INSIEMI

• INSIEME

- Def: e' una "collezione di oggetti" che hanno proprietà di appartenenza. (Formalmente il concetto e' l'insieme, non l'oggetto)
- Notazione: $x \in Y$ "x appartiene a Y"
- CONCETTI correlati:
  - → $X = Y \iff$ X ha gli stessi elementi di Y [COINCIDONO]
  - → $X \subseteq Y \iff \forall x \in X,\ x \in Y$ [CONTENUTO]

• INSIEME VUOTO $\emptyset$

- Def: esiste l'insieme che non ha elementi:

$$\exists!\, X : \forall y,\ y \notin X \quad \text{dove } X = \emptyset$$

• COPPIA

- NON ORDINATA: dati x, y esiste l'insieme $\{x, y\}$
- ORDINATA: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$

• OPERAZIONI con INSIEMI

> **UNIONE**

Def. dati due insiemi X e Y esiste un insieme "unione"

$$X \cup Y = \{t : t \in X \vee t \in Y\}$$

> **UNIONE di insieme di insiemi**

Def. dato un insieme X di insiemi T allora:

$$\bigcup X = \{t : \exists T \in X : t \in T\}$$

> **INTERSEZIONE**

Def. dati due insiemi X e Y, la loro intersezione e':

$$X \cap Y = \{t : t \in X \wedge t \in Y\}$$

> **INTERSEZIONE di insieme di insiemi**

Def. $\bigcap X = \{t : \forall T \in X,\ t \in T\}$

> INSIEME POTENZA

- Def. Dato un insieme X, l'insieme potenza $P(X)$ e' tale che:

$$Y \in P(X) \iff Y \subseteq X$$

> DIFFERENZA

- Def. Dati due insiemi X e Y esiste l'operazione differenza:

$$X \setminus Y := \{t \in X : t \notin Y\}$$

- Nel caso particolare $Y \subseteq X$ ed X e' chiaro nel contesto allora si puo' usare la notazione Y^c ovvero "complementare di Y"

> PRODOTTO CARTESIANO

- Def. dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano $A \times B$ e' l'insieme delle coppie ordinati di elementi di A e B:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

- RELAZIONE

  - Def. dati due insiemi X e Y una relazione e' un insieme:

$$R \subseteq X \times Y$$

tale che $x \in X$ e' in relazione con $y \in Y \iff (x,y) \in R$.

  - Notazione : $x \sim_R y \iff x R y \iff (x,y) \in R$
  - INVERSA : dato R allora:

$$R^{-1} \subseteq Y \times X := \{(y,x) : y \in Y, x \in X, (x,y) \in R\}$$

  - COMPOSIZIONE : date R ed S relazioni:

$$R \subseteq X \times Y \quad , \quad S \subseteq Y \times Z$$

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y : (x,y) \in R \land (y,z) \in S\}$$

- PARTIZIONE

  - Def. dato un insieme X, una partizione e' $\pi \in P(X)$ tale che:
    - $\forall A \in \pi$, $A \neq \emptyset$
    - $\forall A, B \in \pi$, $A \neq B$, $A \cap B = \emptyset$
    - $\bigcup_{A \in \pi} A = X$

- **Relazione di Equivalenza**
  - Def. una relazione $R \subseteq X \times X$ e' di equivalenza se:
    - $\forall x \in X$, $(x,x) \in R$ — RIFLESSIVA
    - $\forall (x,y) \in R$, $(y,x) \in R$ — SIMMETRICA
    - $\forall (x,y),(y,z) \in R$, $(x,z) \in R$ — TRANSITIVA

- **Relazione d'Ordine**
  - Parziale

    Sia X un insieme. Una relazione $R \subseteq X \times X$ e' d'ordine parziale se:
    - $R \cap R^{-1} = \Delta_X$ e' ANTISIMMETRICA
    - R e' TRANSITIVA
    - R e' RIFLESSIVA
  - Totale

    Sia R una relazione d'ordine parziale. E' TOTALE se anche:

    $\forall x,y \in X$ vale $(x,y) \dot{\vee} (y,x) \in R$

    cioe' $R \cup R^{-1} = X \times X$

- **Catena**

  Sia X un insieme con un ordine parziale, $A \subseteq X$. A e' catena se $\forall x,y \in A$ distinti: $x \leq y \vee y \leq x$

- **Cocatena**

  Sia X un insieme con ordine parziale. $B \subseteq X$ e' cocatena se:

  $\forall x,y \in B$ distinti, x e y non ordinabili

- **Altezza** $h(X)$ e **Larghezza** $w(X)$

  $h(x) = \max\{|A| \text{ con } A \subseteq X \text{ catena}\}$

  $w(x) = \max\{|B| \text{ con } B \subseteq X \text{ cocatena}\}$

FUNZIONI

- **FUNZIONE**

  - Def. una relazione $G \subseteq X \times Y$ e' FUNZIONALE o GRAFICO se:
  $$\forall x \in X \quad \exists! \, y \in Y : (x,y) \in G$$
  - Def. diciamo che G definisce una FUNZIONE f:
  $$f: X \to Y \quad \wedge \quad \forall x \in X, \, y = f(x) \in Y : (x,y) \in G$$
  - Def. X si chiama DOMINIO
  - Def. Y si chiama CODOMINIO
  - Def: l' IMMAGINE di f e' definita:
  $$\operatorname{Im} f := \{ y \in Y : \exists x \in X, \, f(x) = y \} = f(X)$$

> PROPRIETA'

- f e' INIETTIVA $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ esiste al piu' un solo $x \in X : f(x) = y$.
- f e' SURGETTIVA $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$
- f e' BIGETTIVA $\Leftrightarrow$ f e' INIETTIVA e SURGETTIVA

  allora $g: Y \to X : g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ BEN DEFINITA

> NOTAZIONE

- INIETTIVITA' $f: X \hookrightarrow Y$
- SURGETTIVITA' $f: X \twoheadrightarrow Y$
- BIGETTIVITA' $f: X \xrightarrow{\sim} Y$

- **RESTRIZIONE**

  - Data una funzione $f: X \to Y$ e un insieme $A \subseteq X$, la funzione restrizione e' $f_{|A}: A \to Y$.

- **CONTROIMMAGINE** $(f^*(B))$

  - Data $f: X \to Y$ e $B \subseteq Y$ allora:
  $$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$$

- **IMMAGINE** $(f_*(A))$

  - Data $f: X \to Y$ e $A \subseteq X$: $f(A) = \{ y \in Y : \exists x \in A, \, f(x) = y \}$

COMPOSIZIONE

- Siano X, Y, Z insiemi e siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ allora è definita la composizione:

$$g \circ f : X \to Z \quad \text{dove}$$
$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- PROPRIETÀ
  - ASSOCIATIVA: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
  - Sia $h = g \circ f$. Allora:
    1) g, f iniettive $\Rightarrow$ h iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva
    2) g, f surgettive $\Rightarrow$ h surgettiva $\Rightarrow$ g surgettiva
    3) g, f bigettive $\Rightarrow$ h bigettiva $\Rightarrow$ f, g bigettive
  - Siano g, f funzioni tali che $g \circ f = 1_X$. Allora:
    - f è INVERSA DESTRA $\Leftrightarrow$ f INIETTIVA
    - g è INVERSA SINISTRA $\Leftrightarrow$ g SURGETTIVA *

* ASSIOMA di SCELTA: sia X insieme, $\exists A \in X : \forall B \in P(X) \; \exists! \, x \in A : x \in B$

NUMERI NATURALI

• ASSIOMI di PEANO

1) Ogni numero naturale ha un SUCCESSORE indicato x^+
2) Numeri naturali diversi hanno successori DIVERSI
3) Esiste un numero naturale "ZERO" che non e' successore
4) Definisco $A \subseteq \mathbb{N}$ un sottinsieme INDUTTIVO se:

$$\forall x \in A \quad , \quad x^+ \in A$$

Allora $\forall A$ induttivo, $0 \in A \implies A = \mathbb{N}$

• ORDINAMENTO di $\mathbb{N}$

• Gli Assiomi di Peano definiscono un ORDINAMENTO di $\mathbb{N}$:
- definisco $A(x)$ il minimo sottinsieme induttivo tale che $x \in A(x)$
- "$x \leq y$" $\iff$ "$A(x) \supseteq A(y)$" e' una REL. d'ORDINE TOTALE

• BUON ORDINAMENTO

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora A ha un minimo.

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad , \quad x^+ = \min\{y \in \mathbb{N} : y > x\}$$

$\implies$ SUCCESSORE di PEANO $\cong$ SUCCESSORE ORDINAMENTO

• PRINCIPIO di INDUZIONE

• Dagli Assiomi di Peano si può costruire un principio di induzione:
sia X un insieme, $a \in X$ e sia $f : \mathbb{N} \times X \to X$
allora $\exists!\ g : \mathbb{N} \to X$:

- $g(0) = a$
- $g(n^+) = f(n, g(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• OPERAZIONI su $\mathbb{N}$

• $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + y^+ = (x+y)^+ \end{cases}$$

- $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot y^+ = x \cdot y + x \end{cases}$$

Cardinalità di Insiemi

- **Cardinalità**
  - Def. due insiemi sono EQUIPOTENTI o hanno stessa CARDINALITÀ se $\exists f : X \xrightarrow{\sim} Y$ bigettiva tra i due insiemi.
  - Def. per INSIEMI FINITI sia $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ allora se: $\exists f : X \xrightarrow{\sim} [n]$ bigettiva, allora X ha cardinalità n.

