# Teorema di Zaslavski

Questo seminario si concentrerà sulla dimostrazione del Teorema di Zaslavski: dalla primo incontro ci è stato presentato un problema a cui rispondere: come contare le regioni / bounded dell'arrangiamento?
Una prima risposta viene data dal seguente:

▸ **Teorema Zaslavski:**

Sia $\mathcal{A}$ un arrangiamento in $\mathbb{R}^n$ e $\chi_{\mathcal{A}}$ il suo polinomio caratteristico.
Allora:
$$\begin{cases} r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) & (a) \\ b(\mathcal{A}) = (-1)^{rk(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1) & (b) \end{cases}.$$

• **DIM 1**

Sia $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ una tripla, ovvero dato $H_0 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{H_0}$ e $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$.

(a) Ricordiamo la relazione ricorsiva sulle regioni:
$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$$
e dal Lemma di Deletion-Restriction:
$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$
Siccome $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ arrangiamenti di $\mathbb{R}^n$ mentre $\mathcal{A}''$ di $H_0 \simeq \mathbb{R}^{n-1}$:
$$r(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) \quad \text{rispettano la stessa ricorsione}$$
e nei casi base:
$$\chi_{\emptyset}(t) = t^n \implies (-1)^n \chi_{\emptyset}(-1) = 1 = r(\emptyset) \qquad \checkmark$$

(b) Poniamo $d(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$.

Come prima, per $\mathcal{A} = \emptyset$ si vede subito che $d(\mathcal{A}) = \overset{\text{(relat. bound)}}{\underset{\|}{1}} = b(\mathcal{A})$.

Vediamo che $d, b$ soddisfano la stessa ricorsione:

$$b(\mathcal{A}) = \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}'') & rk(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}') \\ 0 & rk(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}') + 1 \end{cases}$$

Ci sono allora 2 casi:

- $\underline{rk(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}') = rk(\mathcal{A}'') + 1}$: allora segue subito che
$$d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}') + d(\mathcal{A}''),$$ come $b(\mathcal{A})$.
- $\underline{rk(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}') + 1}$: vediamo che c'è un isomorfismo di posets:
$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}') &\xrightarrow{\sim} L(\mathcal{A}'') \\ R &\longmapsto R \cap H_0 \end{aligned}$$
dove va controllato che $R \cap H_0 \neq \emptyset \ \forall R$. ← $\circledast$ I

  Allora $\chi_{\mathcal{A}'} = \chi_{\mathcal{A}''}$ e questo conclude. $\blacksquare$

- DIM 2

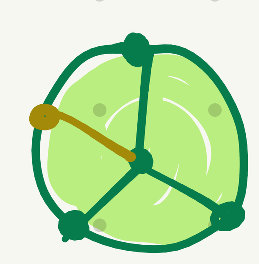
Introduciamo la CARATTERISTICA di EULERO $\Psi(\Delta)$ per $\Delta$ topologico.
Supponiamo di aver decomposto(*) $\Delta$ in celle, $f_i$ $i$-celle per ogni dimensione $i$. Allora:

$$\Psi(\Delta) := f_0 - f_1 + f_2 - \dots$$

non dipende dalla decomposizione in celle scelta.

(*) Vedremo nel nostro caso non ci sono problemi!

