq C(I,\mathbb{R})$ definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} Q_0(x) = x^q \\ Q_n(x) = (\lambda_n - q)x^{\lambda_n} \int_x^1 Q_{n-1}(t)t^{-1-\lambda_n}dt \end{cases}$$

**Citazione 7.** *successione tirata fuori dal CAPPELLO!!*

Allora:

- $Q_n(x) := x^q - \sum_{k=1}^n a_{k,n}x^{\lambda_k}$ (con $a_{k,n} \in \mathbb{R}$) per induzione:
  $k = 0$ ok!
  per ogni $t^a$ che entra nell'espressione di $Q_{n-1}$ $[a = q$ oppure $a = \lambda_k, 1 \leq k < n]$

  $$x^{\lambda_n} \int_x^1 t^a t^{-1-\lambda_n} dt = Cx^{\lambda_n}[t^{a-\lambda_n}]_x^1 = C(x^{\lambda_n} - x^a)$$

  con $C = \frac{1}{a-\lambda_n}$. Quindi per ipotesi induttiva, $Q_n$ è combinazione lineare di $x^q$ e $x^{\lambda_k}, 1 \leq k \leq r$ (con coefficienti $= 1$ per $x^q$)

- $$\begin{aligned}|Q_n(x)| &\leq |\lambda_n - q| \|Q_{n-1}\|_{\infty,I} (x^{\lambda_n} \int_x^1 t^{-1-\lambda_n} dt) \\ &\leq |\lambda_n - q| \|Q_{n-1}\|_{\infty,I} \frac{1}{\lambda_n}(1 - x^{\lambda_n}) \\ &\leq \left|1 - \frac{q}{\lambda_n}\right| \|Q_{n-1}\|_{\infty,I}\end{aligned}$$

quindi $\|Q_n\| \leq \left|1 - \frac{q}{\lambda_n}\right| \|Q_{n-1}\|_\infty$ e essendo $\|Q_0\|_\infty = 1$

$$\|Q_n\|_\infty \leq \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{q}{\lambda_k}\right| = o(1) \ per \ k \to \infty.$$

per l'ipotesi $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty$, $\|Q_n\|_\infty^{-1} \geq \prod_{k=1}^n \left|1 - \frac{q}{\lambda_k}\right|^{-1}$ e

$$\prod_{\substack{1\leq k\leq n \\ \lambda_k > q}} \left(1 - \frac{q}{\lambda_k}\right)^{-1} \geq \prod_{\substack{1\leq k\leq n \\ \lambda_k > q}} \left(1 + \frac{q}{\lambda_k}\right) \geq q \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \lambda_k > q}} \frac{1}{\lambda_k} \to \infty \quad n \to \infty$$

Allora $x^q = \sum_{k=1}^n a_{k,n} x^{\lambda_k} -+ Q_n(x)$ e $\|Q_n\|_\infty \to 0$ cioè $\sum_{k=1}^n a_{k,n} x^{\lambda_k} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}} x^q$ cioè $x^q \in \overline{Span\{x^{\lambda_k} : k \geq 0\}}$ dove la chiusura è rispetto a $\| \cdot \|_\infty$

■

## 5.7 Esercitazioni e Applicazioni

### 5.7.1 Equicontinuità

**Definizione 5.7.1 - Famiglia Equicontinua**
Siano $(M, d_M)$ uno spazio metrico e $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subseteq C^0(M, X)$ si dice equicontinua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x) - f(y)\|_X < \varepsilon \quad se\ d_M(x, y) < \delta$$

**Definizione 5.7.2 - Famiglia Puntualmente Equicontinua**
Siano $(M, d_M)$ uno spazio metrico e $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subseteq C^0(M, X)$ si dice puntualmente equicontinua se per ogni $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tale che:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x) - f(y)\|_X < \varepsilon \quad se\ d_M(x, y) < \delta$$

**Proposizione 5.7.1**
*Valgono le seguenti proprietà:*

1. *una famiglia equicontinua è puntualmente equicontinua.*
2. *una famiglia puntualmente equicontinua non è necessariamente equicontinua.*
3. *dato $(M, d)$ compatto, allora $\mathcal{F} \subseteq C^0(M, X)$ è equicontinua se e solo se è puntualmente equicontinua.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

### 5.7.2 Teorema di Peano

**Teorema 5.7.1 - Teorema di Esistenza di Peano**
*Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

*ha soluzione locale (in generale può essere non unica).*
*Inoltre per $r > 0$, definiamo $B = \bar{B}(0, r, \mathbb{R}^n)$ ed $f \in C^0(B, \mathbb{R}^n)$ tali che:*

$$a\|f\|_{B,+\infty} \leq r$$

*Allora il problema di Cauchy formulato precedentemente ammette soluzione $u \in C^0([-a, a], \mathbb{R}^n)$.*

*Dimostrazione.* Sia $(f_j)_{j\geq 0}$ una successione di mappe localmente lipschitziane $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ convergente uniformemente a $f$ su $B$. (per esempio $f_j$ mappe polinomiali; si può fare in modo che $\|f_j\|_{\infty,B} \leq \|f\|_{\infty,B}$. Basta usare invece di $f_j$, se serve, $g_j = \frac{\|f\|_\infty}{\|f_j\|_\infty} f_j$ ha norma uniforme $\|g_j\|_{\infty,B} = \|f\|_{\infty,B}$ e siccome $f_j \stackrel{\|\cdot\|}{\to} f$ anche $\frac{\|f\|_\infty}{\|f_j\|_\infty} \to 1$ e $g_j \stackrel{\|\cdot\|}{\to} f$ )
Per il teorema di esistenza (Lipschitz, Cauchy, Lindelhöf) il problema

$$\begin{cases} \dot{u_j} = f_j(u_j) \\ u_j(0) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione $u_j \in C^1([-a,a], \mathbb{R}^n)$. (unica).
Le $u_j$ sono equicontinue DA COPIARE

**Citazione 8.** *è un fenomeno di prostaferesi. perchè cosa vuol dire prostaferesi? vuol dire aggiungo e tolgo*

■

### 5.7.3 Pennello di Peano

**Citazione 9.** *Del caro nonno Peano, che si fa la barba alla mattina con il suo bel pennello*

Siano: $I = [-a,a], aR \leq r, B = \bar{B}(0,r;\mathbb{R}^\infty), \mathbb{E} = C^0(I \times B, \mathbb{R}^n), D = \{f \in C^0(I \times B, \mathbb{R}^n) : \|f\|_{I \times B} \leq R$, Lipschitz nella seconda variabile$\}$ e $\bar{D} = \{f \in C^0(I \times B; \mathbb{R}^n) \|f\|_{\infty, I\times B} \leq R\} = \bar{B} = (0, R; \mathbb{E})$. Dal teorema di esistenza e unicità (Cauchy-Lipschitz) resta definita una mappa $S : D \to Y := C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ponendo $S(f) = u$ con

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u(t)) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \forall f \in D$$

Allora: $D$ è convesso;
$S$ è compatta: $S(D)$ è un insieme di curve equilipschitz (di costante $R$), tutte nulle in 0. Dunque relativamente compatte per 5.1.1. É continua: se $f_k \to f$ in $D$ $s(f_k)$ a meno di sottosuccessioni converge a una soluzione di $\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$, che essendo unica, è $S(f)$ e allora $S(f_k) \to S(f)$ per l'argomento sequenziale di Urysohn.

Dunque: l'insieme $\lim\limits_{\substack{g\to f\\ g\in D}} S(g), f \in X$ è compatto, connesso e non vuoto.
Infine, questo insieme è proprio il pennello di Peano:

$$P := \{u \in C^0(I, \mathbb{R}^n)\}, \text{ dove } u \text{ è soluzione di } \begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$Lim_{g\to f, g\in D} S(g) \subseteq P$, ovvio e già vista: da teorema di limite sotto il segno di derivata. (conti da copiare)
Per finire proviamo $Lim \supseteq D$: cioè ogni soluzione $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$ con $f \in C^0(I \times B, \mathbb{R}^n)$ si può ottenere come limite uniforme di soluzioni di problemi approssimati: cioè $\exists (g_k)_k \subseteq D$ tale che le soluzioni $u_k$ di $\begin{cases} \dot{u_k} = g_k(t, u_k) \\ u_k(0) = 0 \end{cases}$ convergono uniformemente alla $u$. Dunque: sia $u$ soluzione di (*), sia $(f_k)_k \subseteq D$ succesisone di mappe continue uniformi a $f$ (per esempio polinomiali) convergenti in $C^1$ a $u : u_k \to u, \dot{u_k} \to \dot{u}$.Definisco

$$g_k(t, x) = f_k(t, x) + \dot{u_k}(t) - f_k(t, u_k(t))$$

Allora per definizione di $g_k$

$$\begin{cases} \dot{u_k}(t) = g_k(t, u_k(t)) \ \textit{cioè} \ u_k = S(g_k) \\ u_k(0) = 0 \end{cases}$$

e $g_k(t, x) \overset{k\to\infty}{\to} f(t, x) + \dot{u} - f(t(u(t)) = f(t, x)$ e le $g_k$ sono Lipschitz quindi $\in D$ (a meno di rinormalizzare ??)
Pennello di Peano$= Lim_{g\to f, g\in D} S(g)$ quindi è compatto, connesso, $\neq \emptyset$

# Capitolo 6

# 1-Forme Differenziali

## 6.1 1-Forma differenziale

**Definizione 6.1.1 - 1-Forma differenziale**
Siano $E$ spazio di Banach e $\Omega \subseteq E$ aperto. Sia $E^\star = L(E, \mathbb{R})$.
Una 1-forma differenziale è una mappa continua $\omega : \Omega \to E^\star$.

*Esempio 6.1.1*
Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Allora il suo differenziale $df : \Omega \to E^\star$ è una 1-forma differenziale.

**Definizione 6.1.2 - 1-Forma differenziale esatta**
Una 1-forma differenziale $\omega : \Omega \to E^\star$ è esatta se esiste $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $\omega = df$.
In tal caso, $f$ si dice primitiva di $\omega$.

**Definizione 6.1.3 - 1-Forma differenziale chiusa**
Sia $\omega \in C^1(\Omega, E^\star)$ e sia $x \in \Omega$. Notando che $D\omega(x) \in L(E, E^\star) \cong L^2(E \times E)$, se $D\omega(x)$ è simmetrico allora $\omega$ si dice 1-forma differenziale chiusa.

*Osservazione 6.1.1 - Esatta $\Rightarrow$ Chiusa*
Per il Teorema 3.3.2, segue dalla definizione che $\omega$ esatta $\Rightarrow$ $\omega$ chiusa.

## 6.2 Integrale di Linea

**Definizione 6.2.1 - Integrale di Linea per $C^1$**
Siano una 1-forma differenziale $\omega : \Omega \to E^\star$ dove $\Omega \subseteq E$ aperto e una curva $\gamma \in C^1([a,b], \Omega)$.
L'integrale di linea di $\omega$ lungo $\gamma$ è definito:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt$$

**Proposizione 6.2.1 - Additività rispetto al dominio**
*Nelle ipotesi della definizione 6.2.1, sia $c \in [a,b]$. Allora:*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma|_{[a,c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c,b]}} \omega$$

**Definizione 6.2.2 - Integrale di Linea per $C^1$ a tratti**
Siano una 1-forma differenziale $\omega : \Omega \to E^\star$ dove $\Omega \subseteq E$ aperto e una curva[1] $\gamma \in C^{1,Tr}([a,b], \Omega)$ tale che la derivata sia discontinua in $\{x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}\}$. Siano $x_0 = a$ ed $x_n = b$.
L'integrale di linea di $\omega$ lungo $\gamma$ è definito:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt$$

**Proposizione 6.2.2 - Invarianza per riparametrizzazione**
*Sia $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ una funzione $C^1$ tale che $\sigma(c) = a$ e $\sigma(d) = b$. Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una funzione $C^1$. Allora:*

$$\int_{\gamma\circ\sigma} \omega = \int_\gamma \omega$$

*Dimostrazione.* Basta infatti scrivere:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\sigma} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(\sigma(t)))[\dot\gamma(\sigma(t))\sigma'(t)]dt \\ &= \int_a^b \omega(\gamma(\sigma(t)))[\dot\gamma(\sigma(t))]\sigma'(t)dt \\ &= \int_{\sigma(a)}^{\sigma b} \omega(\gamma(s))[\dot\gamma(s)]ds = \int_\gamma \omega\end{aligned}$$

■

[1]Per funzione in $C^{1,Tr}$ si intende una funzione derivabile tale che la derivata sia discontinua in un numero finito di punti.