- **Ordine Totale della Cardinalità**
  - Def. dati due insiemi X e Y allora "$|X| \leq |Y| \iff \exists f : X \hookrightarrow Y$ iniettiva"
  - Proprietà
    - riflessiva
    - antisimmetrica $\rightarrow |X| \leq |Y| \,\dot{\vee}\, |Y| \leq |X|$
    - transitiva
  - MASSIMA CARDINALITÀ non esiste

    $\exists f : X \xrightarrow{\sim} X \times X \times \dots$

    ma

    $\nexists f : X \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(X)$, f solo INIETTIVA, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$

- **Funzione Caratteristica**
  - Def: la funzione caratteristica $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ e' definita:

    $$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$ dove $A \subseteq X$ sottoinsieme.

  - Def: identità di un sottinsieme $A \subseteq X$ e' un' applicazione:

    $$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}^X$$
    $$A \longrightarrow \chi_A$$

    Ogni $f \in \{0,1\}^X$ identifica univocamente un SOTTOINSIEME di X

  - NOTAZIONE: siano X e Y due insiemi.

    $$Y^X = \{ f : X \rightarrow Y \}$$

- **PROPRIETÀ**
  - EQUIPOTENZA di $Z^{X \times Y}$ e $(Z^Y)^X$

    $\exists\, \Psi : Z^{X \times Y} \xrightarrow{\sim} (Z^Y)^X$ bigettiva
  - $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$
  - $|Y^X| = |Y|^{|X|}$
  - $\mathcal{I}n(X,Y) := \{ f \in Y^X : f \text{ è iniettiva} \}$

    $n = |Y| \quad k = |X| \quad \Rightarrow |\mathcal{I}n(X,Y)| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
  - $\mathcal{P}_k(X) := \{ A \subseteq X : |A| = k \}$

    $n = |X| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{P}_k(X)| = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

- **COEFFICENTI BINOMIALI**
  - Def. per n e k interi, $|\mathcal{P}_k([n])|$ è chiamato COEFFICENTE BINOMIALE e si indica $\binom{n}{k}$
  - PROPRIETÀ

    1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

    2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ quindi $|\mathcal{P}_k([n])| = |\mathcal{P}_{n-k}([n])|$

    3) $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$

    4) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

  - BINOMIO di NEWTON

    $$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

- ## FORMULA di INCLUSIONE / ESCLUSIONE

- Sia Ω un INSIEME FINITO e $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di suoi sottoinsiemi.

> FORMULA 1

$$\left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| = \sum_{i\in I}|X_i| - \sum_{i<j\in I}|X_i \cap X_j| + \dots + (-1)^{n+1}|X_1 \cap \dots \cap X_n|$$

> FORMULA 2

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{i\in I} X_i\right| = \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|}|X_J|$$

dove $X_J = \bigcap_{i\in J} X_i$

- ## DISUGUAGLIANZA di BONFERRONI

- Considero la somma della formula di inclusione/esclusione. Troncandola ad un elemento $r < |I|$ ottengo una disuguaglianza:

> FORMULA 1

$$\sum_{|J|=n}|X_J| - \dots \pm \sum_{|J|=m}|X_J| \quad \begin{matrix} \geq 0 & \text{se } n-m \text{ pari} \\ \leq 0 & \text{se } n-m \text{ dispari} \end{matrix}$$

> FORMULA 2

Sia $\mu(x) = |\{i\in I : x \in X_i\}|$ la MOLTEPLICITÀ di INTERSEZIONI di x

Allora:

$$\sum_{\substack{J\subseteq I \\ |J|\leq r}} (-1)^{|J|}|X_J| = \left|\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^c\right| + (-1)^r \sum_{\substack{x\in\Omega \\ \mu(x)>0}} \binom{\mu(x)-1}{r}$$

dalla quale riconduco la FORMULA 1 perché $r = n-m$

NUMERI REALI

- **$\mathbb{R}$ è CAMPO ORDINATO COMPLETO UNICO**

> CAMPO

- Def. un campo è un insieme K munito di due operazioni $+, \cdot$ tali che:

$+: K \times K \to K$
- $\forall a,b,c \in K \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
- $\forall a,b \in K \quad a+b = b+a$
- $\forall a \in K \quad a+0 = a$
- $\forall a \in K \ \exists b \in K: \quad a+b = 0$

$\cdot: K \times K \to K$
- $\forall a,b,c \in K \quad (ab)c = a(bc)$
- $\forall a,b \in K \quad ab = ba$
- $\forall a \in K \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
- $\forall a \in K \setminus \{0\} \ \exists b \in K \setminus \{0\}: \quad ab = 1$

→ Inoltre $(a+b)c = ac + bc \quad \forall a,b,c \in K$

> CAMPO ORDINATO COMPLETO (C.O.C.)

- Def un campo $(K, +, \cdot)$ è ORDINATO TOTALMENTE per $\geq$, dove:
  - → $\forall a,b,c \in K \quad a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$
  - → $\forall a,b,c \in K \quad a \geq b \Rightarrow ac \geq bc$

- INSIEME dei NON NEGATIVI

  $P := \{x \in K : x \geq 0\}$ ha le seguenti proprietà:
  - → $P + P \subseteq P$
  - → $P \cdot P \subseteq P$
  - → $(-P) \cap P = \{0\}$
  - → $(-P) \cup P = K$

> CAMPO ORDINATO COMPLETO UNICO

- Tra i C.O.C. esiste sempre un ISOMORFISMO che manda un campo nell'altro. $\Longrightarrow \exists!$ campo ordinato completo
- Dimostrazione dell'unicità segue da Proprietà di Archimede

- ## ASSIOMA di COMPLETEZZA

- Def. un campo ordinato $(K, +, \cdot, \geq)$ e' completo

$\iff$

ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente ha un MINIMO MAGGIORANTE $\sup A$, $A \subseteq K$.

- ## MAGGIORANTE

Def. $M \in K$ e' MAGGIORANTE di $A \subseteq K \iff \forall a \in A \quad M \geq a$

- ## MASSIMO

Def. se M e' MAGGIORANTE di A e $M \in A \Rightarrow M$ e' MASSIMO di A

- ## PROPRIETA'

→ m maggiorante di $A \iff m \geq \sup A$

→ $m = \sup A \iff m$ maggiorante di $A \wedge \forall p$ magg. $p \geq m$

→ $\sup A \leq \sup B \iff \{m \in K$ maggioranti $A\} \supseteq \{m' \in K$ maggioranti $B\}$
[tranne nel caso $\sup A \in A$, $\sup B \notin B$]

→ $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

→ $\sup A = \sup B \iff \begin{cases} \forall a \in A \; \exists b \in B : \; b \geq a \\ \forall b \in B \; \exists a \in A : \; a \geq b \end{cases}$

→ Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ famiglia, $A_i \subseteq \mathbb{R}$. Allora $\sup \bigcup_{i \in I} A_i = \max\{\sup A_i, i \in I\}$

- ## $\overline{\mathbb{R}}$ ESTESO ($\overline{\mathbb{R}}$)

- Sia $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dove:
  - se $A \neq \emptyset$ limit. sup. $\Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$
  - se $A \neq \emptyset$ illimit. sup. $\Rightarrow \sup A = +\infty$
  - se $A = \emptyset$ $\Rightarrow \sup A = -\infty$

Quindi in $\overline{\mathbb{R}}$ esiste sempre un ESTREMO SUPERIORE

- $\overline{\mathbb{R}}$ ha un'algebra DEFINITA per operazioni con $+\infty$ e $-\infty$.

Unica ECCEZIONE e' $+\infty - \infty$

- SOTTO CAMPO / SOPRACAMPO
  - Def. Sia K un campo ordinato e $H \subseteq K$ un campo con le operazioni ristrette $+|_{H \times H}$ e $\cdot|_{H \times H}$.
    $\Rightarrow$ H e' SOTTOCAMPO e K SOPRACAMPO.
  - Ogni campo contiene $\mathbb{Q}$ o suo isomorfismo
    $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ e' il CAMPO ORDINATO MINIMO

- PROPRIETA' di ARCHIMEDE
  - Def. sia K un CAMPO ORDINATO. Esso e' ARCHIMEDEO se:
    $\forall \delta \in K_+$ $\quad \mathbb{N}\delta$ e' SUPERIORMENTE ILLIMITATO

▶ TH. 1: ogni CAMPO ORDINATO COMPLETO e' ARCHIMEDEO

▶ TH. 2: K campo ordinato e' COMPLETO $\Leftrightarrow$ K e' ARCHIMEDEO MASSIMALE
[ovvero K non e' sottocampo proprio di alcun H campo archimedeo]

▶ TH. 3: siano K campo ordinato archimedeo, H campo ordinato completo.
$\exists! \, \varphi : K \to H$ dove φ e' ISOMORFISMO INIETTIVO

▶ TH. 4: due campi H_1, H_2 ordinati completi sono ISOMORFI.
$\Rightarrow$ CAMPO ORDINATO COMPLETO e' UNICO

SUCCESSIONI

- DEFINIZIONI

> VALORE ASSOLUTO

Sia $a \in K$. Allora $|a| = \max(a, -a)$

> PARTE POSITIVA / NEGATIVA

Sia $a \in K$. Allora $a_+ = \max(a, 0) \geq 0$

$a_- = \max(-a, 0) \geq 0$

> PARTE INTERA

Sia $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. $\lfloor a \rfloor = n \ : \ n \leq a < n+1$

- SERIE

- $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \dots = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

- SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}$$

- SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

- SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

- PROBLEMA di BASILEO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

SOMME DI FAMIGLIE

• FAMIGLIE di REALI NON NEGATIVI

- Sia I un insieme di indici. Denotiamo:

$$\mathcal{F}(I) := \{ J \in \mathcal{P}(I) : J \text{ finito} \} \subseteq \mathcal{P}(I)$$

- Sia $\{a_i\}_{i \in I}$ una famiglia di reali ≥ 0.