ESEMPIO Disco



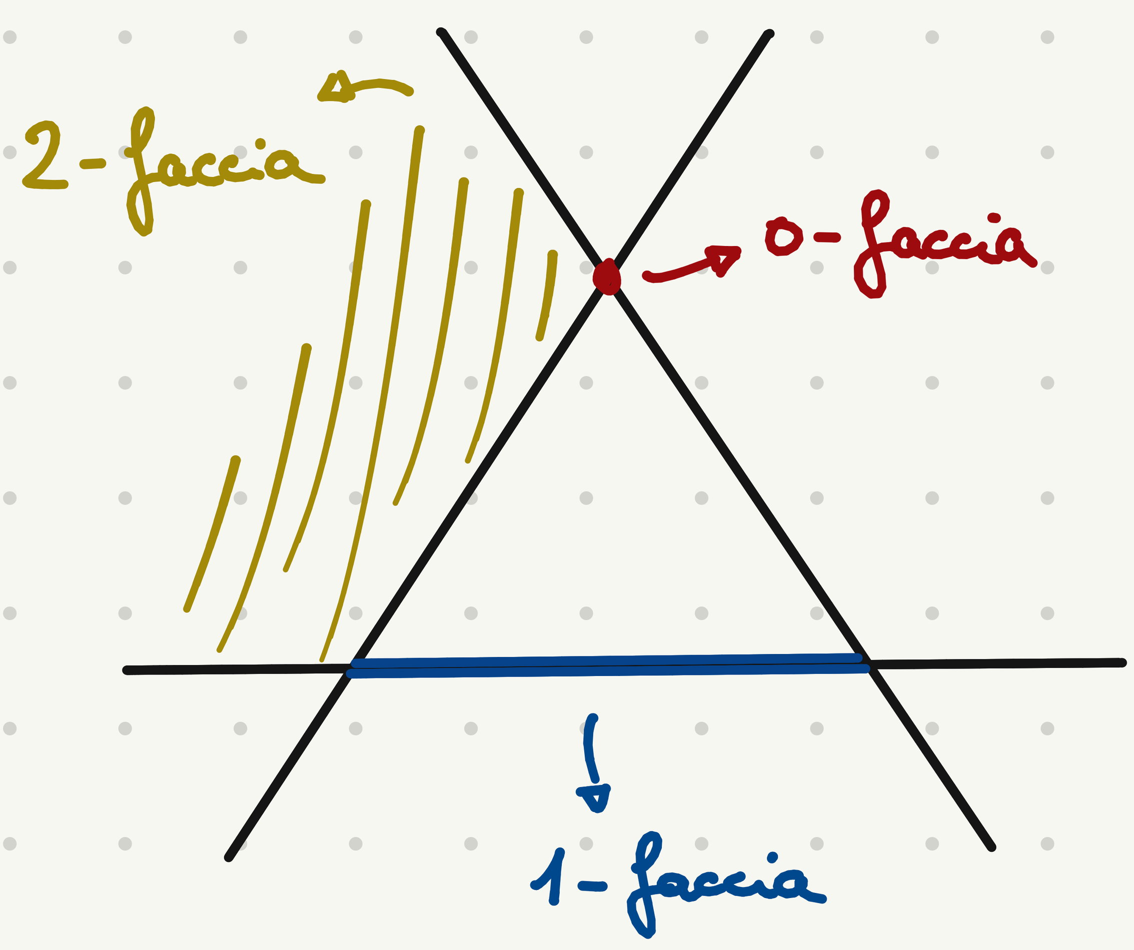
▸ DEF. Faccia di $\mathcal{A}$ arrangiamento

Sia $\mathcal{A}$ arrangiamento di iperpiani. Una FACCIA di $\mathcal{A}$ è:

$$\emptyset \neq F = \overline{R} \cap x \quad \text{per } x \in L(\mathcal{A}) \text{ ed } R \in R(\mathcal{A}).$$

Denotiamo $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ insieme delle facce e $\dim F := \dim(\mathrm{aff}(F))$.
Inoltre sia $\mathrm{relint}(F) := \mathring{F}$ in $\mathrm{aff}(F)$.

- ESEMPIO




Contiamo allora:

$$f_0 = 3 \qquad f_1 = 9 \qquad f_2 = 7$$

per cui si ottiene

$$\Psi(\mathbb{R}^2) = 3 - 9 + 7 = 1.$$

In generale $\Psi(\mathbb{R}^n) = (-1)^n$.

Osserviamo due cose:

1) vale che $\mathbb{R}^n = \coprod_{F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})} \operatorname{relint}(F)$

2) per ogni $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ esiste un unico $x \in L(\mathcal{A})$ tale che $F$ sia una regione di $x$.

Si ottiene che:
$$f_k(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ \dim(y) = k}} r(\mathcal{A}^y)$$

da cui troviamo la relazione:
$$(-1)^n = \Psi(\mathbb{R}^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k = \sum_{y \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim y} r(\mathcal{A}^y)$$

che più in generale si può riscrivere:
$$(-1)^{\dim(x)} = \Psi(x) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ y \geq x}} (-1)^{\dim y} r(\mathcal{A}^y)$$

e usiamo inversione di Möbius $f(x) = \sum_{y \geq x} g(y) \Rightarrow g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x,y) f(y)$

per ottenere che:
$$(-1)^{\dim x} r(\mathcal{A}^x) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ y \geq x}} (-1)^{\dim y} \mu(x,y)$$

e per $x = \mathbb{R}^n$:
$$(-1)^n r(\mathcal{A}) = \sum_{y \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim y} \mu(y) = \chi_{\mathcal{A}}(-1).$$

Questo conclude ⓐ.