**Proposizione 6.2.3 - Condizione necessaria per $\omega$ esatta**
*Se $\omega$ è esatta, allora l'integrale di linea dipende solo dagli estremi della curva su cui si integra.*

*Dimostrazione.* Sia $\omega = df$. Allora:

$$\omega(\gamma(t))[\dot\gamma(t)] = df(\gamma(t))[\dot\gamma(t)] = \big(f(\gamma(t))\big)'$$

da cui per Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \big(f(\gamma(t))\big)' dt = \int_\gamma \omega$$

Analogamente accade per curve $C^1$ a tratti, in quanto si ottiene lo stesso risultato con una somma telescopica. ■

**Proposizione 6.2.4 - Condizione necessaria/sufficiente per $\omega$ esatta**
*Sia $\omega \in C^1(\Omega, E^\star)$. Se per ogni $\gamma \in C^{1,Tr}([a,b],\Omega)$ vale che $\int_\gamma \omega$ dipende soltanto da $\gamma(b)$ e $\gamma(a)$, allora $\omega$ è esatta.*

*Dimostrazione.* Assumiamo senza perdere generalità che $\Omega$ sia connesso per archi. Altrimenti, basta studiare le componenti connesse per archi.
Per ipotesi, prendendo $\gamma \in C^{1,Tr}([a,b],\Omega)$ tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$ si ottiene:

$$\int_x^y \omega = \int_\gamma \omega$$

per ogni coppia di $x, y \in \Omega$.
Fissato $x_0 \in \Omega$, definiamo $f(x) = \int_{x_0}^x \omega$. Allora per $h \to 0$:

$$f(x+h) = f(x) + \omega(x)h + o(h)$$

e la tesi segue formalmente dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. ■

**Definizione 6.2.3 - 1-forma differenziale conservativa**
Sia $\omega$ 1-forma differenziale. Si dice conservativa se per $\gamma$ cammino chiuso qualsiasi:

$$\int_\gamma \omega = 0$$

*Osservazione 6.2.1*
Sia $\omega$ una 1-forma. $\omega$ conservativa implica $\omega$ esatta.

*Dimostrazione.* Vediamo dei dettagli sulla implicazione conservativa $\Rightarrow$ esatta. Sia $\omega \in C^0(\Omega, \mathbb{E}^*)$ tale che $\int_\gamma \omega$ dipende solo da $\gamma(a), \gamma(b)$, $\forall \gamma \in C^{1tr}([a,b], \Omega)$. Senza perdere generalità, supponiamo $\Omega$ connesso ($\Rightarrow$ per archi), perchè in caso basta restringersi alle sue componenti connesse e trovare lì delle primitive. Ha senso definire per $x_0, x \in \Omega$:

$$\int_{x_0}^{x} \omega = \int_\gamma \omega$$

con qualunque $\gamma \in C^{1,tr}([a,b], \Omega)$ con $\gamma(a) = x_0, \gamma(b) = x$. Fisso $x_0 \in \Omega$ e definisco $f(x) := \int_{x_0}^{x} \omega$.
Sia $x \in \Omega$ con $B(x,r) \subseteq \Omega, r > 0$. Sia $h \in \mathbb{E}, \|h\| < r$. Per la proprietà di additività per giustapposizione di cammini:

$$f(x+h) = \int_{x_0}^{x+h} \omega = \int_{x_0}^{x} \omega + \int_{x}^{x+h} \omega = f(x) + \int_{x}^{x+h} \omega;$$

Se scriviamo la definizione di differenziale per $f$:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - \omega(x)h &= \int_0^1 \omega(x+th)[h]dt - \int_0^1 \omega(x)hdt \\ &= \int_0^1 [\omega(x+th) - \omega(x)]hdt \end{aligned}$$

da cui segue che in norma, per $h \to 0$:

$$\|f(x+h) - f(x) - \omega(x)h\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\omega(x+th) - \omega(x)\| \|h\| = o(\|h\|)$$

ovvero $df = \omega$.

$\blacksquare$

## 6.3 Caso di 1-forme su $\mathbb{R}^n$

In questa sezione denotiamo $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$.

Useremo il fatto che $E \cong E^*$ tramite prodotto scalare. Considerando la base canonica di $\mathbb{E}$ data da: $(e_k)_{k=1}^n$ si può definire una base per $E^*$ data da $(dx_k)_{k=1}^n$ dove:

$$< dx_k, e_h > = \ \delta_{k,h} \ = \ (e_k \cdot e_h)$$

cioè sono i funzionali che ritornano la $k$-esima coordinata del vettore valutato.

Scriviamo ora una 1-forma $\omega \in C^0(\Omega, \mathbb{E}^*)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{E}$, nella base duale:

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) dx_k$$

dove $a_k \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$.
Per l'isomorfismo $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^*$ alla 1-forma $\omega(x)$ corrisponde una mappa $F \in C^0(\Omega, \mathbb{E})$:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) e_k$$

ed in particolare si può riscrivere la valutazione di $\omega$ in termini di prodotto scalare, come:

$$\omega(x)[h] = (F(x) \cdot h)$$

**Proposizione 6.3.1 - Condizione di chiusura**
*Sia $\omega \in C^0(\Omega, \mathbb{E}^*)$ una 1-forma. $\omega$ è chiusa se e solo se per ogni $i, j = 1, \dots, n$:*

$$\partial_i a_j = \partial_j a_i$$

*Dimostrazione (Majer).* Dalla Definizione 6.1.3, segue che $\omega$ è chiusa se e solo se:

$$D\omega(x) = \Big[\partial_1 \omega(x) \mid \partial_2 \omega(x) \mid ... \mid \partial_n \omega(x)\Big]$$

è simmetrico.
Per la corrispondenza vista sopra, possiamo scrivere le derivate parziali:

$$\partial_i \omega(x) = \begin{pmatrix} \partial_i a_1(x) \\ \partial_i a_2(x) \\ \vdots \\ \partial_i a_n(x) \end{pmatrix}$$

e allora sostituendo:

$$D\omega(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 a_1(x) & \partial_2 a_1(x) & ... & \partial_n a_1(x) \\ \partial_1 a_2(x) & \partial_2 a_2(x) & ... & \partial_n a_2(x) \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \partial_1 a_n(x) & \partial_2 a_n(x) & ... & \partial_n a_n(x) \end{bmatrix}$$

che è simmetrica se e solo se per ogni $i, j = 1, \dots, n$:

$$\partial_i a_j = \partial_j a_i$$

■

*Dimostrazione (Visciglia).* ———————————— ■

**Definizione 6.3.1 - Omotopia**
Sia $X$ spazio topologico. Diciamo che due cammini $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a, b], X)$ sono omotopi a estremi fissi (quindi $A = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ e $B = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$) se esiste una funzione $\gamma : [0, 1] \times [a, b] \to X$ continua tale che:

- $\gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ e $\gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [a, b]$.
- $A = \gamma(s, a)$ e $B = \gamma(s, b)$ per ogni $s \in [0, 1]$.

Definiamo lo spazio dei cammini continui da $A$ in $B$ come $C_{A,B}([a, b], X)$.

**Lemma 6.3.1**
*Sia $g \in C^0([0, 1] \times [a, b], \mathbb{R})$ con derivata nella prima variabile $\partial_1 g \in C^0([0, 1] \times [a, b], \mathbb{R})$.*
*Allora la funzione definita dall'integrale per ogni $s \in [0, 1]$:*

$$J(s) = \int_a^b g(s, t) dt$$

*è derivabile, con derivata:*

$$J'(s) = \int_a^b \partial_1 g(s, t) dt$$

*Dimostrazione.* Solito sviluppo: per $s, r \in [0, 1]$

$$J(r) - J(s) - (a - b) \int_a^b \partial_1 g(s, t) dt = \int_a^b [g(r, t) - g(s, t) - (r - s)\partial_1 g(s, t)] dt$$

L'integrando si stima con il teorema del valor medio

$$|g(r,t) - g(s,t) - (r-s)\partial_1 g(s,t)| =$$
$$|(g(r,t) - r\partial_1 g(s,t)) - (g(s,t) - s(\partial_1 g(s,t))| = |[g(r,t) - \sigma\partial_1 g(s,t)]_{\sigma=s}^{\sigma=r}| \leq$$

$$\leq |r-s| \sup_{a\leq t\leq b, \sigma\in co(s,r)} |\partial_1 g(\sigma,t) - \partial_1 g(s,t)| = o(|r-s|) \text{ per } r \to s$$

perchè per esempio se $\omega$ è modulo di continuità di $\partial_1 g$, si maggiora con $|r-s-\omega(|r-s|)$[2] ■

I risultati del Lemma si possono generalizzare.

**Proposizione 6.3.2**
*Sia $g \in C^0(U\times[a,b],\mathbb{E})$ con differenziale nella prima variabile $D_1 g \in C^0(U\times [a,b],\mathbb{E})$.*
*Allora la funzione definita dall'integrale per ogni $s \in [0,1]$:*

$$J(s) = \int_a^b g(s,t)dt$$

*è differenziabile:*

$$DJ(s) = \int_a^b D_1 g(s,t)dt$$

*Dimostrazione.* Dimostrazione per esercizio. ■

**Proposizione 6.3.3 - Invarianza integrale per Cammini omotopi**
*Sia $\omega \in C^1(\Omega,\mathbb{E}^\star)$ chiusa e $\gamma \in C^2([0,1]\times[a,b],\Omega)$ ad estremi fissi, con $\gamma(s,a) = A$ e $\gamma(s,b) = B$ per ogni $s \in [0,1]$.*
*Allora l'integrale di $\omega$ lungo il cammino $\gamma(s,\cdot)$ è costante al variare di $s \in [0,1]$.*

*Dimostrazione.* Deriviamo rispetto a $s$ l'integrale di linea lungo $\gamma(s,\cdot)$

$$\int_{\gamma(s,\cdot)} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(s,t))[\partial_t\gamma]dt$$

Riconosco di essere in situazione dove posso applicare lemmino

$$\begin{aligned}(\int_{\gamma(s,\cdot)} \omega)' &= \int_a^b \partial_s\{\omega(\gamma)[\partial_t\gamma]\}dt \\ &= \int_a^b \{D\omega(\gamma(s,t))[\partial_s\gamma,\partial_t\gamma] + \omega(\gamma(s,t))\partial_s\partial_t\gamma\}dt\end{aligned}$$

[2] ascolta motivazione di o piccolo a 1.10 lezione 25/03

Siccome $\gamma \in C^2$ possiamo scambiare l'ordine di derivazione nel secondo addendo per il teorema di Schwarz-Peano e nel primo possiamo scambiare $\partial_s, \partial_t$ per l'ipotesi di $\omega$ chiusa. Quindi

$$= \int_a^b \{D\omega(\gamma)[\partial_t\gamma, \partial_s\gamma] + \omega(\gamma)\partial_t\partial_s\gamma\}dt = \int_a^b \partial_t\{\omega(\gamma)[\partial_s\gamma]\}dt$$
$$\stackrel{TFCI}{=} [\omega(\gamma(s,t))\partial_s\gamma(s,t)]_{t=a}^{t=b}$$

Ma poichè $\gamma(s,a) = A$ e $\gamma(s,b) = B$ $\forall s$, $\partial_s\gamma(s,a) = \partial_s\gamma(s,b) = 0$. Si conclude che $\int_{\gamma(s,\cdot)} \omega$ è costante in $s$. *Conseguenza*: per $\omega \in C^1(\Omega, \mathbb{E}^*)$ chiusa possiamo definire $\int_\gamma \omega$ anche per qualunque $\gamma \in C^0([a,b], \Omega)$ ponendo

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_0} \omega$$

con $\gamma_0$ cammino $C^2([a,b],\Omega)$ qualsiasi, con $\gamma_0 \in B(\gamma, \varepsilon) \subseteq C^0_{AB}([a,b],\Omega)$. Infatti: $C^0_{AB}([a,b],\Omega)$ è aperto in $C^0_{AB}([a,b],\mathbb{E})$. Quindi vi è $\varepsilon > 0$ tale che $B(\gamma,\varepsilon) \subseteq C^0_{AB}([a,b],\Omega)$. Per densità vi è almeno un $\gamma_0 \in B(\gamma,\varepsilon)$ di classe $C^2$, quindi è ben definito $\int_{\gamma_0}\omega$. Inoltre se $\gamma_1$ è un altro cammino $C^2$ con $\gamma_1(a) = A, \gamma_1(b) = B, \|\gamma - \gamma_1\|_\infty < \varepsilon$ allora possiamo confrontare $\int_{\gamma_0}\omega$ e $\int_{\gamma_1}\omega$ usando la proposizione precedente via l'omotopia $C^2$[3]

$$(s,t) \to s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$$

Poichè ciò definisce una funzione localmente costante $C_{AB}([a,b],\Omega) \to \mathbb{R}$ essa è costante sulle componenti connesse di $C_{AB}([a,b],\Omega)$ cioè per cammini omotopi a estremi fissati $A, B$ (in senso $C^0$)
Precisazione: perchè le funzioni sono dense?

*Osservazione 6.3.1*
La densità di $C^2([0,1],\mathbb{E})$ in $C^0([0,1],\mathbb{E}), \|\cdot\|_\infty$ si prova, per esempio, usando i polinomi di Bernstein a valori vettoriali
Oppure approssimando con curve a immagine finita dimensionale e usando il teorema di Weierstrass

■

[3] recupera idea di deformazione 1.35

# Capitolo 7

# Teoria della Misura

## 7.1 Definizioni sulla Misura

**Definizione 7.1.1 - $\sigma$-additività e $\sigma$-subadditività**
Sia $\alpha : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$. Allora $\alpha$ si dice:

- $\sigma$-additiva se per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per ogni partizione $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ numerabile vale:
$$\alpha(E) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \alpha(F)$$
- $\sigma$-subadditiva se per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per ogni ricoprimento $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ numerabile vale:
$$\alpha(E) \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} \alpha(F)$$

*Esempio 7.1.1*
Sia $X$ un insieme, $\{c_x\}_{x \in X} \subseteq [0, +\infty]$. Allora per ogni $S \subseteq X$:

$$\alpha(S) = \sum_{x \in S} c_x \quad \in \quad [0, +\infty]$$

definisce una funzione $\sigma$-additiva su $\mathcal{P}(X)$ (ciò segue dall'associatività generalizzata).