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \in \mathcal{F}(I) \right\}$$

- PROPRIETÀ

1a) Se $0 \leq a_i \leq b_i \quad \forall i \in I$ allora:

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

1b) Se $I' \subseteq I$ allora:

$$\sum_{i \in I'} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

2) ASSOCIATIVITÀ GENERALIZZATA

Sia $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una partizione di I. Allora:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I_\lambda} a_i$$

3a) SOMME DOPPIE

Sia $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ una famiglia di reali ≥ 0. Allora:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}$$

3b) Siano $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_i\}_{i \in I}$ famiglie di reali ≥ 0. Allora:

$$\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$$

3c) $\forall\, t \geq 0$ e $\{a_i\}_{i \in I}$ famiglia di reali ≥ 0. Allora:

$$\sum_{i \in I} t \cdot a_i = t \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

3d) Se $a_i = b_i \cdot c_i \quad \forall\, i \in I$ allora:

$$\sum_{i \in I} a_i = \left(\sum_{i \in I} b_i \right) \left(\sum_{i \in I} c_i \right)$$

- Sia $\{a_i\}_{i\in I}$ famiglia di reali ≥ 0 con una SOMMA FINITA.

  Sia $I_* = \{ i \in I : a_i \neq 0 \}$

  Allora I_* e' un insieme NUMERABILE al più.

- **FAMIGLIE di REALI**

  - Def. una famiglia $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ e' NUMERABILE se:

    I) date due famiglie di reali ≥ 0 finite $\{p_i\}_{i\in I}$ e $\{n_i\}_{i\in I}$

    $$a_i = p_i - n_i \quad \forall\, i \in I$$

    II) date le parti positive e negative di a_i:

    $$\sum_{i\in I} a_{i+} < \infty \qquad e \qquad \sum_{i\in I} a_{i-} < \infty$$

    III) dato il valore assoluto di a_i:

    $$\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$$

  - **SOMMA di FAMIGLIE**

    - Data una famiglia $\{a_i\}_{i\in I}$ sommabile, allora:

      $$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} a_{i+} + \sum_{i\in I} a_{i-}$$

      a queste famiglie si applicano le STESSE proprietà delle famiglie di reali ≥ 0.

    - Sia $\{a_i\}_{i\in I}$ famiglia di reali finita, con $S = \sum_{i\in I} a_i$. Allora:

      $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, J_0 \in \mathcal{F}(I) : \left| S - \sum_{i\in J} a_i \right| < \varepsilon \quad \forall\, J \supseteq J_0$$

SUCCESSIONI e LIMITI

- ## SUCCESSIONE

Una successione in un insieme X e' una funzione

$$x : \mathbb{N} \to X$$

dove si usa la notazione $x_n = x(n)$ e x per $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ## PROPRIETA' PER NATURALI

- Una proprietà vale DEFINITIVAMENTE se e solo se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0$ la proprietà VALE
- Una proprietà vale FREQUENTEMENTE se e solo se vale per infiniti naturali o non e' definitivamente FALSA.

- ## CONVERGENZA e LIMITE

- **Def.** Sia $\{x_n\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Essa CONVERGE se e solo se $\forall\, \ell', \ell'' \in \overline{\mathbb{R}} : \ell' < \ell < \ell''$ $\quad x_n \in \left]\ell', \ell''\right[$ definitivamente
- NOTAZIONE

Sia x_n una successione convergente ad ℓ.

Allora " x_n tende a ℓ " e " ℓ limite di x_n ".

Si denota: $\quad x_n \to \ell$

$$\ell = \lim_{n \to \infty} x_n$$

- PROPRIETA'

1) Sia x_n una successione crescente che converge. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

2) Sia x_n successione con limite. Allora il limite e' UNICO.

3) Sia x_n successione con $x_n \to \ell$. Allora x_n LIMITATA.

$$\exists\, c > 0 : |x_n| \leq c \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

4) Siano x_n e y_n successioni ; $x_n = y_n$ definitivamente.

$$x_n \to \ell \iff y_n \to \ell$$

5) Permanenza del SEGNO

Se $x_n \to l > 0$ allora $x_n > 0$ definitivamente

6) Teorema dei 2 CARABINIERI

Se $x_n \leq y_n \leq z_n$, $x_n \to l$, $z_n \to l$ allora:

$y_n \to l$

7) Successione INFINITESIME

Se $x_n \to 0$ alla si dice INFINITESIMA.

- <u>INTORNO</u>

Un insieme $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un INTORNO di $x \in \overline{\mathbb{R}}$ se contiene un intervallo aperto contenente x.

- Se $x \in \mathbb{R} \implies x \in]a; b[\subseteq U$
- Se $x = \pm\infty \implies x \in]a; +\infty] \subseteq U$

$x \in [-\infty; b[\subseteq U$

- <u>LIMITI e OPERAZIONI ALGEBRICHE</u>

- <u>NOTAZIONE di LANDAU</u>

Sia x_n successione. Allora:

- $x_n = o(1)$ se $x_n \to 0$
- $x_n = O(1)$ se x_n limitata

- <u>SOMMA</u>

Siano $x_n \to a$, $y_n \to b$, allora dove definito:

$x_n + y_n \to a + b$

- <u>PRODOTTO</u>

Siano $x_n \to a$, $y_n \to b$, allora dove definito:

$x_n \cdot y_n \to a \cdot b$

- <u>RECIPROCO</u>

Sia $x_n \to l > 0$. Allora $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{l}$.

Sia $x_n \to +\infty$. Allora $\frac{1}{x_n} \to 0$.

- ALGORITMO di ERONE

- RADICE QUADRATA

$$\begin{cases} x_0 = c > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{cases}$$

- RADICE p-ESIMA

$$\begin{cases} x_0 = c > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right) \end{cases}$$

- MEDIE

- MEDIA ARITMETICA

$$M_A(x_1, \dots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- MEDIA GEOMETRICA

$$M_G(x_1, \dots x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

- DISUGUAGLIANZA tra MEDIE

$$M_A \geq M_G \qquad \forall\ (x_i)_{i\in I}.$$

SOMME E LIMITI

- ## SOMMA INFINITA

- Caso finito:

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{rn} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_{1\infty} + \dots + x_{r\infty}$$

- Caso infinito (NON vale sempre)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I} a_{in} = \sum_{i \in I} \left(\lim_{n \to \infty} a_{in} \right)$$ se e solo se:

① CONVERGENZA MONOTONA

Siano $a_{in} \in [0, \infty]$.

Se $\forall i \in I \ \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le a_{in} \le a_{i\,n+1}$

allora vale il passaggio al limite.

② CONVERGENZA DOMINATA

Siano $a_{in} \in \mathbb{R}$.

Se:
- $a_{in} \to a_{i\infty}$ per $n \to \infty$ $\forall i \in I$
- $|a_{in}| \le b_i \quad \forall i \in I$
- $\sum_{i \in I} b_i < \infty$

allora vale il passaggio al limite.

FUNZIONE ESPONENZIALE

- ## GRUPPO ORDINATO

Sia $(G, +)$ un gruppo commutativo. Si dice ordinato se si può munire di una RELAZIONE D'ORDINE TOTALE $(G, +, \geq)$.

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c \quad \forall c \in G.$$

- ## GRUPPO ORDINATO COMPLETO

- Si dimostra che esiste un UNICO gruppo ordinato completo, a meno di isomorfismi.
- Se G_1, G_2 sono gruppi ordinati completi, c'è un UNICO isomorfismo che manda due $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$ scelti uno nell'altro.

- ## FUNZIONE ESPONENZIALE

- Considero $(\mathbb{R}, +, \geq)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot, \geq)$ gruppi ordinati.

  Sia l'unico isomorfismo:

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad : \quad \exp(1) = a \;\Big|\; \exp(x) = a^x$$

- COSTRUZIONE

  ① Successione $\quad x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \quad$ con $a \in \mathbb{R}$

  - CRESCENTE DEFINITIVAMENTE
  - LIMITE è FINITO

$$\exp := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sup_{n > x_-} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

  - PROPRIETÀ

→ $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

→ $(y-x)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq (y-x)\left(1 + \frac{y}{n}\right)^{n-1}$

per $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $n > x_-$

→ Sia $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Allora

$\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n$ converge allo stesso limite di $\exp(a)$

→ $x_n \to a \in \mathbb{R} \implies x_n$ limitata

② LEGGE ESPONENZIALE

$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

③ Funzione exp

$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

- strettamente crescente
- iniettiva
- omomorfismo
- surgettiva

} e' ISOMORFISMO tra GRUPPI ORDINATI

④ Funzione log (inversa)

$log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e' ISOMORFISMO CRESCENTE di GRUPPI

- CALCOLO di e (con SERIE ESPONENZIALE)

① $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

② $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

⊛ CRITERI di CONVERGENZA

- Siano $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ assolut. convergenti.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} c_i = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j\right)$

- Siano $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ assolutamente convergente, $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ semplic. conv.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} c_i = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$

Serie di Numeri Reali

- **Serie**

Data una successione di reali $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la serie e'

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

- **Somma parziale**

Data la stessa successione di reali, la somma parziale e'

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

- **Convergenza**

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e' CONVERGENTE se le somme parziali s_n CONVERGONO

In particolare la SOMMA della SERIE e':

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

→ **Serie e Successione**

Nota la successione o le somme finite, posso ricavare l'una dall'altra.

$$\begin{cases} a_0 = s_0 \\ a_k = s_k - s_{k-1} & \forall k>0 \end{cases}$$

OSS. se la serie converge, la successione e' infinitesima.

- **Convergenza assoluta**

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e' ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

In particolare:

$$\begin{array}{ccc} \text{Conv. semplice } a_k & \longleftrightarrow & \text{Conv. successione } s_n \\ \not\Downarrow \ \Uparrow & & \\ \text{Conv. assoluta } a_k & \longleftrightarrow & \text{Famiglie sommabili } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

→ **Prodotto di Cauchy**

Siano $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ serie. Allora:

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ con $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ e' il PRODOTTO di CAUCHY.