Per il risultato ⓑ l'argomentazione è simile, lavorando con $\Gamma = \operatorname{supp}(\mathcal{F}_b(\mathcal{A}))$ invece di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo senza perdita di generalità che $\mathcal{A}$ essenziale, siccome: $b(\mathcal{A}) = b(\operatorname{ess}(\mathcal{A}))$ e

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^{\dim(\mathcal{A}) - \dim(\operatorname{ess}\mathcal{A})}\, \chi_{\operatorname{ess}(\mathcal{A})}(t).$$

Si dimostra che $\Psi(\Gamma) = 1$. $\leftarrow \circledast$ II

Allora come sopra, le facce bounded sono una decomposizione di $\Gamma$:

$$1 = \Psi(\Gamma) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ \dim y = k}} (-1)^k b(\mathcal{A}^y)$$

$$= \sum_{y \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim y}\, b(\mathcal{A}^y)$$

Dato che $\Psi(\Gamma \cap \mathcal{A}^x) = 1$, si generalizza:

$$1 = \Psi(\Gamma^x) = \sum_{\substack{y \in L(\mathcal{A}) \\ y \geq x}} (-1)^{\dim y} \cdot b(\mathcal{A}^y)$$

Möbius Inversion $\Downarrow$

$$(-1)^{\dim(x)} b(\mathcal{A}^x) = \sum_{y \geq x} (1) \cdot \mu(x, y)$$

Da cui per $x = \mathbb{R}^n$, siccome $\mathcal{A}^x$ essenziale e $\dim(x) = \operatorname{rk}(\mathcal{A}^x)$:

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\operatorname{rk}(\mathcal{A})} \sum_{y \in L(\mathcal{A})} \mu(\hat{0}, y) = (-1)^{\operatorname{rk}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

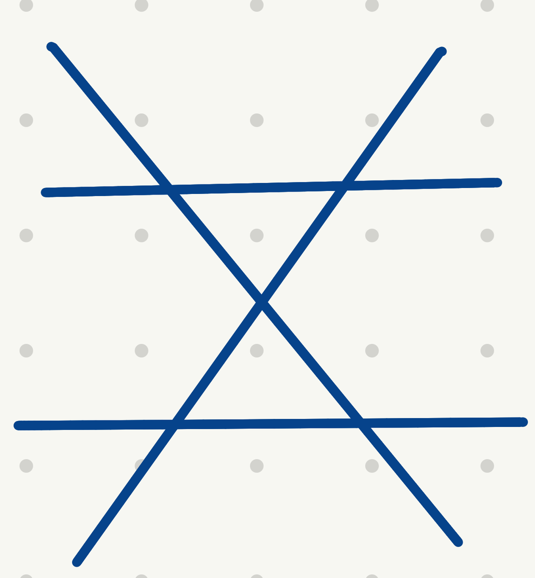
Si passa a $\operatorname{rk}(\mathcal{A})$ perchè soddisfa la relazione nel caso <u>non</u> essenziale. ■

**Corollario**

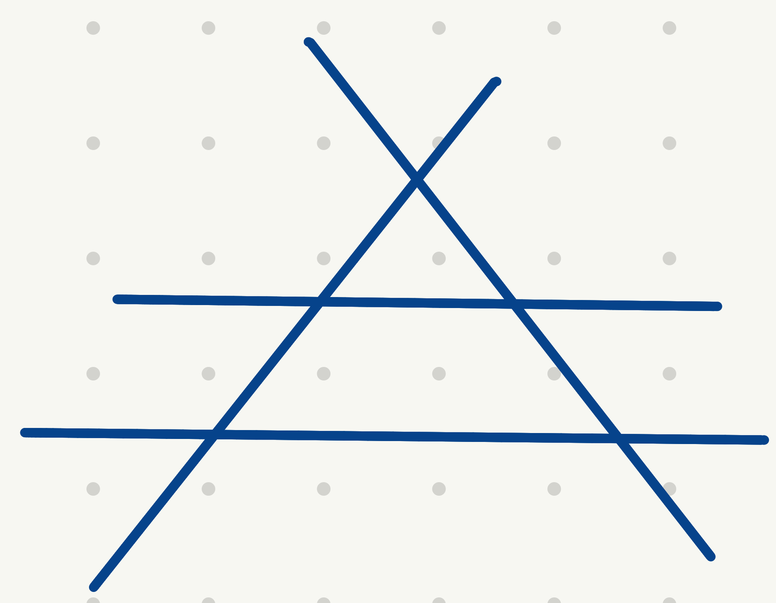
I numeri $r(\mathcal{A})$ e $b(\mathcal{A})$ dipendono soltanto da $L(\mathcal{A})$.

**ESEMPIO**

Consideriamo:



e



hanno stesso intersection poset, quindi stessi $r(\mathcal{A})$ e $b(\mathcal{A})$.

Calcoliamo $r(\mathcal{A})$ e $b(\mathcal{A})$ per alcune famiglie di arrangiamenti.