*Esempio 7.1.2*
Sia $X = [a, b]$ intervallo in $\bar{\mathbb{R}}$ e si consideri l'insieme:

$$\mathcal{I} = \{[c, d[ \mid a \leq c \leq d \leq b\}$$

Sia $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ una funzione crescente e continua a sinistra. Definiamo $\alpha : \mathcal{I} \to \bar{\mathbb{R}}$:
$$\alpha([c, d[) = f(c) - f(d)$$

definisce una funzione $\sigma$-additiva su $\mathcal{I}$.

*Dimostrazione 1.* Proviamo prima di tutto che per intervalli $\{\mathcal{J}_k\}_{0\leq k\leq m} \subseteq \mathcal{F}$ vale:

1. Se $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_m$ è una partizione di $\mathcal{J}_0$ allora $\alpha(\mathcal{J}_0) = \sum_{k=1}^m a(\mathcal{J}_k)$ Infatti l'uguaglianza della additività si riduce a una somma telescopica

2. Se $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_m$ sono disgiunti, $\bigcup_1^m \mathcal{J}_k \subseteq \mathcal{J}_0$ allora $\sum_{k=1}^m \alpha(\mathcal{J}_k) \leq \alpha(\mathcal{J}_0)$

3. Se $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_m$ ricoprono $\mathcal{J}_0$ ($\mathcal{J}_0 \subseteq \bigcup_1^m \mathcal{J}_k$) allora $\sum_{k=1}^m \alpha(\mathcal{J}_k) \geq \alpha(\mathcal{J}_0)$. Infatti se $a_0 < a_1 \cdots < a_n$ sono gli estremi dei $\mathcal{J}_k$, ordinati in modo crescente. Nel caso $(ii)$ ogni $\mathcal{J}_k$ è uguale a qualche $[a_{j-1}, a_j[$ e quindi la conclusione viene da $(i)$. Nel caso $(iii)$, la partizione $\{[a_{j-1}, a_j\}_{1\leq j\leq n}$ dell'intervallo $[a_0, a_n[$ raffina la famiglia $\{\mathcal{J}_k\}_{1\leq k\leq m}$ cioè ogni $[a_{j-1}, a_j[$ è contenuto in qualche $\mathcal{J}_k$; anzi:

$$\mathcal{J}_k = \bigcup_{[a_{j-1}, a_j \subseteq \mathcal{J}_k} [a_{j-1}, a_j[$$

allora

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq k\leq m} \alpha(\mathcal{J}_k) &= \sum_{1\leq k\leq m} \sum_{[a_{j-1}, a_j[\subseteq \mathcal{J}_l} \alpha([a_{j-1}, a_j[) \\ &\geq \sum_{\substack{1\leq k\leq m \\ [a_{j-1}, a_j[\subseteq \mathcal{J}_k}} (\alpha[a_{j-1}, a_j[) = \alpha(\mathcal{J}_0)\end{aligned}$$

ogni addendo della somma a destra appare nella somma a sinistra.
*$\sigma$-additività*: Sia $J = [c, d[$ ripartito in una famiglia numerabile di $J_k = [a_k, b_k[, k \in \mathbb{N}$. Sia $\varepsilon > 0$

DISEGNO

Per la continuità a sinistra della $f$ $\exists d' < d$ tale che $f(d') > f(d) - \varepsilon$. Similmente, $\forall k \in \mathbb{N} \exists a'_k < a_k$ tale che $f(a'_k) > f(a_k) - 2^{-k}\varepsilon$. Dunque:

$$\alpha[c, d'[\geq \alpha[c, d[-\varepsilon$$

e $\forall k$

$$\alpha[a'_k, b_k[\leq \alpha[a_k, b_k[+2^{-k}\varepsilon$$

Poichè $\{]a'_k, b_k[\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di $[c, d']$ vi è un $m$ tale che $\bigcup_{k=1}^m ]a'_k, b_k[\supseteq [c, d']$ quindi anche $\bigcup_{k=1}^m [a'_k, b_k[\supseteq [c, d'[$. Allora

$$\alpha([c,d[) \leq \alpha([c,d'[)+\varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \alpha([a'_k, b_k[)+\varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \alpha([a_k, b_k[)+\sum_{k=1}^m 2^{-k}\varepsilon+\varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^\infty \alpha([a_k, b_k[) + 2\varepsilon$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario:

$$\alpha([c,d[) \leq \sum_{k=1}^\infty \alpha([a_k, b_k[)$$

d'altra parte, per $(ii)$, si ha $\forall m, \alpha([c,d[) \geq \sum_{k=1}^m \alpha([a_k, b_k[)$ e quindi anche per $\sum_{k=1}^\infty \alpha([a_k, b_k[)$

■

*Osservazione 7.1.1*
Se $J = [c, d[\in \mathcal{J}$ è ripartito in una famiglia numerabile di intervalli $\{[a, a'[\}_{a\in A}$ l'insieme $A$ degli estremi sinistri è bene ordinato dall'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$.

*Dimostrazione 2.* Infatti: se $B \leq A, \emptyset \neq B$ si ha $c < \beta := \inf B < d$. Quindi $\beta \in [a, a'[$ per qualche $a \in A$. Siccome $\beta$ è $\inf B$, vi sono elementi di $B$ in $[\beta, a'[$ e quindi $\beta = a$ perchè $]\beta, a'[\subseteq [a, a'[$ e l'unico elemento di $A$ in $[a, a'[$ è $a$.

*Dimostrazione Matano.* Copiare da Punis ■

Allora la tesi

$$\alpha[c, d[= \sum_{x\in\Lambda} \alpha[x, x'[$$

segue per induzione transfinita sull'insieme ben ordinato $A' = A \cup \{d\}$

$$\alpha([c,d[) = \sum_{x\in A, x<a} \alpha[x, x'[$$

vale $\forall a \in A'$. Supponiamo che valga per ogni $a \in A$ minore di $b \in A'$. Infatti:

- se $b = c$ si riduce a $\alpha(\emptyset) = \sum_\emptyset = 0$

- se $b = a'$ per qualche $a$, vale l'ipotesi induttiva per $a < b$ e quindi

$$\alpha[c, b[= \alpha([c, a[) + \alpha[a, a'[= \sum_{x \in A, x < a} \alpha[x, x'[ + \alpha[a, a'[= \sum_{x \in A x < b} \alpha[x, x'[$$

- se $b > c, b \neq x' \forall x \in A$ allora $b$ è limite di una successione crescente $a_n$ di elementi di $A$. Allora

$$\alpha[c, b[= f(b) - f(c) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) - f(c) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in A, x < a_n} \alpha([x, x'[) = \sum_{x \in A, x < b} \alpha([x, x'[)$$

$\blacksquare$

**Definizione 7.1.2 - $\sigma$-algebra**
Una $\sigma$-algebra di un insieme $X$ è un insieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che:

- per ogni $A \in \mathcal{A}$ vale che $A^C \in \mathcal{A}$
- per ogni $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ numerabile vale che $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{A}$

**Definizione 7.1.3 - $\sigma$-algebra generata**
Dato un insieme $X$ e una famiglia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esiste la minima $\sigma$-algebra contenente $\mathcal{E}$. Essa è la $\sigma$-algebra generata da $\mathcal{E}$, si indica: $\sigma\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

**Definizione 7.1.4 - $\sigma$-algebra boreliana**
Dato uno spazio topologico $X$, la $\sigma$-algebra dei boreliani è quella generata dagli aperti della topologia di $X$.

**Definizione 7.1.5 - Misura**
Una misura $m$ su $X$ spazio topologico è una funzione $\sigma$-additiva a valori in $[0, +\infty]$, definita su una $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ di $X$:

$$m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

La terna $(X, \mathcal{A}, m)$ si dice spazio di misura.

**Definizione 7.1.6 - Misura Esterna**
Una misura esterna $m$ su $X$ spazio topologico è una funzione $\sigma$-subadditiva a valori in $[0, +\infty]$, definita su $\mathcal{P}(X)$:

$$m : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

**Definizione 7.1.7 - Spazio di misura completo**
Uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, m)$ si dice completo se per ogni $A \in \mathcal{A}$ di misura nulla[1] e per ogni $B \subseteq A$ segue che $B \in \mathcal{A}$.

**Definizione 7.1.8 - $\mu$-misurabilità secondo Carathéodory**
Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna su $X$ topologico. Allora $A \in \mathcal{P}(X)$ è $\mu$-misurabile secondo Carathéodory se per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^C)$$

**Definizione 7.1.9 - Atomo**
Sia $(X, \mathcal{A}, m)$ uno spazio di misura. Un atomo è un insieme misurabile $A$ tale che:

- $m(A) > 0$
- per ogni $B \subseteq A$ vale che $m(B) = \begin{cases} 0 \\ m(A) \end{cases}$

Seguono le definizioni per uno spazio di misura:

- non-atomico: non ha atomi.
- puramente atomico: $\mathcal{A}$ è la $\sigma$-algebra generata dai suoi atomi.

### 7.1.1 Fatti base sulle Misure

Sia $(X, \mathcal{A}, m)$ uno spazio di misura. Valgono i seguenti fatti generali.

**Proposizione 7.1.1 - Monotonia**
*Siano $A, B \in \mathcal{A}$ tali che $A \subseteq B$. Allora $m(A) \leq m(B)$.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla $\sigma$-additività:

$$m(B) = m(A) + m(B \cap A^C) \leq m(A)$$

■

**Proposizione 7.1.2 - $\sigma$-subadditività**
*Sia $A \in \mathcal{A}$ ed $(A_k) \subseteq \mathcal{A}$ un ricoprimento numerabile di $A$. Allora esiste un raffinamento $(A'_k)$ di $(A_k)$ che è partizione di $A$. In particolare:*

$$m(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} m(A'_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} m(A_k)$$

[1] Un insieme si dice di misura nulla se $m(A) = 0$.

*Dimostrazione.* Si pone $A'_k = A_k \setminus \bigcup_{j<k} A_j$ in modo che gli $A'_k$ siano disgiunti e ricoprano $A$. Segue allora la tesi. ■

**Proposizione 7.1.3 - Regolarità esterna**
*Sia $(A_k) \subseteq \mathcal{A}$ successione tale che $A_k \subseteq A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora:*

$$m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} m(A_k)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo per notazione $A_{-1} = \emptyset$. Allora si osserva che:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \setminus A_{k-1}$$

da cui segue che:

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} m(A_k \setminus A_{k-1}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} m(A_k \setminus A_{k-1}) \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} m\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \setminus A_{k-1}\right) = \sup_{m\in\mathbb{N}} m(A_m) \end{aligned}$$

■

**Proposizione 7.1.4 - Regolarità interna al finito**
*Sia $(A_k) \subseteq \mathcal{A}$ successione tale che $A_k \supseteq A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia inoltre $m(A_0) < +\infty$. Allora:*

$$m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}} m(A_k)$$

*Dimostrazione.* Segue subito dalla regolarità esterna enunciata prima, infatti:

$$m(\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k) + m(A_0 \setminus \cap_{k\in\mathbb{N}} A_k) = m(A_0)$$

essendo $< \infty$ e per regolarità esterna

$$\begin{aligned} m(\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k) &= m(A_0) - m(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_0 \setminus A_k) \\ &= m(A_0) - \sup m(\cup_{0\le k\le n} A_0 \setminus A_k) \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_0) - m(\cup_{0\le k\le n} A_0 \setminus A_k) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_k) \end{aligned}$$

■

**Teorema 7.1.1 - Teorema di Severini-Egoroff**
*Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio di misura tale che* $\mu(X) < +\infty$. *Se* $f_n \to f$ *quasi-ovunque, allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ *tale che* $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ *e* $f_n \to f$ *uniformemente su* $X \setminus A_\varepsilon$.