⊛

SERIE di NON NEGATIVI

[Criteri per dimostrare la convergenza di serie]

- **CONFRONTO**

Siano $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $0 \leq a_i \leq b_i$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

- **CRITERIO di RADICE e RAPPORTO**

Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Supponiamo una delle seguenti condizioni:

- $a_k^{1/k} \longrightarrow c$ (criterio della radice)
- $\frac{a_{k+1}}{a_k} \longrightarrow c$ (criterio del rapporto)

Allora al variare di c ho che:

- $c > 1$ la serie e' DIVERGENTE
- $c < 1$ la serie e' CONVERGENTE
- $c = 1$ la serie non viene caratterizzata dal criterio

- **CRITERIO di CONDENSAZIONE**

Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ decrescente. Allora:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$$

SERIE di SEGNO QUALUNQUE

[SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI]

Valgono tutti i criteri per i non negativi.

[SERIE QUALUNQUE]

- **CRITERIO di LEIBNITZ**

Siano $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, decrescente e infinitesima.

Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ CONVERGE.

In particolare:

- Somme parziali di indice PARI sono DECRESCENTI.
- Somme parziali di indice DISPARI sono CRESCENTI.

Prodotti Infiniti

- **Prodotto Infinito**

Sia $a_i > 0$, $i \in I$. Allora il prodotto infinito e' definito:

$$\prod_{i \in I} (1 + a_i) := \sup_{J \in \mathcal{F}(I)} \prod_{i \in I} (1 + a_i)$$

$$\prod_{i \in I} (1 + a_i) = \exp\left(\sum_{i \in I} \log(1 + a_i) \right)$$

- **Fatti**

① Il prodotto e' FINITO $\iff \sum_{i \in I} a_i < \infty$

② $1 + \sum_{i \in I} a_i \leq \prod_{i \in I} (1 + a_i) \leq e^{\sum a_i}$

③ $\prod_{i \in [n]} (1 + a_i) = \sum_{J \subseteq [n]} \prod_{i \in J} a_i$

④ $\prod_{i \in J} (1 + a_i) = \sum_{J \in \mathcal{F}(I)} \prod_{i \in J} a_i$

FUNZIONI CONTINUE

- **FUNZIONE CONTINUA in x_0**

① Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. f è CONTINUA in $a \in A$ se e solo se:

$\forall U$ intorno di $f(a)$ $\exists V$ intorno di a :: $f(V) \subseteq U$

② Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. f è CONTINUA in $a \in A$ se e solo se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x \in A$ " $|a - x| < \delta \iff |f(a) - f(x)| < \varepsilon$ "

- **PROPRIETÀ**

  - COMPOSIZIONE

    Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ funzioni continue in x_0 e $f(x_0)$

    Allora $g \circ f$ è continua in x_0.

  - PERMANENZA del SEGNO

    Sia f continua in x_0 e $f(x_0) > 0$. Allora

    $\exists V$ intorno di x_0 : $f(x) > 0$ $\forall x \in V$.

  - LOCALMENTE LIMITATA

    Sia f continua in x_0. Allora è localmente limitata in x_0.

    $\exists V$ intorno di x_0 : $f(V)$ è LIMITATA.

  - SOMMA e PRODOTTO

    Siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in A$.

    Allora $f + g$ e $f \cdot g$ sono continue in x_0.

  - TEOREMA degli ZERI

    Sia f continua, $f(a) \cdot f(b) < 0$ per $a < b \in X$.

    Allora f si annulla in almeno un punto nell'intervallo $[a; b]$.

- **FUNZIONE CONTINUA**

  Sia $f: A \to \mathbb{R}$. f è CONTINUA se e solo se:

  $\forall x \in A$ f è continua in x

- ## CONTINUITÀ e SUCCESSIONI

  - Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, $(x_n) \subseteq A$, $x_n \to x^* \in A$

    Allora $f(x_n) \longrightarrow f(x^*)$
  - Limite di successione ricondotto a continuità

    Sia $\phi : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua in ∞.

    $$\begin{aligned} n &\longrightarrow n \\ \infty &\longrightarrow n \end{aligned}$$

    Sia $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ continua. Allora:

    $f \circ \phi : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to \overline{\mathbb{R}}$ si riconduce alla successione x_n.
  - ### FUNZIONE SEQUENZIALMENTE CONTINUA

    Sia $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. f è sequenzialmente continua in $a \in A$ se:

    | $\forall\ (a_n) \subseteq A$ convergente ad a, $f(a_n) \to f(a)$.

    In particolare questo succede se e solo se f è CONTINUA in a.

  - ### VALORE MASSIMO e PUNTO di MASSIMO

    Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $x^* \in X : f(x^*) \geq f(x)\ \forall x \in X$.

    Allora $f(x^*) = \max f(X)$

    x^* è PUNTO di MASSIMO e $f(x^*)$ è il VALORE MASSIMO.
  - ### PUNTO di ACCUMULAZIONE

    Sia $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

    x è PUNTO di ACCUMULAZIONE di A $\Longleftrightarrow$ $\forall$ intorno di x, vi sono punti di A distinti da x

- ## METODO di BISEZIONE

  Il metodo consiste nel dimostrare l'esistenza di un punto / un intorno con una data proprietà restringendo l'intervallo.

  $$\begin{cases} (a_0, b_0) = (a, b) \\ (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{se la proprietà vale} \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

- TEOREMA di WEIERSTRASS

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, con $a, b \in \mathbb{R}$.
Allora f ha un MASSIMO.

- PRINCIPIO di BOLZANO

Sia $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato.
Sia $S \subseteq [a,b]$ un insieme INFINITO.
Allora vi e' un punto di accumulazione per S.

- CONSEGUENZE

→ $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ e' un INTERVALLO.

→ $f : I \to J$ bigettiva. Sono equivalenti:

  - f continua
  - f monotona
  - f^{-1} continua

→ f continua e iniettiva $\Rightarrow$ f bigettiva

Costante di Lipschitz

- **DEF** (generale)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$. Ha costante di Lipschitz c se:

$$\forall\, x, y \in A,\ x \neq y \qquad \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq c$$

- **PROPRIETÀ**

→ f è lipschitziana ⇒ f continua

- **DEF** (locale)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$.

f è LOCALMENTE LIPSCHITZIANA ⇔ $\forall x \in A$, x ha intorno di U dove $f|_U$ è LIPSCHITZIANA

- **PROPRIETÀ**

Siano $f, g: I \to \mathbb{R}$ rispettivamente c_1-lipschitziana, c_2-lipschitziana

- $f + g$ è $(c_1 + c_2)$-lipschitziana.
- fg è $c_1 \cdot \sup|g(x)| + c_2 \cdot \sup|f(x)|$-lipschitziana, f, g limitate

Iterate di Funzioni Continue

- **DEF** (iterate funzioni continue)

Sia $f: I \to I$ continua. Una successione di iterate è:

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

- **COMPORTAMENTO**

Sia f continua e crescente. Allora l'ITERATA CONVERGE:

- se $x_0 \leq f(x_0)$ ITERATA CRESCENTE (conv. punto fisso a SX)
- se $x_0 \geq f(x_0)$ ITERATA DECRESCENTE (conv. punto fisso a DX)
- se $x_0 = f(x_0)$ ITERATA COSTANTE (punto fisso)

CAMPO dei NUMERI COMPLESSI

- **DEF** ($\mathbb{C}$)

1) Definita $i : i^2 = -1$, allora:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

2) Definisco $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$.

3) Definisco $\mathbb{C} \subseteq M(2,2,\mathbb{R})$: $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

- PROPRIETÀ (per $z = a + ib \in \mathbb{C}$)

- CONIUGIO: $\bar{z} = a - ib$
- MODULO: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- INVERSO: $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

- SUCCESSIONI: Convergenza

Sia $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$, allora sono equivalenti:

- $z_n \to z$ per $n \to +\infty$
- $z_n - z \to 0$
- $\begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z \end{cases}$
- $|z_n - z| \to 0$
- se senza perdere generalità $z_n \to 0$ allora

$x_n^2 + y_n^2 \to 0$ con $z_n = x_n + iy_n$, $n \to +\infty$

SPAZIO METRICO

- **DEF** (Spazio metrico)

Uno spazio metrico e' un insieme in cui c'e' una definizione di distanza.

- **DEF** (Distanza)

La distanza e' una funzione tra punti dello spazio metrico X. In particolare deve valere che:

① $d(x,y) = 0 \iff x = y$

② $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

③ $d(x,y) < d(x,z) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

- **DEF** (Ball)

Una palla (ball) in uno spazio metrico e' un intorno:

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

- **DEF** (Intorno aperto)

Sia $A \subseteq X$, X spazio metrico.

A e' APERTO $\iff$ e' INTORNO di ogni suo punto, ovvero

$$\forall x \in A \ \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A$$

- PROPRIETA'
  - $\emptyset$ e X sono APERTI
  - A, B aperti $\Rightarrow$ $A \cap B$ e' aperto
  - A, B aperti $\Rightarrow$ $A \cup B$ e' aperto
  - le PALLE sono intorni aperti

- **DEF** (Intorno chiuso)

Sia $C \subseteq X$. C e' CHIUSO $\iff$ C^c e' APERTO

- **DEF** (Sottospazio metrico)

Sia X spazio metrico, $Y \subseteq X$ sottoinsieme.

Allora Y e' uno SPAZIO METRICO con la restrizione $d|_{Y \times Y}$.

Y e' SOTTOSPAZIO METRICO.

- **DEF** (Prodotti di spazi metrici)

Siano X_1 e X_2 spazi metrici con le distanze d_1 e d_2.

Si può allora definire $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow X_1 \times X_2$

- ESEMPIO
  - $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$
- PROPRIETA'

Considero una successione $(x_n, y_n) = z_n$. Sono equivalenti:

- $z_n \longrightarrow z$
- $z_n - z \longrightarrow 0$
- $\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{cases}$, $(x, y) = z$
- $d(z_n, z) \longrightarrow 0$

- **DEF** (Distanze equivalenti)

Siano d_1, d_2 distanze nello spazio metrico X.

d_1, d_2 sono equivalenti $\Longleftrightarrow$ definiscono le stesse famiglie di aperti

d_1, d_2 sono equivalenti $\Longleftrightarrow$ ogni palla e' aperta nell'altra distanza

FUNZIONE ESPONENZIALE REALE

- **TEORIA dei GRUPPI ORDINATI**

Considero $(\mathbb{R}, +, \geq)$ e $(\mathbb{R}_+, \cdot, \geq)$ gruppi ordinati completi. Allora $\exists!\ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tale che $\psi(1) = a$

$\psi(x) = a^x$ (NOTAZIONE) ed ψ isomorfismo

- **DEF** (Funzione esponenziale)

Considero la successione:

$$x_n := \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

osservo che x_n crescente, ha limite finito. Allora:

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sup_{n > x_-} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

- **PROPRIETÀ**

- Definizione alternativa (converge velocemente)

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{SERIE ESPONENZIALE}$$

- Disuguaglianze
  - $\exp(x) \geq 1 + x$
  - Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Per $n > x_-$:

$$(y-x)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq (y-x)\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

per $n \to \infty$:

$$(y-x)\, e^x \leq e^y - e^x \leq (y-x)\, e^y$$

- Limite successioni

Sia $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(a)$$

- LEGGE ESPONENZIALE

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

- exp è MONOTONA, INIETTIVA, SURGETTIVA, OMOMORFISMO
  $\Rightarrow$ ISOMORFISMO tra GRUPPI ORDINATI

- **DEF** (Logaritmo)
  Dato che exp è bigezione, definisco:
  $$\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad : \quad \log(a) = b \iff \exp(b) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$
  la funzione logaritmo è INVERSA di exp.

- PROPRIETÀ
  - Disuguaglianze
    $\forall u, v \in \mathbb{R}^+ : u < v$
    $$\frac{v-u}{v} \leq \log(v) - \log(u) \leq \frac{v-u}{u}$$

Funzione Esponenziale Complessa

• Somme Infinite di Complessi

- Famiglie Sommabili

$$\sum_{k\in I} |z_k| < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{k\in I} |\mathrm{Re}\, z_k| < \infty \\ \sum_{k\in I} |\mathrm{Im}\, z_k| < \infty \end{cases}$$

ne segue che

$$\sum_{k\in I} z_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\, z_k + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\, z_k$$

- ASSOLUTAMENTE SOMMABILE: $\sum_{k\in I} |z_k| < \infty$
- SEMPLICEMENTE SOMMABILE: $\exists\, s \in \mathbb{C}$ tale che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, F \in \mathcal{F}(I) : \forall\, F' \in \mathcal{F}(I),\ F \subseteq F'$$

vale $\left| \sum_{k\in F} z_k - s \right| < \varepsilon$

- Associatività Generalizzata

Sia Λ partizione di I con $(z_k)_{k\in I} \subseteq \mathbb{C}$. Allora:

$$\sum_{k\in I} z_k = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{k\in\lambda} z_k$$

- Convergenza Dominata

Siano $(z_{kn})_{k\in I, n\in\mathbb{N}}$ famiglie di complessi.

Sia $(z_{k\infty})_{k\in I} \subseteq \mathbb{C}$, $(b_k)_{k\in I} \subseteq [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Se:

- $z_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} z_{k\infty} \quad \forall k \in I$
- $|z_{k,n}| < b_k \quad \forall k, n$
- $\sum b_k < \infty$

allora segue che:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k\in I} z_{kn}$ e' assolutamente sommabile convergente

$$\sum_{k\in I} z_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k\in I} z_{k\infty}$$

- DEF. (Esponenziale Complesso)

Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k$$

che converge per CONV. DOM. a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$$

- FORMA POLARE di COMPLESSI

Siano $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\rho \geq 0$. Allora sia $z \in \mathbb{C}$.

$$z = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta$$

GONIOMETRIA

- **DEF**

Sia $t \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\cos(t) = \operatorname{Re} e^{it} = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(t) = \operatorname{Im} e^{it} = \frac{1}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \quad \text{per } t \in \mathbb{R} \setminus \left(2\pi\mathbb{Z} - \pi\right)$$

Notazione di Landau

- **DEF**

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e' LOCALMENTE LIMITATA se:

$$\exists M > 0 \text{ e } U \text{ intorno di } x_0 \ :: \ |f(x)| < M \ \forall x \in U$$

allora si dice che $f(x) = O(1)$ per $x \to x_0$.

- **DEF**

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e':

$$f(x) = o(1) \iff f \text{ infinitesima per } x \to x_0$$

Inoltre scriviamo:

$$o(f(x)) = f(x) \cdot o(1) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$O(f(x)) = f(x) \cdot O(1) \quad \text{per } x \to x_0$$

SVILUPPI POLINOMIALI

- **DEF** sviluppo polinomiale

  Sia f funzione e $P \in \mathbb{R}[x]$ polinomio. Se:
  $$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$
  allora P e' SVILUPPO POLINOMIALE di grado n di f in x_0.

- **DEF** contatto

  Siano f, g funzioni:
  $$f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0 \Rightarrow$$
  f, g hanno contatto di ordine n

- REGOLE di CALCOLO

  Siano: $f = P(x) + o(x^n)$ e $g = Q(x) + o(x^n)$
  - $\alpha f + \beta g = \alpha P + \beta Q + o(x^n)$
  - $f \cdot g = P \cdot Q + o(x^n)$
  - $g \circ f = Q(P) + o(x^n)$

DERIVABILITÀ

- **DEF** (derivata)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$. f è DERIVABILE in $x_0 \in I$ $\iff$ $\exists\, m \in \mathbb{R}$:

1) $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

2) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + o(1)$ per $x \to x_0$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$

Notazione: m si scriverà: $\dfrac{df}{dx}$ / $f'(x)$ / Df

- **REGOLE di CALCOLO**

- SOMMA

$(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$ $\quad a, b \in \mathbb{R},\ f, g: I \to \mathbb{R}$

- PRODOTTO

$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0)$ $\quad f, g: I \to \mathbb{R}$

- COMPOSIZIONE

$(f \circ g)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ $\quad f: I \to \mathbb{R},\ g: J \to \mathbb{R}$

- INVERSA

$(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f(x_0))}$ $\quad f: I \to J$

- **DEF** (destra / sinistra)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I =]a, b[$.

La derivata destra di f in x_0 è:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **PROPRIETÀ**

- DERIVABILITÀ è LOCALE

Sia $f: I \to \mathbb{R}$. È DERIVABILE in $x_0 \in I$ $\iff$

$\exists\, U$ intorno di x_0: $f|_U$ derivabile in x_0

TEOREMI con DERIVATE

▸ PRINCIPIO VARIAZIONALE di FERMAT

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in [a,b]$ punto di massimo.

Allora:

- $f'_+(x_0) \leq 0$ (se $f'_+(x_0)$ esiste, $x_0 \neq b$)
- $f'_-(x_0) \geq 0$ (se $f'_-(x_0)$ esiste, $x_0 \neq a$)

▸ TEOREMA di ROLLE

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Se f è continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$,

se $f(a) = f(b)$ allora:

$$\exists\, x_0 \in]a,b[\;:\; f'(x_0) = 0$$

▸ TEOREMA del VALOR MEDIO (Lagrange)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Se f è continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$

allora: $\exists\, x_0 \in]a,b[\;:\; f(b) - f(a) = f'(x_0)\cdot(b-a)$

▸ TEOREMI

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Se f è continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$

allora:

- f crescente $\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$
- f costante $\iff f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$
- f c-Lipschitziana $\iff |f'(x)| \leq c \quad \forall\, x \in [a,b]$

▸ TEOREMA di RIMOZIONE SINGOLARITÀ

Sia $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in U$. Sia $f: U \to \mathbb{R}$ continua in U,

derivabile in $U \setminus \{x_0\}$. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = p$ allora:

$$\exists\, f'(x_0) = p$$

Polinomio di Taylor

- **LEMMA**

Sia U intorno di x_0 in $\mathbb{R}$. Allora sia $f: U \to \mathbb{R}$ con

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora $f(x) = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$

- **DEF** contatto

Siano $f, g: U \to \mathbb{R}$ con n derivate in $x_0 \in U$,

$$f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0) \quad \text{per } j = 0, \dots, n$$

Allora f e g hanno CONTATTO di ORDINE n.

- **DEF** sviluppo polinomiale

Sia $p \in \mathbb{R}[t]$ polinomio con derivate in $x_0 \in U$ uguali a quelle di $f: U \to \mathbb{R}$ fino all' ordine n.
Allora p e' SVILUPPO POLINOMIALE di ordine n.

- **DEF** polinomio di Taylor

Sia $f: U \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in U$.
Il POLINOMIO di TAYLOR di f in x_0 di ordine n e':

$$T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

- **RESTO alla PEANO**

Sia $f: U \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in U$.
Allora $T_n(x, x_0, f)$ e' SVILUPPO POLINOMIALE di ordine n per f

$$f(x) - T_n(x, x_0, f) = o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

- **RESTO alla LAGRANGE**

Sia $f: U \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in $x_0 \in U$. Sia $x \in U$.
Allora $\exists\, \xi$ tra x e x_0 :

$$f(x) - T_n(x, x_0, f) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- PROPRIETÀ Polinomio di Taylor
  - $T_n(x, x, f) = f(x)$
  - $T_n(x, y, \alpha f + \beta g) = \alpha T_n(x,y,f) + \beta T_n(x,y,g)$
  - $d_x T_n(x,y,f) = T_{n-1}(x,y,f')$
  - $d_y T_n(x,y,f) = f^{(n+1)}(y) \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!}$

FUNZIONI CONVESSE

- DEF.1

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.

f e' CONVESSA $\iff$ $\forall x_0, x_1 \in I$, $\forall t \in [0,1]$:
$$f(t \cdot x_1 + (1-t)x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

- OSS: dato i punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, il segmento congiungente e' descritto da: $\{ t(x_1, y_1) + (1-t)(x_0, y_0) \ : \ t \in [0,1] \}$

Le combinazioni sono dette COMBINAZIONI CONVESSE.

- DEF2

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.

Sia l' EPIGRAFICO di f: $\mathrm{epi}(f) = \{ (x,y) \in I \times \mathbb{R} \ : \ y \geq f(x) \}$.

f e' CONVESSA $\iff$ $\mathrm{epi}(f)$ e' CONVESSO

- OSS: SOTTOINSIEME CONVESSO in $\mathbb{R}^n$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso. Ciò succede sse:

$$\forall P, Q \in A, \ \forall t \in [0,1]: \quad tQ + (1-t)P \in A$$

- DEF3

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.

f e' CONVESSA $\iff$ $\forall a < b < c$: $f(b) \leq \left(\frac{b-a}{c-a}\right) f(c) + \left(\frac{c-b}{c-a}\right) f(b)$

dove ogni COMBINAZIONE CONVESSA e': $a < b < c$,
$$b = \left(\frac{b-a}{c-a}\right) c + \left(\frac{c-b}{c-a}\right) a$$

- DEF 4

$x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e' CRESCENTE su $I \setminus \{a\}$

▸ PROPRIETÀ

- $\forall\ a < b < c$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$
- f è LOCALMENTE LIPSCHITZIANA (quindi CONTINUA)
- Una funzione convessa su $I \subseteq \mathbb{R}$ è $f'_- \leq f'_+$ ovunque
- Le funzioni f'_- e f'_+ sono CRESCENTI
- Sia f derivabile su I. Allora

  f convessa $\iff$ f' crescente
- Sia f derivabile 2 volte su I. Allora:

  f convessa $\iff$ $f'' \geq 0$ su I

▸ SOTTOLIVELLO

Sia $f : I \to \mathbb{R}$.

Il SOTTOLIVELLO è $f^{-1}(]-\infty, c]) = \{x \in I : f(x) \leq c\}$.

f convessa $\Rightarrow$ SOTTOLIVELLO è INTERVALLO

▸ MASSIMO e MINIMO (di f convessa)

- MASSIMI: si trovano sempre agli ESTREMI di I
- MINIMI: è sempre un INTERVALLO

SUCCESSIONI e CONTINUITÀ

▶ **DEF**: Successione

Una SUCCESSIONE di elementi è una funzione:

$$x : \mathbb{N} \to X$$

ed è indicata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▶ **DEF**: Sottosuccessione

Una SOTTOSUCCESSIONE di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione $x \circ \nu$:

$$x \circ \nu : \mathbb{N} \xrightarrow{\nu} \mathbb{N} \xrightarrow{x} X$$

con $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente.

Si indica $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

• **PROPRIETÀ di URYSOHN**

Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio metrico converge ad un elemento $\xi \in X$ $\iff$

$\forall (x_{n_k})_k$ di (x_n) $\exists$ una sottosuccessione $(x_{n_{k_\ell}})_\ell$ di (x_{n_k}) che converge a ξ.

• **CONTINUITÀ**

Sia $f : X, d \to X', d'$. f è continua in $p \in X$ $\iff$

$\forall x_n \to p$ $\exists$ sottosuccessione $(x_{n_k})_k$: $f(x_{n_k}) \to f(p)$

• **SOTTOSUCCESSIONI MONOTONE**

Ogni successione $(x_n) \subseteq X$ con X totalmente ordinato ha una sottosuccessione monotona.

▶ **DEF**: Compattezza

Uno spazio metrico X è SEQUENZIALMENTE COMPATTO $\iff$ ogni successione in X ammette sottosuccessione convergente a $\xi \in X$.

• **PROPOSIZIONE**

X compatto: $C \subseteq X$ chiuso $\Rightarrow$ C compatto.

- PROPOSIZIONE

Siano (X,d) e (X',d') spazi compatti.

$\Rightarrow$ $(X \times X', d_{X \times X'})$ spazio compatto.

- TEOREMA WEIERSTRASS (per compatti)

Sia (X,d) spazio metrico compatto non vuoto.

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua.

$\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo.

▸ DEF: Continuità Uniforme

Sia $f: (X, d_x) \to (Y, d_y)$. f è CONTINUA UNIFORME $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X \quad d_x(x,x') \leq \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$

- OSS: f continua uniforme $\Rightarrow$ f continua

- TEOREMA HEINE - CANTOR

Sia f continua e definita su (X,d) spazio compatto.

$\Rightarrow$ f UNIFORMEMENTE CONTINUA.

▸ DEF: Modulo di continuità

Un MODULO di CONTINUITÀ è una funzione:

$\omega : [0, \infty] \to [0, \infty]$ crescente, infinitesima per $x \to 0$

- Una funzione f ammette modulo di continuità $\Leftrightarrow$

$\forall x, x' \in X, \quad d_y(f(x), f(x')) \leq \omega(d(x,x'))$

- FATTO

Sia $f: (X, d_x) \to (Y, d_y)$.

f uniformemente continua $\Leftrightarrow$ f ha modulo di continuità

INTEGRAZIONE secondo RIEMANN

(integrale di Riemann-Darboux)

▸ **DEF**: Suddivisione alla Riemann

Sia $[a,b]$ intervallo. Una suddivisione alla Riemann di $[a,b]$ è una sequenza ordinata e finita di punti:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

indicata: $P = \{x_k\}_{k=0}^{n}$

• INTERVALLI

Data la suddivisione P, si individuano $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

• LUNGHEZZA

Dato un intervallo $J = [\alpha, \beta]$: $|J| = \beta - \alpha$

▸ **DEF**: Valore di Finezza

Sia $P \in \mathbb{P}([a,b])$ suddivisione. Il VALORE di FINEZZA è:

$$|P| = \max_{0 < k \leq n} |I_k|$$

▸ **DEF**: Somma alla Riemann

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Sia $P \in \mathbb{P}([a,b])$ suddivisione.

La SOMMA INFERIORE di f rispetto a P è:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{I_k} f \right) \cdot |I_k|$$

La SOMMA SUPERIORE è:

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} f \right) \cdot |I_k|$$

▸ **DEF**: Integrale inferiore / superiore

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ limitata, $I = [a,b]$.

L' INTEGRALE INFERIORE di f su I è:

$$s(f, I) := \sup_{P \in \mathbb{P}(I)} s(f,P) = \int_{*a}^{b} f(x)\,dx$$

L' INTEGRALE SUPERIORE è:

$$S(f,I) := \inf_{P \in \mathbb{P}(I)} S(f,P) = \int_{a}^{*b} f(x)\,dx$$

▸ **DEF**: integrabile

Sia $f: I \to \mathbb{R}$. f è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN $\iff$ è LIMITATA e $s(f, I) = S(f, I)$

In tal caso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = s(f, I) = S(f, I)$$

▸ **PROPRIETÀ**

Sia f funzione limitata su $I = [a,b]$, $P, Q \in \mathbb{P}(I)$:

1) $s(f,P) = -S(-f,P)$
2) $s(f,P) \leq S(f,P)$
3) $P \subseteq Q$, Q più fino di P. Allora:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \quad e \quad S(f,P) \geq S(f,Q)$$

4) $(b-a) \inf\limits_{x\in I} f(x) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq (b-a) \sup\limits_{x\in I} f(x)$
5) Sia g funzione limitata in I, $\forall \lambda \geq 0$:

$$S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P)$$
$$s(f+g,P) \geq s(f,P) + S(g,P)$$
$$S(\lambda f,P) = \lambda S(f,P)$$
$$s(\lambda f,P) = \lambda s(f,P)$$

▸ **INTEGRABILITÀ**

- Sia $f: I \to \mathbb{R}$ limitata.

  f è R-INTEGRABILE $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists P \in \mathbb{P}(I): S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$

- SCARTO: $\rho(f,P) := S(f,P) - s(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} osc(I_k) \cdot |I_k|$

  Sia $f: I \to \mathbb{R}$ limitata.

  f è R-INTEGRABILE $\iff$ $\inf\limits_{P \in \mathbb{P}(I)} \rho(f,P) = 0$

- Sia $f: I \to \mathbb{R}$.

  f è CONTINUA o MONOTONA $\Rightarrow$ f è R-INTEGRABILE

- Sia $f \in R(I)$, $\varphi: J \to \mathbb{R}$ con $J = [\inf f, \sup f]$, φ continua.

  $\Rightarrow \varphi \circ f$ è R-INTEGRABILE

- OSS.

Siano $f, g \in R([a,b])$. $\Rightarrow$ $f \cdot g \in R([a,b])$

- Siano $f \in R([a,b])$, $g: [c,d] \to [a,b]$, g omeomorfismo, g^{-1} k-Lipschitziana.

$\Rightarrow$ $f \circ g \in R([c,d])$

- Cambiare una funzione R-integrabile in un numero finito di punti non cambia il fatto che sia R-integrabile.

- TEOREMA

Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabili, convergenti uniformemente a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.
Allora f e' R-integrabile, con: $\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

- DEF convergenza uniforme funzioni

Sia come notazione per $g: S \to \mathbb{R}$:

$$\|g\|_{\infty, S} := \sup_{x \in S} |g(x)|$$

Allora f_n converge ad f su $[a,b]$ sse:

$$\|f - f_n\|_{\infty, [a,b]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

DEFINIZIONI equivalenti INTEGRALE

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. f e' R-integrabile, $\int_a^b f(x)dx = \sigma$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\exists P \in \mathbb{P}[a,b]$ e una scelta di punti $\Xi : (\xi_1, \dots, \xi_n)$ con $\xi_i \in I_i$ tali che:

$$S(f, P, \Xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$|\sigma - S(f, P, \Xi)| < \varepsilon \quad \text{purché} \quad |P| < \delta$$

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. f e' R-integrabile $\Leftrightarrow$

a) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: " $|P| < \delta \Rightarrow \rho(f, P) < \varepsilon$ "

b) $\lim_{|P| \to 0} \rho(f, P) = 0$

c) $\inf_{P \in \mathbb{P}(I)} \rho(f, P) = 0$

- **DEF**: Funzione Integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile. Allora:

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$$

e' BEN DEFINITA e si chiama FUNZIONE INTEGRALE.

- **NOT**: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

- $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in I$, con $f : I \to \mathbb{R}$ R-integrabile:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx$$

- Sia F funzione integrale di $f \in R([a,b])$.

$\Rightarrow$ F e' Lipschitziana di costante $\|f\|_{\infty,[a,b]}$

- **TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE**

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile.

Sia $x_0 \in [a,b]$, f continua in x_0.

$\Rightarrow$ F derivabile in x_0 ; $F'(x_0) = f(x_0)$

- **CALCOLO INTEGRALE**

- Ogni $f \in C^0([a,b])$ ha una ANTIDERIVATA (infinite, differiscono $+c$)

- CALCOLO di un INTEGRALE

Sia u primitiva di f : $u' = f$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = u(b) - u(a) = [u(x)]_{x=a}^{x=b}$$

- INTEGRAZIONE per PARTI

Siano $u, v \in C^1([a,b])$. Allora:

$$\int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,dt = [u(t)\cdot v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u'(t)\cdot v(t)\,dt$$

- INTEGRAZIONE per SOSTITUZIONE

Sia $g \in C^1([a,b])$, $u : \mathrm{Img} \to \mathbb{R}$ continua. Allora:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} u(t)\,dt = \int_a^b u(g(s))\,g'(s)\,ds$$

- FORMULA INTEGRALE del RESTO

Sia $f \in C^{n+1}([a,b])$. Allora:

$$f(x) - T_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \cdot \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \, dt$$

ESTENSIONE dell' INTEGRALE di RIEMANN

- DEF Localmente integrabile

Sia $f: [a,b) \to \mathbb{R}$.

f e' LOCALMENTE INTEGRABILE $\iff \forall\ a \leq c < b$, $f|_{[a,c]} \in R([a,c])$

- DEF Integrale in senso improprio

Sia $f: [a,b) \to \mathbb{R}$. f e' INTEGRABILE in SENSO IMPROPRIO su $[a,b)$ sse e' localmente integrabile e

$$\exists \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

- FATTI

  - Sia f localmente integrabile su $[a,b)$ e non negativa.
    $\Rightarrow$ f ha integrale improprio.
  - Sia f continua o monotona su $[a,b)$.
    $\Rightarrow$ f e' localmente integrabile.

- DEF assolutamente convergente

Sia $f: [a,b) \to \mathbb{R}$, localmente integrabile.

$$f \text{ e' ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE} \iff \int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$$

- FATTI

  - Sia f assolutamente convergente.
    $\Rightarrow$ f ha integrale improprio
  - Siano f, g localmente integrabili su $[a,b)$, $0 \leq g \leq f$.
    $$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

- Sia f localmente integrabile su $[0,\infty)$.

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

- **TEST INTEGRALE per SERIE**

Sia $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ non negativa e decrescente. Allora:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x) < \infty \iff \int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$$

- **DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ**

Siano $f, g \in R([a,b])$. Sia come notazione

$$(f \cdot g) := \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

Allora:

$$(f \cdot g)^2 \leq (f \cdot f)(g \cdot g)$$

LUNGHEZZA di CURVE

- **LUNGHEZZA SPEZZATA**

Sia $\gamma : [a,b] \to X, d$

Considerato $P \in \mathbb{P}([a,b])$, la lunghezza di γ relativa a P e':

$$\ell(\gamma, P) := \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k-1})) \qquad \text{dove } P = \{x_0, \dots x_n\}$$

- **DEF** Variazione o Lunghezza

Sia $\gamma : [a,b] \to X, d$. La variazione di γ sara':

$$\ell(\gamma, [a,b]) := \sup_{P \in \mathbb{P}([a,b])} \ell(\gamma, P) \in [0, \infty]$$

- Si dice che la VARIAZIONE e' LIMITATA se $\ell(\gamma, [a,b]) < \infty$.
- **PROPRIETA'**

① **INVARIANZA per RIPARAMETRIZZAZIONE**

Siano:

$$[a,b] \xrightarrow[\sigma]{\sim} [c,d] \xrightarrow[\gamma]{} X, d$$

dove σ e' bigezione monotona. Allora:

$$\ell(\gamma, [c,d]) = \ell(\gamma \circ \sigma, [a,b])$$

② **ADDITIVITA'**

Siano $a < b < c$, $\gamma : [a,c] \to X, d$. Allora:

$$\ell(\gamma, [a,c]) = \ell(\gamma, [a,b]) + \ell(\gamma, [b,c])$$

③ **RISCRITTURA DEF**

Sia $\gamma : [a,b] \to X, d$. Sia γ continua. Allora:

$$\ell(\gamma, [a,b]) = \sup_{P \in \mathbb{P}([a,b])} \ell(\gamma, P) = \lim_{|P| \to 0} \ell(\gamma, P)$$

④ **FUNZIONE VARIAZIONE**

Sia $\gamma : [a,b] \to X, d$ continua con variazione limitata in c.

Allora:

$$\ell(\gamma, [a,x]) : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ e' CONTINUA in } c \in [a,b].$$

- OSS: $\phi : x \to \ell(\gamma, [a,x])$ e' STRETTAMENTE CRESCENTE

$\iff$ γ non e' localmente costante in alcun punto

- RIPARAMETRIZZAZIONE

Sia $\gamma : [a,b] \to X, d$ continua e mai localmente costante.

$\phi : x \longrightarrow \ell(\gamma, [a,x])$ omeomorfismo crescente

Si può riparametrizzare la curva ottenendo:

$$\ell(\gamma \circ \phi^{-1}, [a,x]) = x \qquad \forall x \in [a,b]$$

- DEF Curva derivabile

Sia $\gamma : [a,b] \to E, \|\cdot\|$ (spazio vettoriale normato $E, \|\cdot\|$),

γ e' DERIVABILE in $t_0 \in [a,b]$ $\iff$

$$\exists\, v \in E : \quad \gamma(t) = \gamma(t_0) + v(t-t_0) + o(t-t_0) \text{ per } t \to t_0$$

- TEOREMA del VALOR MEDIO per curve derivabili

Sia $\gamma \in C^0([a,b], E)$ derivabile in $]a,b[$. Allora:

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \sup_{a<c<b} \|\dot{\gamma}(c)\| \cdot (b-a)$$

- ADDENDUM: $\forall c \in [a,b]$

$$\Big| \|\gamma(b) - \gamma(a)\| - \|\dot{\gamma}(c)\| \cdot (b-a) \Big| \leq osc(\dot{\gamma}, [a,b])(b-a)$$

- FORMULA INTEGRALE per la lunghezza

Sia $\gamma : [a,b] \to E, \|\cdot\|$, $\gamma \in C^1([a,b], E)$. Allora:

$$\ell(\gamma, [a,b]) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(x)\|\, dx$$

- TEOREMA di CAUCHY

Sia $\gamma : [a,b] \to E, \|\cdot\|$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$.

Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$.

Inoltre, $\dot{g}(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Allora:

$$\left\| \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{g(b) - g(a)} \right\| \leq \sup_{a<x<b} \left\| \frac{\dot{\gamma}(x)}{\dot{g}(x)} \right\| \cdot (b-a)$$

- SVILUPPO di TAYLOR con stima Lagrange per curve

Sia $f : I \to E, \|\cdot\|$ con $I =]a,b[$.

Sia f derivabile n volte, $n+1$ volte in $y \in I$. Allora $\forall x \in I$:

$$\| f(x) - T_n(x,y) \| \leq \sup_{t \in I} \| f^{(n+1)}(t) \| \cdot \frac{|x-y|^{n+1}}{(n+1)!}$$

COMPATTEZZA secondo Heine-Borel

▸ **DEF** Ricoprimento aperto

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$. Un RICOPRIMENTO APERTO di C è una famiglia di aperti $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che:

$$C \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

▸ **DEF** Compattezza

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$. C si dice COMPATTO sse:

$$\forall \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ ricoprimento di } C, \ \exists F \subseteq \Lambda \text{ finito : } \quad C \subseteq \bigcup_{\lambda \in F} U_\lambda$$

• **PRINCIPIO di CANTOR**

Sia $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ una SUCCESSIONE decrescente (per $\supseteq$) di chiusi non vuoti. Se F_1 limitato, allora:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

• **PROPRIETÀ $\mathbb{R}$**

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. $\quad X$ compatto $\iff$ X chiuso e limitato

▸ **DEF** Insieme Trascurabile

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$. S è TRASCURABILE (o "negligibile") sse:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ ricoprimento aperto numerabile : } \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} |I_k| < \varepsilon \quad \wedge \quad S \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

• **PROPRIETÀ**

1) $S' \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$: $\quad S$ trascurabile $\Rightarrow S'$ trascurabile
2) $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ famiglia di trascurabili $\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ trascurabile
3) S trascurabile, $\phi : S \to \mathbb{R}$ Lipschitziana. $\Rightarrow \phi(S)$ trascurabile

- **DEF** Oscillazione

Sia $f: X \to \mathbb{R}$. L'OSCILLAZIONE di f su $U \subseteq X$ e':

$$\operatorname{osc}(f, U) := \sup_{x,y \in U} |f(x) - f(y)|$$

- **DEF** Oscillazione puntuale

Sia $f: X \to \mathbb{R}$. L'OSCILLAZIONE di f in $x \in X$ e':

$$\operatorname{osc}(f, x) := \inf_{\substack{U \ni x \\ U \text{ int.} x}} \operatorname{osc}(f, U)$$

- **PROPRIETA'**

Sia X, d spazio metrico, $f: X \to \mathbb{R}$.