- ARRANGIAMENTO in POSIZIONE GENERALE

Un arrangiamento $\mathcal{A}$ in posizione generale in $\mathbb{R}^n$ è tale che:

$$\begin{cases} p \leq n \implies H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p} \neq \emptyset \\ p > n \implies H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p} = \emptyset \end{cases}$$

cioè non ci sono iperpiani "paralleli" o "intersezioni triple".

In questo caso $L(\mathcal{A})$ ha una forma specifica. Se $|\mathcal{A}| = m$ allora c'è una corrispondenza:

$$\mathcal{B}_m^n := \{ P \subseteq [m] \mid \# P \leq n \} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad L(\mathcal{A})$$

$$\{i_1, \dots, i_p\} \quad \longleftrightarrow \quad H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p}$$

dove $\mathcal{B}_m^n$ è l'algebra booleana troncata con inclusione "$\subseteq$".

Ricordiamo dalle puntate precedenti che $\mu(S) = (-1)^{\# S} \; \forall S \in \mathcal{B}^n$.

Quindi, siccome $[\hat{0}, x]_{\mathcal{B}_n} \cong [\hat{0}, x]_{\mathcal{B}_n^m}$ si ottiene che:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{B}_m^n}(t) = \sum_{S \in \mathcal{B}_m^n} (-1)^{\# S} t^{n - \# S}$$

$$= t^n - \binom{m}{1} t^{n-1} + \binom{m}{2} t^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{m}{n}.$$

Segue dal Thm di Zaslavski:

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{n}.$$

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{rk(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1) = (-1)^n \left[ 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^n \binom{m}{n} \right]$$

III ⊛

$$= \binom{m-1}{n}$$

$\blacksquare$

## ► ARRANGIAMENTO LINEARE

Consideriamo delle forme lineari affini: sia $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathbb{K}$ campo:

$$L_1(v) = a_1 \quad , \quad \dots , \quad L_m(v) = a_m$$

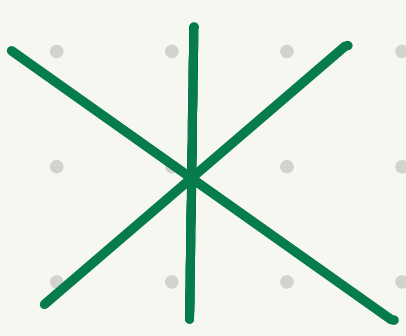
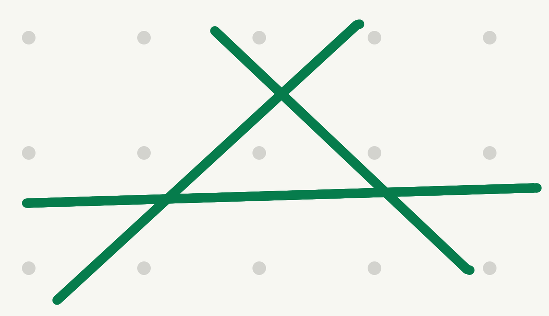
dove supponiamo che $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ siano GENERICI ovvero:

$$L_{i_1}, \dots, L_{i_p} \text{ lin. indip} \iff H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p} \neq \emptyset$$

dove $H_i = \ker(L_i(v) - a_i)$.

### ESEMPIO

Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se $L_1, \dots, L_m$ sono forme lineari razionali allora $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ indipendenti su $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $a_1, \dots, a_m$ generici.

Visivamente:  NO  SI.

Come nel precedente esempio, se $x = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}$ allora $[\hat{0}, x]_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{B}_k$. Quindi $\mu(x) = (-1)^k$. Segue che

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \#\mathcal{B}}$$

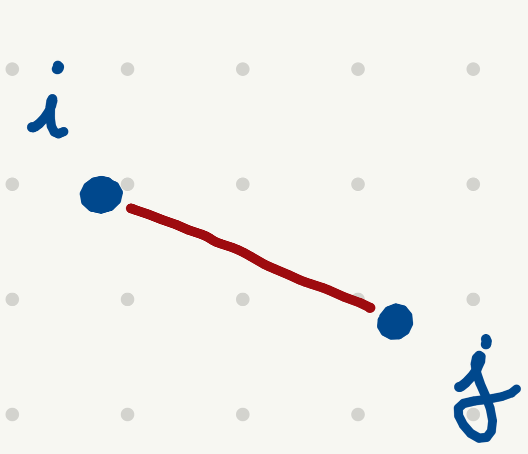
dove $\mathcal{B}$ varia tra gli insiemi indipendenti $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

## ► CASO SPECIALE: Generic Arrangement

Per $1 \leq i, j \leq n$ consideriamo le forme lineari $x_i - x_j = a_{ij}$ tali che $i \neq j$ e $\{a_{ij}\}$ generici. Questo arrangiamento è il GENERIC BRAID ARRANGEMENT $\mathcal{G}_n$.