*Dimostrazione.* Omessa. ∎

## 7.2 Costruzione di Misure

### 7.2.1 Funzioni d'insieme → Misure Esterne

**Proposizione 7.2.1 - Esistenza della massima misura esterna**
*Sia $\alpha : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una funzione di insieme su $X$.*
*Allora esiste la massima misura esterna tra quante sono $\leq \alpha$ su $\mathcal{E}$. Essa si chiama "misura esterna prodotta da $\alpha$" e denotata $\alpha^\star$.*
*Inoltre vale che:*

$$\alpha^\star \textit{ estende } \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \textit{ è } \sigma\textit{-subadditiva}$$

*Dimostrazione.* Se $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ è una misura esterna e $\mu|_{\mathcal{E}} \leq \alpha$ vale, $\forall S \in \mathcal{P}(X)$ e $\forall (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ ricoprimento di $S$

$$\mu(S) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha(E_k)$$

prima dis per subadditivita seconda perchè $\mu|_{\mathcal{E}} \leq \alpha$. e quindi

$$\mu(S) \leq \alpha^*(S) := \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha(E_k) : (E_k)_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{E} \textit{ ricoprimento di } S\}$$

e il membro destro definisce una funzione di insieme $\alpha^*$ che è $\sigma$-subadditiva (verifica per esercizio, immediato. solito giochetto di $\epsilon 2^{-k}$) [se $S_1, S_k \in \mathcal{P}(X), k \in \mathbb{N}$ e $S \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}}$; se un $S_k$ ha $\alpha^*(S_k) = \infty$ non c'è nulla da provare: $\alpha^*(S) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^*(S_k)$; altrimenti sia $\epsilon > 0. \forall k \exists \{E_{k,j}\}_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{E}$-ricoprimento di $S_k$ con

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha(E_{k,j}) \leq \alpha^*(S_k) + 2^{-k}\varepsilon$$

e allora $\{E_{k,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un $\mathcal{E}$- ricoprimento numerabile di $S$ tale che

$$\begin{aligned}\alpha^*(S) \leq \sum_{k,j} \alpha(E_{k,j}) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}(\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(E_{k,j})) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha^*(S_k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\varepsilon \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha^*(S_k) + 2\varepsilon\end{aligned}$$

allora essendo $\varepsilon$ arbitrario

$$\alpha^*(S) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha^*(S_k)$$

Infine: se $\alpha^*|_{\mathcal{E}}$, allora in particolare $\alpha$ è sub-$\sigma$-additiva. Viceversa: se $\alpha$ è sub-$\sigma$-additiva, $\forall A in \mathcal{E}$ e $\forall (E_k)\mathcal{E}$-ricoprimento numerabile di $A$ $\alpha(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(E_k)$, quindi $\alpha(A) \leq \alpha^*(A)$, e d'altra parte $\alpha^*(A) \leq \alpha(A)$ (perchè $\alpha^*|_{\mathcal{E}} \leq \alpha$) ■

### 7.2.2 Misure Esterne → Misure

**Proposizione 7.2.2 - Costruzione $m^\star$ da $m$ misura**
*Sia $(X, \mathcal{A}, m)$ spazio di misura ed $m^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ la misura esterna associata ad $m$. Sia $S \in \mathcal{P}(X)$.*
*Allora esiste[2] $S^\star \in \mathcal{A}$ tale che $S \subseteq S^\star$ e $m^\star(S) = m(S^\star)$.*

*Dimostrazione.* Infatti nella definizione di $m^*$

$$m^*(S) := \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} m(A_k) : (A_k)_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{Q} - ricoprimento\ di\ S\}$$

Possiamo limitarci a ricoprimenti fatti con un unico $A \in \mathcal{A}$ dato $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{A}$-ricoprimento di $S$, l'insieme $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ sta in $\mathcal{A}$ ($\sigma$-algebra) ed ha $m(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k)$. Quindi in questo caso

$$m^*(S) = \inf_{A\supseteq S, A\in\mathcal{Q}} m(A)$$

se $m^*(S) = +\infty$ basta prendere $S = X$ altrimenti sia $A_n \in \mathcal{A}, A_n \supseteq S$ una successione minimizzante, allora $S^* := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq S$ e $m(S^*) \leq m(A_n)$ per monotonia dunque $m(S^*) \leq \inf m(A_n) = m^* \leq m^*(S^*) = m^*(S^*)$ perciò $m^*(S) = m(S^*)$ ∎

**Proposizione 7.2.3 - Scomposizione**
*Sia $(X, \mathcal{A}, m)$ spazio di misura e $A \in \mathcal{A}$. Per ogni $S \in \mathcal{P}(X)$ vale che:*

$$m^\star(S) = m^\star(S \cap A) + m^\star(S \setminus A)$$

*Si dice che "A taglia bene ogni $S \in \mathcal{P}(X)$"*

*Dimostrazione.* ——————————— ∎

*Osservazione 7.2.1*
Questa proposizione discende la $\mu$-misurabilità (vedi Definizione 7.1.8).

**Proposizione 7.2.4 - $\sigma$-algebra da misura esterna**
*Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna. Allora:*

1. *$\mathcal{A}_\mu = \{A \in \mathcal{P}(X)$ tali che $A$ è misurabile$\}$ è una $\sigma$-algebra.*
2. *$\mu|_{\mathcal{A}_\mu}$ è una misura completa.*

*Dimostrazione.* ——————————— ∎

[2] $S^\star$ non è unico ed è chiamato coperchio misurabile.

**Proposizione 7.2.5**
*Sia* $\alpha : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *una mappa* $\sigma$*-subadditiva e sia* $\alpha^\star$ *la misura esterna. Allora* $A \in \mathcal{P}(X)$ *è* $\alpha^\star$*-misurabile se e solo se per ogni* $S \in \mathcal{E}$

$$\alpha^\star(S) \geq \alpha^\star(S \cap A) + \alpha^\star(S \cap A^C)$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Teorema 7.2.1 - Teorema di Estensione di Misure**
*Sia* $\alpha : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *una funzione di insieme. Allora* $\alpha^\star|\mathcal{A}_{\alpha^\star}$ *estende* $\alpha$ *se e solo se:*

1. $\alpha$ *è* $\sigma$*-subadditiva*

2. *per ogni* $A, B \in \mathcal{E}$ *vale che* $\alpha^\star(B) \geq \alpha^\star(B \cap A) + \alpha^\star(B \cap A^C)$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

### 7.2.3 Misure sugli Intervalli

Ricordiamo dall'Esempio 7.1.2 che dati $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ crescente e continua a sinistra ed $\mathcal{I} = \{[c, d[ \mid a \leq c \leq d \leq b\}$, si può definire una funzione $\alpha : \mathcal{I} \to [0, +\infty]$:

$$\alpha([c, d[) = f(d) - f(c)$$

che è $\sigma$-additiva (quindi $\sigma$-subadditiva).
Vediamo che $\alpha$ verifica anche l'ipotesi (2) del Teorema 7.2.1.
Siano $a \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4 \leq b$. Allora indicando $I_1 = [c_1, c_2[$ e $I_2 = [c_3, c_4[$ e prendendo $p \in \mathbb{R}$ tale che $c_2 \leq p \leq c_3$:

$$\begin{aligned}
\alpha^\star(I_1 \cup I_2) &= \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J_k) \mid (J_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \textit{ tale che } \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k \supseteq I_1 \cup I_2 \right\} \\
&\geq \inf \Bigg\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha\left(J_k \cap ]-\infty, p[\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha\left(J_k \cap [p, +\infty[\right) \mid \\
&\qquad \mid (J_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \textit{ tale che } \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k \supseteq I_1 \cup I_2 \Bigg\} \\
&\geq \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J'_k) \mid (J'_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \textit{ tale che } \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J'_k \supseteq I_1 \right\} + \\
&\qquad + \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(J''_k) \mid (J''_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \textit{ tale che } \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J''_k \supseteq I_2 \right\} \\
&= \alpha^\star(I_1) + \alpha^\star(I_2)
\end{aligned}$$

Per il Teorema di Estensione, $\alpha$ si estende ad una misura completa su una $\sigma$-algebra contenente l'insieme $\mathcal{I}$ (contenente quindi la $\sigma$-algebra dei Boreliani).

*Osservazione 7.2.2*
Da quanto appena visto, ogni $S \subseteq [a,b]$ ha un coperchio misurabile $S^\star = G_j$, dove indichiamo $G_j$ come intersezione numerabile di aperti di $\bar{\mathbb{R}}$.
**RICONTROLLARE** Basta infatti reiterare la costruzione precedente, "suddividendo" ogni insieme $S$ intersecandoli con aperti.

*Osservazione 7.2.3 - Caratterizzazione misurabili*
Ogni insieme $S$ che è $\alpha^\star$-misurabile è della forma $S = S^\star \setminus N$ dove:

- $S^\star = G_j$
- $N$ è un sottoinsieme boreliano di misura nulla

Più in generale vale la seguente Proposizione 7.2.6.

**Definizione 7.2.1 - Quasi-anello**
Una famiglia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice quasi-anello di parti di $X$ se per ogni $A, B \in \mathcal{E}$:

- $A \cap B$ è unione numerabile disgiunta di elementi di $\mathcal{E}$.
- $A \setminus B$ è unione numerabile disgiunta di elementi di $\mathcal{E}$.

**Proposizione 7.2.6 - Condizione sufficiente per Estensione**
*Sia $\alpha : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ una funzione $\sigma$-additiva su $\mathcal{E}$ quasi-anello. Allora valgono le condizioni del Teorema 7.2.1.*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Corollario 7.2.1.1 - Misure Finite sui Boreliani**
*Vi è una bigezione tra:*

$$\left\{ \begin{array}{c} f : [a,b] \to [0,+\infty] \\ \textit{crescenti continue a sinistra} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{\textit{Misure sui boreliani di } [a,b[\}$$

$$\begin{array}{ccc} f_m(x) = m([a,x[) & \longleftarrow & m \\ f & \longrightarrow & \begin{array}{c} \alpha^\star \textit{ estensione di} \\ \alpha : [c,d[ \mapsto f(d) - f(c) \end{array} \end{array}$$

### 7.2.4 Misura di Lebesgue (pt.1)

**Definizione 7.2.2 - Misura di Lebesgue**
La misura sui boreliani di $\mathbb{R}$ estesa da $f(x) = x$ viene chiamata misura di Lebesgue; la indicheremo $m(A) = |A|$.

**Definizione 7.2.3 - Misura esterna di Lebesgue**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo la misura esterna di Lebesgue come:

$$|A|_e = m^\star(A) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{+\infty} |I_i| \;\middle|\; \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}} \textit{ ricoprimento di } A \textit{ con intervalli}\right\}$$

oppure considerando intervalli disgiunti $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$:

$$|A|_e = \inf\left\{|U| \;\middle|\; U \supset A \textit{ aperto}\right\}$$

### 7.2.5 Misura Prodotto

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ due spazi di misura. Consideriamo il prodotto cartesiano $X \times Y$ con la $\sigma$-algebra prodotto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{E}$.
Definiamo la funzione d'insieme:

$$\begin{array}{cccc} \lambda: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A \times B & \mapsto & \mu(A)\nu(B) \end{array}$$

**Fatterello 7.2.1 - $\lambda$ è $\sigma$-additiva**
*Siano $A, A_k \in \mathcal{A}$ e $B, B_k \in \mathcal{B}$ dove $k \in \mathbb{N}$ tali che: $A \times B = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \times B_k$. Per ogni $x \in A$ vale che:*

$$B = \bigsqcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ A_k \ni x}} B_k$$

*quindi valutando nella misura $\nu$, per ogni $x \in A$*

$$\nu(B) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ A_k \ni x}} \nu(B_k)$$

*che riscritto per ogni $x \in X$:*

$$\chi_A(x)\mu(B) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ A_k \ni x}} \chi_{A_k}\nu(B_k)$$

*In particolare, consideriamo le somme parziali della sommatoria al membro a destra: sono funzioni misurabili non negative, per cui applicando il Teorema 7.4.1, si integra rispetto ad $X$:*

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)\nu(B_k)$$

*Questo dimostra la $\sigma$-additività.*

**Fatterello 7.2.2 - $\mathcal{E}$ è un quasi-anello**
*Siano $A, A' \in \mathcal{A}$ e $B, B' \in \mathcal{B}$. Allora vale che:*

- $A \times B \cap A' \times B' = (A \cap A') \times (B \cap B')$
- $A \times B \setminus A' \times B' = A \times (B \setminus B') \sqcup (A \setminus A') \times (B \setminus B')$

*quindi $\mathcal{E}$ verifica le proprietà di un quasi-anello.*

Ma allora dalla Proposizione 7.2.6 segue che $\lambda$ si può estendere ad una misura prodotto $\mu \otimes \nu$ sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

*Osservazione 7.2.4*
La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ è proprio la misura prodotto $m \otimes \cdots \otimes m = m^{\otimes n}$ dove $m$ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

### 7.2.6 Misura di Lebesgue (pt.2)

**Proposizione 7.2.7 - Invarianti per la misura di Lebesgue**
*La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue e $v \in \mathbb{R}^n$, vale[3]:*

$$m(A + v) = m(A)$$

In realtà vale di più, come vedremo nel Corollario 7.2.2.1. Per arrivare a tale risultato, bisogna prima introdurre $\lambda$-sistemi e $\pi$-sistemi.

**Definizione 7.2.4 - $\lambda$-sistema**
Sia $X$ un insieme. Un $\lambda$-sistema è un sottoinsieme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ che verifica:

1. dati $A, B \in \mathcal{M}$ tali che $A \subseteq B$ vale che $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
2. se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ crescenti per inclusione, allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

**Definizione 7.2.5 - $\pi$-sistema**
Sia $X$ un insieme. Un $\pi$-sistema è $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che per ogni $A, B \in \mathcal{E}$ vale $A \cap B \in \mathcal{E}$.

**Proposizione 7.2.8 - Caratterizzazione $\sigma$-algebra**
*Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{M}$ è una $\sigma$-algebra.*
2. *$\mathcal{M}$ è un $\lambda$-sistema ed un $\pi$-sistema.*

[3] Ricordo la notazione: $A + v = \{a + v \mid a \in A\}$.

*Dimostrazione.* Le implicazioni seguono direttamente dalle definizioni. ■

**Teorema 7.2.2 - Teorema della Classe Monotona (Sierpinski)**
*Sia $X$ un insieme. Sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un $\pi$-sistema tale che $X \in \mathcal{E}$.*
*Allora il minimo $\lambda$-sistema generato da $\mathcal{E}$ è una $\sigma$-algebra, che indicheremo $\lambda(\mathcal{E})$.*

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Corollario 7.2.2.1 - Caratterizzazione della Misura di Lebesgue**
*La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ è l'unica misura sullo spazio $\mathbb{R}^n$ che soddisfa:*

- *l'invarianza per traslazioni.*
- $m([0,1]^n) = 1$, *ossia che è normalizzata su* $[0,1]^n$.

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Corollario 7.2.2.2**
*Sia $(X, \mathcal{A})$ un insieme dotato di una $\sigma$-algebra e con due misure $\mu_1$ e $\mu_2$. Se $\mu_1$ e $\mu_2$ coincidono su un $\pi$-sistema $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, allora coincidono su $\lambda(\mathcal{E})$.*

## 7.3 Funzioni Misurabili

**Definizione 7.3.1 - Spazio Misurabile**
Un insieme $X$ con una $\sigma$-algebra si dice uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$.

**Definizione 7.3.2 - Funzione Misurabile**
Una funzione $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ si dice misurabile se per ogni $B \in \mathcal{B}$ vale $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

**Proposizione 7.3.1 - Topologico $\to$ Misurabile**
*Sia $(X, \tau)$ uno spazio topologico. $X$ diventa spazio misurabile con la $\sigma$-algebra dei boreliani $\sigma A(\tau)$.*

**Proposizione 7.3.2 - Criterio di misurabilità di $f$**
*Sia $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ funzione tra spazi misurabili. Allora:*

- *l'insieme $\{B \in \mathcal{B}$ tale che $f^{-1} \in \mathcal{A}\}$ è una $\sigma$-algebra.*
- *$f$ è misurabile se e solo se genera $\mathcal{B}$ come $\sigma$-algebra.*

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

**Corollario 7.3.0.1**
*Se $f : X \to Y$ è una funzione continua tra topologici, allora è misurabile.*

**Proposizione 7.3.3 - Prodotto Cartesiano**
*Siano $(X_1, \mathcal{A}_1)$ ed $(X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Allora il prodotto cartesiano $X_1 \times X_2$ si può munire della $\sigma$-algebra prodotto:*

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1 \;\; A_2 \in \mathcal{A}_2$$

*Essa è la minima $\sigma$-algebra che rende le proiezioni su $X_1$ ed $X_2$ misurabili.*

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

**Corollario 7.3.0.2 - Misurabilità sulle coordinate**
*Siano $X, Y_1, Y_2$ spazi misurabili. Allora $f : X \to Y_1 \times Y_2$ è misurabile se e solo se le coordinate lo sono[4].*

*Dimostrazione.* La tesi segue direttamente dalla definizione di $\sigma$-algebra prodotto. ■

[4]Ovvero se la misurabilità funziona per elementi della $\sigma$-algebra di $Y_1$ e di $Y_2$ separatamente.

**Proposizione 7.3.4 - Inviluppo Superiore e limite**
*Siano* $f_k : (X, \mathcal{A}) \to \bar{\mathbb{R}}$ *funzioni misurabili, per* $k \in \mathbb{N}$. *Allora:*

1. *l'inviluppo superiore* $f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ *è una funzione misurabile.*

2. *le funzioni* $\limsup_{k \to +\infty} f_k$ *ed* $\liminf_{k \to +\infty} f_k$ *sono funzioni misurabili.*

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Definizione 7.3.3 - Limite Superiore di successione di insiemi**
Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$, si definisce:

$$\limsup(A_n) = \{x \in X \mid \forall\, x \in A_n\; definitivamente\}$$

**Teorema 7.3.1 - Teorema di Borel-Cantelli**
*Sia* $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *successione di misurabili nello spazio di misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Supponiamo che* $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. *Allora:*

$$\mu\left(\limsup(A_n)\right) = 0$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

## 7.4 Integrazione secondo Lebesgue

**Definizione 7.4.1 - Funzione Semplice**
Una funzione semplice $f : (X, \mathcal{A}) \to \bar{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile con $Imf$ di cardinalità finita, ovvero:

$$f(x) = \sum_{c \in \mathbb{R}} c \cdot \chi_{f(x)=c}$$

ovvero $f \in Span\{\chi_A \mid A \in \mathcal{A}\}$.
Denoteremo:

$$\mathcal{S}^+ = \{f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty[ \ \textit{funzioni semplici non negative}\}$$

**Proposizione 7.4.1 - Misurabilità: successioni di funzioni semplici**
*Ogni limite puntuale di funzioni semplici (misurabili) è misurabile. Viceversa, ogni funzione $f : (X, \mathcal{A}) \to \bar{\mathbb{R}}$ misurabile è limite puntuale di funzioni semplici.*

*Dimostrazione.* La prima implicazione segue dalla Proposizione 7.3.4. Per il viceversa, costruiamo una successione di funzioni semplici.
Si comincia da un'osservazione: dato $c \in \bar{\mathbb{R}}$, si possono definire successioni convergenti a $c$ nel seguente modo:

- se $c = +\infty$ allora $c_k = k \longrightarrow c = +\infty$.
- se $c = -\infty$ allora $c_k = -k \longrightarrow c = -\infty$.
- se $c \in \mathbb{R}$ allora $c_k = 2^{-k}\lfloor 2^k c \rfloor \longrightarrow c$

che generalizzando si può scrivere[5]:

$$c_k = 2^{-k} \left\lfloor 2^k \left( (c \wedge k) \vee -k \right) \right\rfloor$$

Poniamo:

$$f_k(x) = 2^{-k} \left\lfloor 2^k \left( (f(x) \wedge k) \vee -k \right) \right\rfloor$$

dove:

- $f_k$ sono funzioni semplici in quanto $|Imf_k| \leq 2k + 1$, quindi misurabili
- $f_k \to f$ puntualmente

da cui la tesi. ∎

[5]Ricordiamo la notazione: $\wedge$ è il minimo tra i due termini, $\vee$ il massimo.

**Definizione 7.4.2 - Integrale di Funzioni Semplici**
Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura e $f \in \mathcal{S}^+$, tale che:

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{A_k}$$

dove $\{A_k\}_{k=1,\ldots,n} \subseteq \mathcal{A}$. Definiamo l'integrale su $X$ di $f$ come:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k)$$

Verifichiamo la buona definizione: l'integrale non dipende dalla rappresentazione in somma di $f$.
Supponiamo che:

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{n'} c'_k \cdot \chi_{A'_k}$$

dove senza perdere generalità $A_k = A'_k$ ed $n = n'$. Basterebbe infatti considerare l'unione di $\{A_k\}$ ed $\{A'_k\}$ con tutte le possibili intersezioni.
Sia ora $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}([n])}$ la $\sigma$-algebra generata da $A_1, \ldots, A_n$ dove per ogni $\alpha \in \mathcal{P}([n])$:

$$B_\alpha = \left( \bigcap_{i \in \alpha} A_i \right) \cap \left( \bigcap_{i \notin \alpha} A_i^C \right)$$

In particolare $B_\alpha$ sono disgiunti e ricoprono $\bigcap\limits_{k=1,\ldots,n} A_k$, più precisamente:

$$A_i = \bigsqcup_{\alpha \ni i} B_\alpha$$

Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{\alpha \ni i} \mu(B_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}([n])} \left( \sum_{i \in \alpha} c_i \right) \mu(B_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{P}([n])} \left( \sum_{i \in \alpha} c'_i \right) \mu(B_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} c'_i \mu(A_i) \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza vale perché per $i \in \alpha$ vale che $c_i = f|_{B_\alpha} = c'_i$.

*Notazione 7.1 - Integrazione su sottoinsieme*
Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio metrico e $Y \in \mathcal{A}$. Scriviamo:

$$\int_Y f d\mu = \int_X f \cdot \chi_Y d\mu$$

**Proposizione 7.4.2 - Proprietà dell'Integrale di Funzioni Semplici**
*Siano $f, g \in \mathcal{S}^+$. Allora:*

1. *vale l'additività, cioè:*
$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$
2. *l'integrale è positivamente omogeneo, per $\lambda \geq 0$:*
$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$$
3. *l'integrale è crescente, se $f \leq g$ allora*
$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$
4. *vale l'additività rispetto al dominio. Dati $A, B \in \mathcal{A}$ disgiunti*
$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Definizione 7.4.3 - Integrale per Misurabili non negativi**
Sia $f; (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty[$ funzione misurabile non negativa. Allora:
$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{S}^+ \\ \varphi \leq f}} \int_X \varphi d\mu$$

*Osservazione 7.4.1 - Generalizzazione di Sommatoria*
Sia $X$ un insieme dotato della misura di cardinalità $\mu$:
$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & se\ card(A) < +\infty \\ +\infty & altrimenti \end{cases}$$

Data $f : X \to [0, +\infty[$, equivalente ad una famiglia di reali non negativi indicizzata su $X$, vale che:
$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{F\in\mathcal{F}(X)} \sum_{x\in F} f(x) = \int_X f d\mu$$

dove $\mathcal{F}(X)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di $X$ di cardinalità finita.
Con questa misura, possiamo dare una definizione di sommatorie di famiglie tramite integrali.

**Definizione 7.4.4 - Quasi-ovunque**
Sia $X$ uno spazio di misura. Una proprietà vale quasi-ovunque se l'insieme dei punti di $X$ per cui la proprietà è falsa ha misura nulla.

**Proposizione 7.4.3**
*Sia $f : X \to [0, +\infty[$ una funzione misurabile non negativa. Allora:*

1. *$f$ nulla quasi-ovunque se e solo se $\int_X f d\mu = 0$.*
2. *$\int_X f d\mu < +\infty$ implica $f < +\infty$ quasi-ovunque.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo i 2 punti separatamente.

1. Se $f = 0$ quasi-ovunque, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}^+$ tale che $0 \leq \varphi \leq f$ segue che $\varphi = 0$ quasi-ovunque. Ma allora $\int_X \varphi d\mu = 0$. Per definizione di integrale di $f$ segue la tesi.
   Viceversa, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale che $f \geq \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{f \geq \frac{1}{n}\}}$. Integrando:
   $$0 = \int_X f d\mu \geq \frac{1}{n}\, \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right)$$
   per cui $\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$ per ogni $n$. Ma dato che:
   $$\{f > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$$
   allora vale la tesi.
2. Supponiamo per assurdo che esista $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) > 0$ dove per ogni suo punto $f = +\infty$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$:
   $$\varphi_n = n \cdot \chi_A \leq f$$
   Ma allora:
   $$\int_X f d\mu \geq \limsup_{n \to +\infty} \int_X \varphi_n d\mu = \limsup_{n \to +\infty} n\mu(A) = +\infty$$

■

**Definizione 7.4.5 - Funzione Integrabile**
Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice integrabile se:

- $f$ è misurabile

- $\int_X |f| d\mu < +\infty$

**Proposizione 7.4.4 - Definizione equivalente**
*Equivalentemente, sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura. Una funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *si dice integrabile se:*

$$f = g - h$$

*con* $g, h : X \to [0, +\infty]$ *misurabili con integrale finito.*

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Definizione 7.4.6 - Integrale per Funzioni Integrabili**
Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Data la scrittura $f = g - h$ data dalla Proposizione 7.4.4:

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu - \int_X h d\mu$$

*Osservazione 7.4.2*
L'integrale di $f$ non dipende dalla scelta di $g, h$. Supponiamo che $f = g - h = g' - h'$. L'additività dell'integrale di funzioni misurabili, sapendo che $g + h' = g' + h$, implica:

$$\int_X g d\mu - \int_X h d\mu = \int_X g' d\mu - \int_X h' d\mu$$

**Proposizione 7.4.5 - Additività dell'Integrale**
*Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e siano* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Allora vale la propietà di additività:*

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Definizione 7.4.7 - Spazio delle Funzioni Integrabili**
Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. L'insieme delle funzioni integrabili su $X$ è uno spazio vettoriale:

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu) = \mathcal{L}^1(X)$$

**Proposizione 7.4.6 - Proprietà di $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$**
*Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura, considero il suo spazio delle funzioni integrabili* $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *la funzione integrale* $\int_X$*, come applicazione* $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ *è una forma lineare.*

2. *la funzione* $\|\cdot\|_1$ *definita:*

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\|_1 & \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & f & \mapsto & \|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \end{array}$$

*è una seminorma. In particolare* $\|f\|_1 = 0$ *se e solo se* $f = 0$ *quasi-ovunque.*

3. *è ben definito lo spazio normato* $L'(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)/ker\|\cdot\|_1$*.*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Definizione 7.4.8 - Spazi $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$**
Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Per $p \in [1, +\infty[$ si definisce la seminorma:

$$\|f\|_{p,X} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

sullo spazio di funzioni:

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{p,X} < +\infty\}$$

**Proposizione 7.4.7 - Continuità degli Operatori di Composizione**
*Sia* $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che:*

- $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua per ogni* $x \in X$
- $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{R}$ *misurabile per ogni* $t \in \mathbb{R}$
- $|f(x, t)| \leq h(x) + c|t|^{\frac{p}{r}}$

*Allora la mappa* $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p(X, \mu) & \longrightarrow & \mathcal{L}^r(X, \mu) \\ u & \mapsto & f(x, u(x)) \end{array}$ *è ben definita e continua.*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Corollario 7.4.0.1 - Omeomorfismo tra $\mathcal{L}^p$**
*Per* $1 \leq p < +\infty$ *gli spazi* $\mathcal{L}^p$ *sono topologicamente omeomorfi tra loro.*

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Corollario 7.4.0.2 - Completezza $\mathcal{L}^p$**
*Per* $1 \leq p < +\infty$ *lo spazio* $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ *è completo.*

*Dimostrazione.* ———————— ■

### 7.4.1 Teoremi di Integrazione

**Teorema 7.4.1 - Teorema di Beppo Levi**
*Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative, dove $f_k : X \to [0, +\infty]$.*
*Chiamiamo $f$ il limite puntuale: $f = \lim_{k\to+\infty} f_k$. Allora per $k \to +\infty$:*

$$\int_X f_k d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$$

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

*Osservazione 7.4.3 - Beppo Levi "decrescente"*
Il Teorema di Beppo Levi continua a valere per successioni di funzioni decrescenti $f_k \geq f_{k+1} \geq 0$ purché $\int_X f_1 d\mu < +\infty$.
Infatti basta considerare la successione di funzioni $g_k = f_1 - f_k$.

**Lemma 7.4.1 - Lemma di Fatou**
*Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura. Considero $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili non negative. Allora:*

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu \geq \int_X \liminf_{k\to\infty} f_k d\mu$$

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

*Esempio 7.4.1*
Si osserva che per la successione $f_k = \chi_{[k,k+1]}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ottiene la disuguaglianza stretta:

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu = 1$$

ma

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k d\mu = 0$$

**Teorema 7.4.2 - Teorema di Lebesgue (Convergenza Dominata)**
*Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia data una successione di funzioni integrabili $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ che converge puntualmente ad una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e che viene dominata da una funzione integrabile non negativa $g$ (cioè tale che valga per ogni $k \in \mathbb{N}$: $f_k \leq g$). Allora per $k \to +\infty$:*

$$\int_X f_k d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$$

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

**Teorema 7.4.3 - Teorema di Integrazione per Serie**
*Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Data una successione di funzioni integrabili $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_1 < +\infty$, la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ converge $\mu$-quasi-ovunque ed in seminorma $\|\cdot\|_1$ ad una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ integrabile tale che:*

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X f_k d\mu$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Corollario 7.4.3.1 - $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo**
*$L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Banach: dalla Proposizione 1.2.5 segue che lo spazio è completo.*

**Teorema 7.4.4 - Teorema Inverso della Convergenza Dominata**
*Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili convergente in norma $\|\cdot\|_1$ ad $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.*
*Allora vi è una sottosuccessione dominata in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e convergente ad $f$ $\mu$-quasi-ovunque.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Corollario 7.4.4.1**
*Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:*

1. *$f(\cdot, t) : X \to \mathbb{R}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$.*
2. *$f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua quasi-ovunque su $X$.*
3. *$|f(x, t)| \leq h(x) + c \cdot |t|$ dove $c \in \mathbb{R}$ ed $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

*Allora la seguente mappa è ben definita e continua:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \\ u(x) & \mapsto & f(x, u(x)) \end{array}$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Proposizione 7.4.8 - Assoluta continuità dell'Integrale di Lebesgue**
*Sia $f \in L^1(X)$ con $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:*

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

*per ogni $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) < \delta$.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Teorema 7.4.5 - Teorema di Riesz-Markov-Kakutani**
*Sia $X$ uno spazio metrico compatto e sia $\phi$ un funzionale lineare positivo su $C(X)$.*
*Allora esiste un'unica misura finita $\mu$ sui boreliani di $X$ tale che per ogni $f \in C(X)$ valga:*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_X f(x) d\mu(x)$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

### 7.4.2 Teoremi di Calcolo

**Teorema 7.4.6 - Teorema di Tonelli**
*Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura $\sigma$-finiti[6] e sia $f : X \times Y \to [0, +\infty]$. Sia $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ misurabile e non negativa rispetto ad $f$. Allora:*

1. *la seguente funzione è $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa:*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \mapsto & \int_Y f(x, y) d\nu(y) \end{array}$$

2. *vale l'identità:*

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y)$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

Definiamo per il prossimo Corollario la funzione "sezione". Dato lo spazio di misura prodotto $X \times Y$, per ogni $x \in X$:

$$\begin{array}{cccc} j_x : & Y & \longrightarrow & X \times Y \\ & y & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

**Corollario 7.4.6.1 - Principio di Cavalieri**
*Siano $X, Y$ spazi di misura $\sigma$-finiti. Consideriamo un elemento della $\sigma$-algebra prodotto $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Allora:*

$$\mu \otimes \nu(S) = \int_{X \times Y} \chi_S(x, y) d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y \chi_S(x, y) d\nu d\mu$$

[6] Uno spazio di misura è $\sigma$-finito se è unione numerabile di insiemi misurabili con misura finita.

*inoltre, possiamo scrivere* $\chi_S(x,y) = \chi_{S_x}(y)$ *dove* $S_x = j_x^{-1}(S)$. *Dunque si ottiene:*

$$\mu \otimes \nu(S) = \int_X \nu(S_x) d\mu$$

**Teorema 7.4.7 - Teorema di Fubini**
*Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *spazi di misura. Sia* $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$. *Allora:*

1. *per quasi-ogni* $x \in X$ *è ben definita e misurabile su* $(X, \mathcal{A})$ *la funzione:*

$$x \longmapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$$

2. *vale la seguente identità:*

$$\int_X \int_Y f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

*Esempio 7.4.2 - Tonelli non applicabile*
Siano $X = Y = [0,1]$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B} =$ "boreliani di $[0,1]$". Consideriamo le misure rispettivamente su $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$: $\mu$ misura di Lebesgue e $\nu$ cardinalità. Prendiamo $\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$. Allora si osserva che:

$$\int_X \int_Y \chi_\Delta(x,y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_X 1 d\mu(x) = 1$$

mentre cambiando l'ordine di integrazione:

$$\int_Y \int_X \chi_\Delta(x,y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_Y 0 d\nu(y) = 0$$

**Teorema 7.4.8 - Cambio di Variabile**
*Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto, sia* $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *iniettiva e* $C^1$. *Allora:*

1. *per ogni* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *misurabile positiva e per ogni* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *integrabile vale che;*

$$\int_{g(\Omega)} u(y) dy = \int_\Omega u(g(x)) |det Dg(x)| dx$$

2. *per ogni insieme* $E \subseteq \Omega$ *misurabile vale che*

$$|g(E)| = \int_E |det Dg(x)| dx$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Corollario 7.4.8.1**
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ed $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile positiva o integrale. Allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \#(g^{-1}(y))u(y)dy = \int_{\Omega} u(g(x))|detDg(x)|dx$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

*Osservazione 7.4.4*
Analogamente alla formula di cambio variabile in una dimensione, possiamo scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d(y, \Omega, g)u(y)dy = \int_{\Omega} u(g(x))detDg(x)dx$$

dove $d(y, \Omega, g)$ è il grado topologico della terna $(y, \Omega, g)$.

**Teorema 7.4.9 - Continuità della Funzione Integrale**
*Siano $I$ spazio metrico, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura. Sia $f : I \times X \to \mathbb{R}$ tale che:*

1. *$f(t, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ è misurabile per ogni $t \in I$*
2. *$f(\cdot, x) : I \to \mathbb{R}$ continua per ogni $x \in X$ (o quasi-ogni secondo la misura $\mu$)*
3. *$|f(t, x)| \leq h(x)$ per $h \in L^1(X)$ e per ogni $t, x \in I \times X$*

*Allora è ben definita e continua l'applicazione:*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \int_X f(t, x)d\mu(x) \end{array}$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Teorema 7.4.10 - Disuguaglianza di Volume per Mappe $C^1$**
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una mappa $C^1$ dove $E \subseteq \Omega$ è misurabile. Allora:*

$$|g(E)| \leq \int_E |detDg(x)|\, dx$$

*Dimostrazione.* ———————————— ■

**Corollario 7.4.10.1**
*Nelle stesse ipotesi del Teorema 7.4.10 per $u : \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile non negativa vale:*

$$\int_{g(\Omega)} u(y)dy \le \int_{\Omega} u(g(x))|detDg(x)|dx$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Corollario 7.4.10.2 - Teorema di Sard facile**
*Nelle stesse ipotesi del Teorema 7.4.10 l'insieme dei punti singolari di $g$:*

$$Z = \{x \in \Omega \mid detDg(x) = 0\}$$

*ha l'immagine $g(Z)$ di misura nulla.*

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Teorema 7.4.11 - Derivazione sotto Segno di Integrale**
*Siano $I$ spazio metrico, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura. Sia $f : I \times X \to \mathbb{R}$ tale che:*

1. *$f(t, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ è misurabile per ogni $t \in I$*
2. *$f(\cdot, x) : I \to \mathbb{R}$ è $C^1$ per ogni $x \in X$ (o quasi-ogni secondo la misura $\mu$)*
3. *$|f(t,x)| + |\partial_t f(t,x)| \le h(x)$ per $h \in L^1(X)$ e per ogni $t, x \in I \times X$*

*Allora è ben definita e $C^1$ l'applicazione:*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \int_X f(t,x)d\mu(x) \end{array}$$

*ed in particolare:*

$$\varphi'(t) = \int_X \partial_t f(t,x)d\mu(x)$$

*Dimostrazione.* ——————————— ■

### 7.4.3 Mappe Lipschitz

**Fatterello 7.4.1 - Mappe Lipschitz e Misura**
*Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa Lipschitz (rispetto alla norma $\|x\|\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$).*
*Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura nulla, allora $f(E)$ ha misura nulla.*

*Dimostrazione.* —————————— ■

*Esempio 7.4.3 - Controesempio con $f$ continua*
Sia $g : [0,1] \to [0,1]$ la funzione di Cantor (continua su ogni intervallo aperto del complementare dell'insieme $C$ di Cantor). Sia $f(x) = x + g(x)$. In particolare $f : [0,1] \to [0,2]$ è un omeomorfismo. Però:

- $|C| = 0$
- siano $C_k$ gli insiemi "parziali" di Cantor, $[0,1] \setminus C = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}([0,1] \setminus C_k)$:

$$\begin{aligned}|f(C)| &= |f([0,1])| - |f([0,1] \setminus C)| = 2 - \left|f(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}([0,1] \setminus C_k))\right| \\ &= 2 - \left|\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}([0,1] \setminus C_k)\right| = 2 - |[0,1] \setminus C| = 1\end{aligned}$$

**Fatterello 7.4.2**
*Sia $f$ localmente Lipschitz. Allora $f$ manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, manda misurabili in misurabili.*

*Dimostrazione.* —————————— ■

### 7.4.4 Mappe Lineari

Sia $T \in GL(n, \mathbb{R})$ mappa lineare invertibile. Possiamo considerare la funzione d'insieme, dove $I = [0,1]$:

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{L}: & \{\sigma - algebra\ misurabili\ Lebesgue\} & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ & E & \mapsto & \frac{|T(E)|}{|T(I^n)|}\end{array}$$

Essa è una misura, normale sul cubo unitario ($\mathcal{L}(I^n) = 1$) ed invariante per traslazioni. Segue che è la misura di Lebesgue: per ogni $E$ misurabile secondo Lebesgue vale

$$|T(E)| = |T(I^n)| \cdot |E|$$

**Fatterello 7.4.3 - Misura di $I^n$**
*Definiamo la funzione:*

$$\begin{array}{rccc}c: & GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ & T & \mapsto & |T(I^n)|\end{array}$$

*Allora si vede che $c(T) = |detT|$.*

*Dimostrazione.* —————————— ■

## 7.5 Tecniche di Calcolo e Applicazioni

### 7.5.1 Tecniche di Calcolo (Integrali Doppi)

#### Insiemi Normali

**Definizione 7.5.1 - Insieme Normale**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Si dice normale rispetto all'asse y se esistono due funzioni $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che:

$$A = \{(x, y) \mid a < x < b \; ed \; \alpha(x) < y < \beta(x)\}$$

cioè $A$ ha come fibre degli intervalli.

*Osservazione 7.5.1*
Sia $A$ un insieme normale rispetto all'asse y. Si può usare il Teorema 7.4.7:

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

Inoltre, questi risultati continuano a valere per insiemi normali rispetto all'asse x.

#### Coordinate Polari

Sia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa o integrabile. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} u(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

Infatti basta considerare il cambio di variabile:

$$g \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho cos\theta \\ \rho sin\theta \end{pmatrix}$$

dove quindi:

$$Dg \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{bmatrix}$$

e segue subito che: $detDg \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \rho$.

### 7.5.2 Tecniche di Calcolo (Integrali Tripli)

**Integrazione per Fili**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme normale rispetto all'asse z, ossia esiste $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A \; ed \; \alpha(x, y) < z < \beta(x, y)\}$$

Allora:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{A} \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy$$

**Integrazione per Sezioni**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme normale rispetto all'asse z, ossia esistono $a < z < b$ e $\{A_z\}_{z\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tali che:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid a < z < b \; ed \; (x, y) \in A_z\}$$

Allora:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \int_{a}^{b} \left( \iint_{A_z} f(x, y, z)dxdy \right) dz$$

**Coordinate Sferiche**

Consideriamo la sfera unitaria $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e parametrizziamo i punti con due angoli $\varphi_1 \in [0, \pi]$ e $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$. Dato $P \in S^2$ definiamo:

- $\varphi_2$ l'angolo tra l'asse z e il segmento $\overline{OP}$.
- $\varphi_1$ l'angolo tra l'asse x e il segmento $\overline{OP'}$, con $P'$ proiezione di $P$ sul piano xy.

Sia la terza coordinata sferica il raggio $\rho \in [0, +\infty[$. Allora si può definire:

$$\Phi(\rho, \varphi_1, \varphi_2) = (\rho sin\varphi_2 cos\varphi_1, \; \rho sin\varphi_2 sin\varphi_1, \; \rho cos\varphi_2)$$

Calcolando il determinante del Jacobiano di $\Phi$, si ottiene che:

$$|detJ\Phi(\rho, \varphi_1, \varphi_2)| = \rho^2 sin\varphi_2$$

per cui risulta che:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)dxdydz = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(\Phi(\rho, \varphi_1, \varphi_2))\rho^2 sin\varphi_2 d\varphi_2 d\varphi_1 d\rho$$

### 7.5.3 Integrale di Eulero e Formula di Stirling

Ricordiamo la formula di Cauchy per funzioni analitiche. Sia $f$ analitica, allora:

$$\frac{f^{(n)(0)}}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

Consideriamo $f(z) = e^z$, con il cammino circolare $\gamma(t) = re^{it}$:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{re^{it}}e^{-nit}dt$$

Vogliamo allora studiare l'integrale al secondo membro. Sia $r = n$, completiamo lo sviluppo di $e^{it}$ al 2° ordine:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi n^n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{n-\frac{nt^2}{2}+n(e^{it}-1-it+\frac{t^2}{2})}dt = \frac{e^n}{2\pi n^n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{nt^2}{2}}e^{n(e^{it}-1-it+\frac{t^2}{2})}dt$$

In particolare, posso maggiorare il modulo dell'integrando:

$$\left|e^{n(e^{it}-1-it+\frac{t^2}{2})}\right| = e^{n(cost-1+\frac{t^2}{2})} \leq e^{n\frac{\pi^2t^2}{24}} \tag{7.1}$$

per ogni $|t| < \pi$, in quanto all'ultimo passaggio uso la disuguaglianza (da Lagrange): $cos(\theta) - 1 + \frac{t^2}{2} = cos(\theta)\frac{t^4}{24} \leq \frac{\pi^2}{24}t^2$.
Si esegue il cambio di variabile $s = \sqrt{n}t$:

$$\frac{1}{n!} = \frac{e^n}{2\pi n^{n+\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}e^{n(e^{i\frac{s}{\sqrt{n}}}-1-i\frac{s}{\sqrt{n}}+\frac{s^2}{n})}\chi_{[-\sqrt{n}\pi,\sqrt{n}\pi]}ds$$

Osserviamo che l'integrando converge puntualmente a $e^{-\frac{s^2}{2}}$. Infatti per ogni $s \in [-\sqrt{n}\pi, \sqrt{n}\pi]$ fissato, per $n \to +\infty$:

$$n\left[e^{i\frac{s}{\sqrt{n}}} - 1 - i\frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{s^2}{n}\right] = n\ o\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$$

Inoltre, dalla maggiorazione 7.1, l'integrando è dominato da:

$$e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{24}\right)s^2} \in L^1$$

perché $\frac{1}{2} > \frac{\pi^2}{24}$. Si conclude allora che:

$$\frac{1}{n!} = \frac{e^n}{2\pi n^{n+\frac{1}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}ds + o(1)\right) \tag{7.2}$$

Ricordiamo la formula dell'integrale di Eulero per il fattoriale, ovvero:

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$$

dove l'integrando ha massimo per $t = n$.
Riscriviamo l'integrale col cambio di variabile $t = n + \sqrt{n}s$, in questo modo:

- trasliamo la funzione integranda in modo che il massimo si trovi per $t = 0$.
- si normalizza la derivata seconda di $e^{-t}t^n$ (in modo che per $n \to +\infty$ la derivata seconda resti limitata).

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} n! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt &= \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-n-\sqrt{n}s} (n + \sqrt{n}s)^n \sqrt{n} ds \\ &= n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)_+^n e^{-\sqrt{n}s} ds \end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrando ottenuto converge puntualmente per $n \to +\infty$ ad $e^{-\frac{s^2}{2}}$. Infatti prendendo il logaritmo si ottiene:

$$\begin{aligned} log\left(\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)_+^n e^{-\sqrt{n}s}\right) &= nlog\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)_+ - \sqrt{n}s \\ &= n\left(\frac{s}{\sqrt{n}} - \frac{s^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n}s \\ &= -\frac{s^2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Gli integrandi sono crescenti su $]-\infty, 0]$ e decrescenti su $[0, +\infty[$, quindi anche gli integrali convergono per il Teorema di Beppo Levi:

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \tag{7.3}$$

Confrontando allora le stime 7.2 ed 7.3 si ottiene che:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}$$

### 7.5.4 Confronto tra Integrale di Riemann e Lebesgue

*Esempio 7.5.1*
La funzione $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ non è Riemann-integrabile ma è integrabile secondo Lebesgue.

**Proposizione 7.5.1 - Integrali di Riemann e Lebesgue**
*Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. Allora:*

$$R([a,b]) \subseteq \mathcal{L}^1([a,b])$$

*Dimostrazione.* Data la suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ che scriviamo: $P = \{x_k\}_{k=0,\dots,n}$ dove $x_k < x_{k+1}$ per ogni $k = 0, \dots, n-1$ ed $x_0 = a$, $x_n = b$. Allora la somma inferiore si può scrivere:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k) = \int_{[a,b]} f_P dx$$

definendo $f_P(x) = \sum_{k=1}^{n} \left( \inf_{y\in[x_k,x_{k+1}]} f(y) \right) \chi_{[x_k,x_{k+1}]}(x)$. Osserviamo che $f_P$ sono funzioni semplici. Consideriamo ora una successione di suddivisioni sempre più fini $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Applicando Beppo-Levi, allora per $m \to +\infty$:

$$s(f,P_m) = \int_{[a,b]} f_{P_m} dx \longrightarrow \int_{[a,b]} f_\star dx$$

dove $f_\star = \sup_{m\in\mathbb{N}} f_{P_m}$.
Se la funzione $f$ è Riemann-integrabile, allora gli integrali coincidono. ■

## 7.6 Risultati Topologici

**Teorema 7.6.1 - Punto Fisso di Brower**
*Sia* $B = \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$*, ogni funzione continua* $f \in C^0(B, B)$ *ha almeno un punto fisso.*

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

**Teorema 7.6.2 - Non-Retrazione**
*Sia* $B = \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$*, non esiste alcuna retrazione* $r : B \to \partial B$ *continua tale che* $r\big|_{\partial B} = id\big|_{\partial B}$.

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

Dal Teorema del Punto Fisso seguono le proposizioni:

**Proposizione 7.6.1 - Perron - Frobenius**
*Sia* $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ *matrice a coefficienti non negativi.*
*Allora* $A$ *ha un autovalore non negativo, corrispondente ad un autovettore di coordinate non negative.*

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

**Proposizione 7.6.2**
*Sia* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *un compatto ed* $f : K \to \mathbb{R}^n$ *tale che* $f(x) = x$ *per ogni* $x \in \partial K$.
*Allora* $f$ *è surgettiva su* $K$*, ossia* $f(K) \supseteq K$.

*Dimostrazione.* ―――――――――――― ■

## 7.7 Problema dei Momenti

**Definizione 7.7.1 - Momento**
Sia $I \subseteq \mathbb{R}^+$. Data una misura $\mu$ sui boreliani di $I$, per $k \in \mathbb{N}$ il momento $k$-esimo di $\mu$ è:

$$m(k) = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x) \quad \in [0, +\infty]$$

### Problema dei Momenti

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Data allora una successione $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0, +\infty]$, dire se vi è una misura boreliana su $I$ per la quale $\{u(k)\}$ sono i momenti.
Si chiama problema dei momenti di Hausdorff per $I = [0, 1]$.

Con il Teorema 7.4.5 di Riesz-Markov-Kakutani sappiamo che i funzionali lineari positivi su $C^0([0, 1])$ hanno esattamente la forma:

$$\phi_\mu : f \longmapsto \int_I f(x) d\mu$$

quindi il problema si può tradurre in questo modo: data una successione $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dire se è la successione dei momenti di un funzionale lineare positivo $\phi \in C^0([0, 1])$ (cioè per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale[7] $u(k) = \langle \phi, x^k \rangle$).

**Condizioni Necessarie su $\{u(k)\}$**
Studieremo ora delle condizioni necessarie affinchè il problema abbia soluzione.
Sia $\mu$ un funzionale lineare positivo su $C^0([0, 1])$. La sua successione dei momenti sarà non negativa e decrescente, infatti per ogni $0 \leq k < h$ interi vale che:

- $x^k \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, per cui $\langle \mu, x^k \rangle \geq 0$.
- $x^k \geq x^h$ per ogni $x \in [0, 1]$, per cui $\langle \mu, x^k \rangle \geq \langle \mu, x^h \rangle$.

Più in generale, dato che $x^k(1 - x^n) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$ vale che:

$$0 \leq \langle \mu, x^k(1 - x^n) \rangle = \langle \mu, \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{j+k} \rangle = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} m_\mu(j + k)$$

dove indichiamo $m_\mu(k) = \langle \mu, x^k \rangle$. Ma allora affinchè ci sia soluzione al problema dei momenti la successione $u \in l_\infty$ dev'essere tale che:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} u(j + k) \geq 0 \tag{7.4}$$

[7] Il prodotto scalare $\langle \mu, f \rangle = \int_X f(x) d\mu(x)$.

Riscriviamo ora questa condizione con operatori su $l_\infty$. In particolare definiamo l'operatore "shift sinistro" $S$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in l_\infty$:

$$[Su](k) = u(k+1)$$

Si ottiene che per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\langle \mu, x^k \rangle = m_\mu(k) = \left[ S^k m_\mu \right](0) = \langle e_0, S^k m_\mu \rangle$$

e allora per linearità del prodotto scalare:

$$\langle \mu, x^k(1-x^n) \rangle = \left[ S^k (I - S^n) m_\mu \right](0) = \left[ (I-S)^n m_\mu \right](k)$$

Si riscrive la condizione necessaria 7.4 come:

$$(I-S)^n u = (-1)^n (S-I) u \geq 0 \tag{7.5}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

**Definizione 7.7.2 - Successione Completamente Monotona**
Una successione $u \in l_\infty$ che verifica l'equazione 7.5 viene chiamata completamente monotona.

D'ora in poi indicheremo con $C^0([0,1])^*$ come il duale di $C^0([0,1])$ (ovvero lo spazio di Banach dei funzionali lineari continui che agiscono su $C^0([0,1])$). Consideriamo ora l'operatore lineare $B_n$ (per i polinomi di Bernstein). Possiamo definirne il duale:

$$\begin{array}{rccc} B_n^*: & C^0([0,1])^* & \longrightarrow & C^0([0,1])^* \\ & \phi & \mapsto & \phi \circ B_n \end{array}$$

in modo tale che valga la proprietà sul prodotto scalare "valutazione"[8]:

$$\langle B_n^* \phi, f \rangle = \langle \phi, B_n f \rangle$$

per ogni $\phi \in C^0([0,1])^*$ e per ogni $f \in C^0([0,1])$.
Scriviamo allora esplicitamente la valutazione su $f \in C^0([0,1])$ di $B_n \mu$:

$$\begin{aligned} \langle B_n^* \mu, f \rangle = \langle \mu, B_n f \rangle &= \langle \mu, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle e_{\frac{k}{n}}, f \rangle \langle \mu, x^k(1-x^n) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \mu, x^k (1-x^n) \rangle e_{\frac{k}{n}}, f \right\rangle \end{aligned}$$

[8]Il prodotto scalare $\langle \phi, f \rangle = \phi(f)$ è la valutazione del funzionale lineare $\phi$ su $f$.

Per cui l'operatore $B_n^*\mu$ si scrive come combinazione lineare di $e_0, e_{\frac{1}{n}}, \dots, e_1$:

$$B_n^*\mu = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \mu, x^k(1-x^n)\rangle e_{\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n} c(k,n) e_{\frac{k}{n}}$$

dove i coefficienti della combinazione lineare si scrivono:

$$c(k,n) = \binom{n}{k} \langle \mu, x^k(1-x^n)\rangle = \binom{n}{k} \left[S^k(I-S)^{n-k} m_\mu\right](0)$$

L'idea alla base del seguente Teorema è, data una successione completamente monotona $u \in l_\infty$, cercare se esiste il limite di:

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} c(k,n) e_{\frac{k}{n}}$$

ad una misura $\mu$ che risolve il problema dei momenti.

**Teorema 7.7.1 - Teorema di Hausdorff**
*Sia $u \in l_\infty$ una successione completamente monotona di numeri reali tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:*

$$(I-S)^n u \geq 0$$

*Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ definiamo i coefficienti:*

$$c(k,n) = \binom{n}{k} \left[(I-S)^{n-k} u\right](0) \geq 0$$

*Sia allora per $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} c(k,n) e_{\frac{k}{n}}$$

*Allora per ogni $f \in C^0([0,1])$ si ha che:*

$$\langle \mu_n, f\rangle = \left[B_n f(S)(u)\right](0)$$

*e quindi $\langle \mu_n, f\rangle$ converge a $\mu, f$ dove $\mu$ è un funzionale lineare positivo su $C^0([0,1])$ tale che $m_\mu = u$ (ovvero $\mu_n \to \mu$ puntualmente).*

*Dimostrazione.* ———————————— ■

*Osservazione 7.7.1 - Unicità soluzione del Problema di Hausdorff*
L'unicità della soluzione segue subito dal Teorema di densità di Weierstrass: se conosco i momenti di un funzionale lineare positivo sui monomi allora per linearità li conosco sui polinomi. Per densità concludo che li conosco per ogni $f \in C^0([0,1])$.

# Capitolo 8

# Sottovarietà Differenziali di $\mathbb{R}^n$

## 8.1 Sottovarietà Differenziali: definizioni

**Definizione 8.1.1 - Sottovarietà Differenziale**
Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$.. $\Sigma$ è una sottovarietà differenziabile $k$-dimensionale se per ogni $p \in \Sigma$ esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^n$ di $p$ e un diffeomorfismo:

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$$

tale che:

$$\varphi(U \cap \Sigma) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right)$$

**Definizione 8.1.2 - Parametrizzazione Locale Regolare**
Nelle ipotesi della Definizione 8.1.1, chiamiamo $V = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right)$ e $g = \varphi^{-1}|_V$.
Allora $g$ si chiama parametrizzazione locale regolare in $p$, cioè:

$$g : V \xrightarrow{\sim} U \cap \Sigma$$

che è un omeomorfismo con differenziale iniettivo in ogni punto.

**Definizione 8.1.3 - Spazio Tangente**
Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà $k$-dimensionale di $\mathbb{R}^n$, $p \in \Sigma$. Lo spazio tangente si definisce:

$$T_p\Sigma = Dg(0)\left(\mathbb{R}^k\right)$$

dove si intende $g$ parametrizzazione locale regolare con $g(0) = p$:

$$Dg(0) : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_p\Sigma$$

*Osservazione 8.1.1*
Siano $g' : V' \xrightarrow{\sim} W \subseteq \Sigma$ un'altra parametrizzazione locale regolare:

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "g'"] & W \subseteq \Sigma \\ V \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Allora $g' = g \circ h$ con $h : V \xrightarrow{\sim} V'$ diffeomorfismo locale tra aperti di $\mathbb{R}^k$.

**Definizione 8.1.4 - Mappa Differenziabile tra Sottovarietà**
Siano $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Sigma' \subseteq (\mathbb{R}^n)'$ sottovarietà differenziabili. La funzione $f : \Sigma \to \Sigma'$ è una mappa differenziabile se e solo se per ogni $p \in \Sigma$ e per ogni parametrizzazione locale regolare $g$, la composizione[1]:

$$V \overset{g}{\hookrightarrow} \Sigma \xrightarrow{f} \Sigma' \overset{j}{\hookrightarrow} (\mathbb{R}^n)'$$

è differenziabile (dove $j : \Sigma' \to \mathbb{R}^n$ è l'immersione).
Equivalentemente, la funzione è una mappa differenziabile se per ogni $p \in \Sigma$ $f$ si estende ad un'applicazione differenziabile tra un intorno di $p$ in $\mathbb{R}^n$ ed un intorno di $f(p)$ in $(\mathbb{R}^n)'$.

**Proposizione 8.1.1**
*Siano $\Sigma, \Sigma' \subseteq$ sottovarietà differenziabili e $f : \Sigma \to \Sigma'$ mappa differenziabile. Allora il differenziale*

$$Df(p) : T_p\Sigma \longrightarrow T_{f(p)}\Sigma'$$

*si può definire in due modi (rispettivamente con le 2 definizioni di mappa differenziabile):*

1. $Df(p) = D(j \circ f \circ g)(0) = [Dg(0)]^{-1}$.

2. *estendendo $f$ ad una mappa $\tilde{f}$ differenziabile tra intorni di $\mathbb{R}^n$ ed $(\mathbb{R}^n)'$ e restringendo: $Df(p) = D\tilde{f}(p)|_{T_p\Sigma}$.*

*Dimostrazione.* Segue dalle definizioni. ■

*Osservazione 8.1.2 - Composizione*
Vale la regola di composizione. Se $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma' \xrightarrow{f'} \Sigma''$ allora:

$$D(f' \circ f)(p) = Df'(f(p)) \circ Df(p)$$

[1]Indichiamo $(\mathbb{R}^n)'$ lo spazio di arrivo per intendere lo spazio in cui si immerge $\Sigma'$, distinto da quello di $\Sigma$.

## 8.2 Misure Superficiali di Sottovarietà

### 8.2.1 Definizioni

**Definizione 8.2.1 - Determinante del Differenziale**
Siano $\Sigma, \Sigma' \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà differenziabili $k$-dimensionali. Sia $f : \Sigma \to \Sigma'$ differenziabile.
E' ben definita:

$$|detDf(p)| = \sqrt{detDf(p)^T Df(p)}$$

**Definizione 8.2.2 - Misura Superficiale su $E \subseteq \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$**
Data una parametrizzazione locale $g : V \xrightarrow{\sim} W \subseteq \Sigma$ e sia $E \subseteq W$ boreliano tale che $E = g(F)$, $F$ boreliano di $V$. Definiamo allora:

$$\sigma(E) = \int_F \sqrt{detDg(x)^T Dg(x)} dx$$

*Osservazione 8.2.1*
E' una buona definizione, in quanto $\sigma(E)$ non dipende dalla parametrizzazione $g$.

*Dimostrazione.* ——————————— ■

**Definizione 8.2.3 - Misura Superficiale su $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$**
Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ unione numerabile di aperti, $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$ tali che:

$$g_i : V_i \xrightarrow{\sim} W_i$$

parametrizzazioni locali.
Consideriamo $X_j = W_j \subseteq \bigcup_{i<j} W_i$, per cui $\Sigma = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$, per poter definire per ogni $E \subseteq \Sigma$ boreliano:

$$\sigma(E) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma(X_i \cap E)$$

In particolare, $\sigma(E)$ è indipendentente dalla partizione $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ per $\Sigma$.

### 8.2.2 Teoremi su Misure Superficiali

**Proposizione 8.2.1 - Cambio di Variabile tra Varietà**
*Sia $f : \Sigma \to \Sigma'$ mappa differenziabile tra sottovarietà $k$-dimensionali e sia $E \subseteq \Sigma$ boreliano. Sappiamo che:*

$$\sigma(f(E)) \leq \int_E |detDf(x)| dx$$

*dove l'uguaglianza vale per $f$ iniettiva.*
*Allora per ogni $u : \Sigma' \to \mathbb{R}$ misurabile non negativa vale che:*

$$\int_{\Sigma'} u(y)d\sigma(y) \leq \int_{\Sigma} u\left(f(x)\right)|detDf(x)|dx$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue dalla Formula 7.4.8 che vale per $f : V \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. ■

**Teorema 8.2.1 - Teorema di Sard**
*Sia $f : \Sigma \to \Sigma'$ mappa differenziabile tra sottovarietà $k$-dimensionali. Allora:*

$$\sigma\left(Sing(f)\right) = \sigma\left(f\left(\{x \in \Sigma \mid Df(x) \text{ non invertibile}\}\right)\right) = 0$$

*Cioè l'insieme dei punti in cui il differenziale non è invertibile ha misura di Lebesgue nulla.*

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Definizione 8.2.4 - Bordo $C^1$**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. $\Omega$ è un aperto con bordo $C^1$ se per ogni $p \in \partial\Omega$ esistono un intorno aperto $U$ di $p$ ed un diffeomorfismo $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \varphi(U)$ tra aperti di $\mathbb{R}^n$ tali che:

$$\begin{cases} \varphi\left(U \cap \partial\Omega\right) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right) \\ \varphi\left(U \cap \bar{\Omega}\right) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0]\right) \end{cases}$$

**Definizione 8.2.5 - Normale Esterna**
La normale esterna in $p$ è, indicando con $e_n$ l'$n$-esima coordinata di $\mathbb{R}^n$:

$$\nu_{ext}(p) = \left(D\varphi(p)\right)^T [e_n]$$

che è ortogonale all'iperpiano $T_p(\partial\Omega) = \left(D\varphi(p)\right)^{-1}\left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right)$.

*Dimostrazione.* Infatti:

$$\begin{aligned} < \nu(p), T_p(\partial\Omega) > &= < \left(D\varphi(p)\right)^T [e_n], \left(D\varphi(p)\right)^{-1}\left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right) > \\ &= < e_n, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} > = 0 \end{aligned}$$

■

**Definizione 8.2.6 - Divergenza**
Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenziabile, si definisce la divergenza di $F$ in $x \in \Omega$ come:

$$divF(x) = trDF(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i$$

se indichiamo $F = (f_1, \ldots, f_n)$.

Per la dimostrazione del Teorema 8.2.2 è necessario fare delle considerazioni su sottovarietà che sono grafici di funzioni.
Sia $\varphi : U \to \mathbb{R}$ una funzione $C^1$, dove $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ è aperto. Allora $\Sigma = graph(\varphi)$ è una sottovarietà $n-1$-dimensionale di $\mathbb{R}^n$ con parametrizzazione:

$$g = id_{\mathbb{R}^{n-1}} \times \varphi : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x, \varphi(x)) \end{array}$$

Calcolo il differenziale:

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \partial_1\varphi & \partial_2\varphi & \cdots & \partial_{n-1}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \nabla\varphi \end{bmatrix}$$

Allora osserviamo che lo spazio tangente si scrive:

$$T_{(x,\varphi(x))}\Sigma = graphD\varphi(x) = \left\{(v, \nabla\varphi(x) \cdot v) \mid v \in \mathbb{R}^{n-1}\right\}$$

e che la normale esterna è:

$$\nu_{ext}(x, \varphi(x)) = \frac{(-\nabla\varphi(x), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x)\|^2}}$$

Dato $E \subseteq U$ boreliano, la misura dell'insieme $g(U) \subseteq \Sigma$ è:

$$\sigma(g(E)) = \int_E \sqrt{detDg(x)^T Dg(x)}dx$$

Calcoliamo il determinante. Sappiamo che[2]:

$$Dg(x)^T Dg(x) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \nabla\varphi(x)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \nabla\varphi(x) \end{bmatrix} = I_n + \nabla\varphi(x) \otimes \nabla\varphi(x)$$

Ora, dati $a, b \in \mathbb{R}^n$, cerchiamo gli autovalori di $a \otimes b$: saranno 0 con molteplicità $n-1$ (in quanto le colonne sono multipli tra loro) e $a \cdot b$ con molteplicità 1. Segue che gli autovalori di $I_n + a \otimes b$ saranno 1 con molteplicità $n-1$ e $1 + a \cdot b$ con molteplicità 1. Quindi:

$$det(I_n + a \otimes b) = 1 + a \cdot b$$

Nel nostro caso particolare:

$$\sigma(g(E)) = \int_E \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x)\|^2}dx$$

[2] L'operazione $\otimes : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ è definita componente per componente come: $(a \otimes b)_{i,j} = a_i b_j$.

**Proposizione 8.2.2 - Bordo come unione di aperti normali**
*Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ *aperto limitato con bordo* $C^1$. *Consideriamo la proiezione:*

$$\begin{array}{cccc} P: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{array}$$

*Allora valgono i seguenti risultati:*

1. $K = P\left(\{x \in \partial\Omega \mid \langle e_n, \nu_{ext}(x)\rangle = 0\}\right) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *ha misura nulla.*
2. $\Omega \setminus K \times \mathbb{R}$ *è unione di aperti normali*[3] *con proiezioni sulle componenti connesse di* $P(\Omega) \subseteq K$

*Dimostrazione.* ———————— ■

**Teorema 8.2.2 - Formula della Divergenza**
*Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto limitato con bordo* $C^1$. *Sia* $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. *Allora:*

$$\int_{\Omega} divF(x)dx = \int_{\partial\Omega} < F(y), \nu_{ext}(y) > d\sigma(y)$$

*Dimostrazione.* ———————— ■

[3] Un aperto normale è un aperto dove per ogni suo punto esiste la normale esterna.

# Capitolo 9

# Amenità

## Piccola nota degli autori

Questo capitolo viene creato in modo da raccogliere vari fatterelli interessanti/amenità che non sono stati visti in classe ma sono utilizzati dal prof Pietro Majer nelle stravaganti soluzioni a compiti passati.
Sia chiaro, non è detto che ne troverete mai utilità ma... vostra nonna non direbbe la stessa cosa riguardo al vostro percorso di studi?

**Fatterello 9.0.1 - Compito Luglio 2020 - Esercizio 3**
*Per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ vale l'identità:*

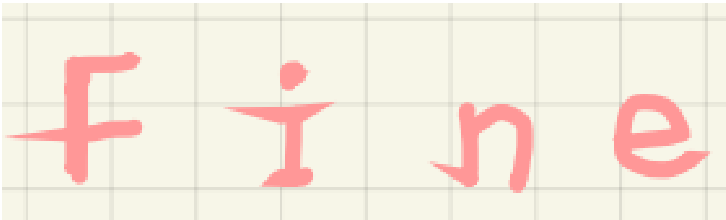
$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\left(\{|f| \geq t\}\right) dt$$

**Fatterello 9.0.2 - Compito Settembre 2020 - Esercizio 1**
*Consideriamo il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

*dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e periodica. Allora la soluzione è:*

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) sin(t - \tau) d\tau$$


Fine

# Indice analitico