1) f e' continua in $x_0 \in X \iff \operatorname{osc}(f, x_0) = 0$

2) dati: $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{osc}(f, x) < \lambda \iff \exists\, U \text{ int. } x : \operatorname{osc}(f, U) < \lambda$$

$\Rightarrow \{x \in X : \operatorname{osc}(f, x) < \lambda\}$ e' APERTO di X

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\{\operatorname{osc}(f, x) \geq \lambda\}$ e' CHIUSO in X

- **TEOREMA di LEBESGUE - VITALI**

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

f e' R-integrabile $\iff$ f e' limitata, quasi-continua*

(*) QUASI-CONTINUA: f discontinua in un insieme trascurabile di punti

- **PROP**

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, allora:

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx - \int_{*a}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{*b} \operatorname{osc}(f, x)\,dx$$

Funzioni Analitiche

▸ Serie di Potenze Complesse

Una serie di potenze a coefficienti complessi è:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{con } a_k \in \mathbb{C}$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è il CENTRO.

• Raggio di Convergenza

Definisco il RAGGIO di CONVERGENZA $R \in [0, +\infty]$:

$$R := \sup \{ r \geq 0 : \sup_{k \geq 0} |a_k| r^k < \infty \}$$

In particolare:

- $\forall \; 0 \leq |z - z_0| < R$, la serie CONVERGE ASSOLUTAMENTE
- $\forall \; R < |z - z_0|$, la serie DIVERGE

Chiamo inoltre DISCO di CONVERGENZA: $B(z_0, R)$

• Calcolo Raggio

- Se $\lim_{k \to +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ esiste, esso è RAGGIO di CONVERGENZA
- Sia R raggio di convergenza: [FORMULA CAUCHY-HADAMARD]

$$R^{-1} = \inf_{n \geq 0} \sup_{n \leq k} |a_k|^{1/k} = \max\lim_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k}$$

▸ Funzione della Serie

Sia $f : B(0, R) \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Allora:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

- OSS: $f(z) = O(1)$ per $z \to 0$

  In generale se $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$,

  $f(z) = O(1)$ per $z \to z_0$

- OSS: f è derivabile in z_0: $f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = a_1$

▸ Teorema del Cambio di Centro

Sia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k (z-z_0)^k$ con raggio di convergenza $R_0 > 0$.
Sia $z_1 \in B(z_0, R_0)$. Allora: esiste una serie di potenze per $f(z)$, con centro z_1, raggio di convergenza $R_1 \geq R_0 - |z_0 - z_1|$

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} b_k (z-z_1)^k \quad \text{con } b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1 - z_0)^{n-k}$$

• Conseguenza

Sia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k (z-z_0)^k$ con raggio di convergenza $R_0 > 0$.
Allora: $f(z)$ e' DERIVABILE $\forall z \in B(z_0, R_0)$ INFINITE VOLTE e

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \qquad \forall z \in B(z_0, R_0)$$

$\longrightarrow f$ OLOMORFA

In GENERALE:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\dots(n-k)\, a_n (z-z_0)^{n-k}$$

ovvero:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k} (z-z_0)^{n-k}$$

▸ Principio di Identita' delle Serie di Potenze

Siano due serie di potenze tali che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$$

allora $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

▸ FUNZIONE ANALITICA

• **DEF**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f e' ANALITICA se

$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists\ r>0,\ (a_k)_k \subset \mathbb{C} : \ B(z_0, r) \subseteq \Omega$ tale che
$\forall z \in B(z_0, r) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

▸ CONNESSIONE

- **DEF.** connessione

Uno spazio topologico X, τ e' CONNESSO se non e' unione di 2 aperti disgiunti e non vuoti.

• **PROP.** in $\mathbb{R}$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. $\quad X$ connesso $\iff$ X intervallo

• **PROP.** continuita'

Sia f continua. $\quad X$ connesso $\implies$ $f(X)$ connesso

- **DEF.** connessione per spezzate

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. A e' connesso per spezzate $\iff$

$\forall u, v \in A, \quad \exists$ sequenza $\{u = x_0, x_1, \dots, x_n = v\} \subset A$:
$\forall i = 1, \dots, n \qquad [x_{i-1}, x_i] \subset A$

• **PROP.** in $\mathbb{R}^2$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$. $\quad A$ connesso $\implies$ A connesso

• **PROP.**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto. $\quad A$ connesso $\iff$ A connesso per spezzate

• **TEOREMA del PRINCIPIO degli ZERI ISOLATI**

Sia f analitica, definita su $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso aperto.
Sia f non identicamente nulla. Allora:
$Z := f^{-1}(0) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ composto da PUNTI ISOLATI.

• **TEOREMA del PRINCIPIO del MASSIMO MODULO**

Sia f analitica, definita su $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso, f non costante.
Allora $|f(x)|$ non ha massimo in Ω.

- Corollario

Nelle stesse ipotesi del teorema:

z_0 punto di minimo per $|f(z)|$ $\iff$ $f(z_0) = 0$

- REGOLE di CALCOLO

1) Siano f, g funzioni analitiche su $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora:
   - $f + g$ analitica, $(f+g)(z) = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) z^k$
   - $f \cdot g$ analitica, $(f \cdot g)(z) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) z^k$

2) Sia f funzione analitica su Ω.

   $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists$ $f^{(k)}$ analitica

3) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f analitica su Ω.

   Sia $\Omega' = f(\Omega)$ aperto, g analitica su Ω'. Allora:

   $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ è analitica

   In particolare, se $(g \circ f)(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$ allora

$$c_k = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \nu \in \mathbb{N}_+^n \\ \sum \nu_i = n}} a_n \cdot b_{\nu_1} \cdot \ldots \cdot b_{\nu_n}$$

FORMULA di FAA' di BRUNO

- FORMULA di CAUCHY

Sia f olomorfa (derivabile in Ω), nel nostro caso analitica

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

Sapendo che vale $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, allora:

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-nit} \, dt \qquad \text{per } 0 < r < R$$

- STIMA di CAUCHY

Sia f analitica, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con $B(z_0, R) \subseteq \mathbb{C}$.

$\forall \, 0 < r < R$ $\quad |a_n| \leq \frac{1}{r^n} \|f\|_{\infty, B(z_0, R)}$

▸ **FUNZIONE INTERA**

DEF. Una funzione INTERA e' una funzione analitica f definita su tutto $\mathbb{C}$, ovvero $R = +\infty$.

• **TEOREMA di LIUVILLE**

Una funzione INTERA e LIMITATA e' costante.

▸ **FUNZIONI ANALITICHE REALI**

Sia $f: U \to \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto.

f e' ANALITICA REALE se localmente rappresentabile come serie di potenze.

• PROPRIETA' ("trasferibili")

- PRINCIPIO degli ZERI ISOLATI
- f ANALITICA $\Rightarrow$ $f \in C^\infty$

Non valgono PRINCIPIO MASSIMO MODULO, f derivabile $\Rightarrow$ f analitica.

▸ **TEOREMA ABEL sulle SERIE di POTENZE**

Sia una serie complessa convergente: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Si puo' allora considerare

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{con raggio convergenza } R \geq 1.$$

Allora: $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in A}} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

dove A e' l'"angolo di Stoltz":

$$A = A_C := \{ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 : |1 - z| \leq C \cdot (1 - |z|) \}$$

DECOMPOSIZIONE in FRAZIONI SEMPLICI

SCOPO: scrivere una funzione razionale $P/Q \in \mathbb{C}(z)$ come somma di frazioni semplici, nella forma $c/(z-\lambda)^k$.

- **RIDUZIONE a $\deg P < \deg Q$**

Usando la divisione euclidea, posso scrivere:

$$P = Q \cdot A + R \quad \text{con} \quad \deg R < \deg Q$$

Allora: $\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q}$

- **DECOMPOSIZIONE**

Suppongo $Q = Q_1 \cdot Q_2$ con Q_1 e Q_2 coprimi.

Allora per l'identità di Bezout:

$$\exists R_1, R_2 \in \mathbb{C}[z] : \quad R_1 \cdot Q_1 + R_2 Q_2 = 1$$

Allora: $\frac{P}{Q} = \frac{P(R_1Q_1 + R_2Q_2)}{Q_1Q_2} = \frac{P \cdot R_1}{Q_2} + \frac{P \cdot R_2}{Q_1}$

$\Rightarrow$ Dato che in $\mathbb{C}[z]$ posso scomporre Q:

$$Q = \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{\nu_i}$$

allora:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{(z-\lambda_i)^{\nu_i}}$$

- **FORMA ottenuta**

Unendo le 2 cose, $\frac{A_i}{(z-\lambda_i)^{\nu_i}} = \sum_{k \le \nu_i} \frac{c_{ik}}{(z-\lambda_i)^k}$

quindi:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ k \le \nu_i}} \frac{c_{ik}}{(z-\lambda_i)^k}$$

- **POLINOMIO TAYLOR**

Siano P, Q come prima. $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{C}[z]$. Definisco:

$$Q_i = \prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne i}} (z-\lambda_j)^{\nu_j} \qquad \text{da cui } Q = (z-\lambda_i)^{\nu_i} \cdot Q_i$$

Ma allora:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\substack{1 \le j \le r \\ k \le \nu_j}} \frac{A_j}{(z-\lambda_j)^k} \iff A_j = T_{\nu_j - 1}\left(z, \lambda_j, \frac{P}{Q_i}\right)$$