Visualizziamo

$$H_{ij} \longleftrightarrow$$




per ottenere così un grafo semplice. Gli insiemi $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}_n$ indipendenti sono esattamente gli alberi.

⊛ I $\underline{rk(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}') + 1}$ : dimostriamo che

$$L(\mathcal{A}') \cong L(\mathcal{A}'')$$
$$R \longmapsto R \cap H_0$$

Siccome $L(\mathcal{A})$ reticolo, gli elementi massimali hanno tutti grado massimo, diciamo $d$. Siccome tolto $H_0$ il rango si abbassa, ogni elem massimale si scrive come $H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_d}$ e $H_0$ è sempre tra questi iperpiani. $(*)$

Siano $R, S \in L(\mathcal{A}')$, $R \neq S$ :

- $\underline{\text{se } R \subsetneq S \text{ o } S \subsetneq R}$ : allora per dimensione anche con $\cap H_0$ vale.
- $\underline{\text{altrimenti}}$ : $R = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p}$ e $S = H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_q}$, esiste $H_j$ t.c. lin indip da $H_{i_1}, \dots, H_{i_p}$ $\Rightarrow$ se $R \cap H_0 = S \cap H_0$ allora $H_j \subseteq R \cap H_0$ $R \cap H_0 \overset{\text{x dim}}{=} R \cap H_j$ $\Rightarrow$ non vale $(*)$

Questo dimostra l'iniettività. La surgettività segue subito dal fatto che dato $x \in L(\mathcal{A}'')$ allora $x = H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_d$ per cui con $R = H_1 \cap \dots \cap H_d$ concludo.

⊛ III $$(-1)^n \underbrace{\left[ 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^n \binom{m}{n} \right]}_{} \overset{?}{=} \binom{m-1}{n}$$

Usiamo il fatto che $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$ : la somma segnata diventa telescopica. OK!

⊛ II Vedere che $\Psi(\Gamma) = 1$, dove $\Gamma = \operatorname{supp}(\mathcal{F}_b(\mathcal{A}))$.

Sappiamo che

$$(-1)^n = \Psi(\mathbb{R}^n) = \sum_{R \in \mathcal{F}(\mathcal{A})} \operatorname{dimaff}(R) = \sum_{R \in \mathcal{F}_b(\mathcal{A})} \dim(R) + \sum_{R \in \mathcal{F}_u(\mathcal{A})} \dim(R)$$
$$= \Psi(\Gamma) + \sum_{R \in \mathcal{F}_u(\mathcal{A})} \operatorname{dimaff}(R)$$

Supponiamo $\mathcal{A}$ essenziale. Allora $\forall\, R \in \mathcal{F}_n(\mathcal{A})$, $\mathrm{lin}(R) = \{0\}$ perchè altrimenti $\mathcal{A}$ non sarebbe essenziale: tutti gli iperpiani di $\mathcal{A}$ sarebbero "paralleli" a $\mathrm{lin}(R)$.

Siccome $R \in \mathcal{F}_n(\mathcal{A})$, $R$ è un cono poliedrale (in particolare convesso). Dato che $\mathcal{A}$ è finito, $\Gamma$ limitato.

Segue che esiste $r > 0$ tale che $\Gamma \subseteq B(0,r)$ e $B(0,r)$ interseca tutti gli iperpiani di $\mathcal{A}$.

Consideriamo allora $rS^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Intersecando $rS^{n-1}$ con $\mathcal{F}_n(\mathcal{A})$ si trova una corrispondenza 1:1 tra

$$\mathcal{F}_n(\mathcal{A}) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{divisione } rS^{n-1} \text{ in celle}\}$$

$$R \longleftrightarrow rS^{n-1} \cap R$$

nella quale ogni faccia ha dimensione $\mathrm{dimaff}(R) - 1$.

Allora:

$$\sum_{R \in \mathcal{F}_n(\mathcal{A})} (-1)^{\mathrm{dimaff}(R)} = - \sum_{F = rS^{n-1} \cap R} (-1)^{\mathrm{dimaff}(F)} = -\Psi(rS^{n-1}) = -\Psi(S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Segue che

$$\Psi(\Gamma) = (-1)^n + \Psi(S^{n-1}) = 1 \quad \text{come volevamo.} \quad \blacksquare$$

Idea: