A

BASE delle MONOMIALI

- **DEFINIZIONE**

Sia $\lambda \vdash n$ partizione:

$$m_\lambda(x) := \sum_{\substack{\alpha \models n \\ \lambda(\alpha)=\lambda}} x^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \models n \\ \lambda(\alpha)=\lambda}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

> **PROPRIETÀ**

1) $m_{(1^n)} = e_n$

2) $m_{(n)} = p_n$

3) $h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$ C.1

4) $\hat{S}_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu \vdash |\lambda/\mu|} K_{\lambda/\mu,\nu}\, m_\nu$ F.1

5) $e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda,\mu}\, m_\mu$ $\quad M_{\lambda,\mu} = |\{A \text{ matrice}(0,1) \mid \text{row}(A)=\lambda,\ \text{col}(A)=\mu\}|$

6) $h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} N_{\lambda,\mu}\, m_\mu$ $\quad N_{\lambda/\mu} = |\{A \text{ matrice } \mathbb{N} \mid \text{row}(A)=\lambda,\ \text{col}(A)=\mu\}|$

B

BASE delle ELEMENTARI

- **DEFINIZIONE**

Sia $k \in \mathbb{N}$:

$$e_k(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \qquad (=: m_{(1^n)}(x))$$

Sia $\lambda \vdash n$:

$$e_\lambda(x) := e_{\lambda_1}(x) \cdot e_{\lambda_2}(x) \cdot \dots \cdot e_{\lambda_\ell}(x)$$

- **FUNZIONE GENERATRICE**

$$E(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n t^n$$

> **PROPRIETÀ**

1) $e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda,\mu} m_\mu$ con $M_{\lambda,\mu} = |\{A \ (0,1)\text{-matrici} \mid col(A) = \mu \ row(A) = \lambda\}|$

2) $E(t) = \prod_{i=1}^{k} (1 + x_i t)$

3) $H(t) \cdot E(-t) = 1 \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_i h_{n-i} = 0$ $\boxed{C.3}$
e tale base viene identificata da questa relazione.

4) La funzione $\omega: e_n \mapsto h_n$ è INVOLUZIONE: $\omega^2 = id$ $\boxed{C.4}$

5) $E(t) = \exp(-P(-t))$ $\boxed{D.1}$

6) $m e_m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} p_i e_{m-i}$ $\boxed{D.2}$

7) $e_m = \sum_{\lambda \vdash m} \frac{(-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}}{z_\lambda} p_\lambda \quad \Big\| \quad e_m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} sgn(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}$ $\boxed{D.4}$

8) $s_\nu e_\mu = \sum_{\substack{\lambda \supseteq \nu \\ |\lambda/\nu| = |\mu|}} K_{\lambda'/\nu', \mu} s_\lambda$ $\boxed{E.1}$

8') $s_\nu e_n = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda$ dove $\Lambda = \{\lambda$ tali che λ/ν vertical strip taglia $n\}$

9) $e_\mu = \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda', \mu} \hat{s}_\lambda$ $\boxed{F.6}$

C

Base delle Omogenee

- **Definizione**

Sia $k \in \mathbb{N}$:

$$h_k(x) := \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

Sia $\lambda \vdash n$:

$$h_\lambda(x) := h_{\lambda_1}(x) \cdot h_{\lambda_2}(x) \cdot \ldots \cdot h_{\lambda_\ell}(x)$$

- **Funzione Generatrice**

$$H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n t^n$$

> **Proprietà**

1) $h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$ $\boxed{A.3}$

2) $H(t) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x_i t}$

3) $H(t) \cdot E(-t) = 1 \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^n e_i h_{n-i} = 0$ $\boxed{B.3}$
e la base viene identificata da questa relazione.

4) La funzione $\omega : e_n \mapsto h_n$ e' un'INVOLUZIONE: $\omega^2 = id$ $\boxed{B.4}$

5) $H(t) = \exp(P(t))$ $\boxed{D.1}$

6) $m h_m = \sum_{i=1}^{m} p_i h_{m-i}$ $\boxed{D.2}$

7) $h_m = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda \quad \Big\| \quad h_m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} p_{\lambda(\sigma)}$ $\boxed{D.4}$

8) $h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} N_{\lambda,\mu} m_\mu \qquad N_{\lambda,\mu} = |\{A \text{ matrice } \mathbb{N} \mid row(A) = \lambda,\ col(A) = \mu\}|$

9) $h_\mu = \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda,\mu} \hat{S}_\lambda$ $\boxed{F.5}$

D

Base delle Power

- **Definizione**

Sia $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n(x) := \sum_{i=1}^{k} x_i^n \quad (= m_{(n)}(x))$$

Sia $\lambda \vdash m$:

$$p_\lambda(x) := p_{\lambda_1}(x) \cdot p_{\lambda_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_{\lambda_\ell}(x)$$

- **Funzione Generatrice**

$$P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \frac{t^n}{n!}$$

> **Proprietà**

1) $H(t) = \exp(P(t))$ e $E(t) = \exp(-P(-t))$ $\boxed{B.5}$ $\boxed{C.5}$

2) $m h_m = \sum_{i=1}^{m} p_i h_{m-i}$ e $m e_m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} p_i e_{m-i}$ $\boxed{B.6}$ $\boxed{C.6}$

3) La funzione $\omega : e_n \mapsto h_n$ è tale che:

$$\omega(p_n) = (-1)^{n+1} p_n \quad \text{e} \quad \omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)} p_\lambda$$

4) $h_m = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda$ e $e_m = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}}{z_\lambda} p_\lambda$ $\boxed{B.7}$ $\boxed{C.7}$

$$h_m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} p_{\lambda(\sigma)} \quad \text{e} \quad e_m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sgn}(\sigma)\, p_{\lambda(\sigma)}$$

5) $\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} \frac{p_\lambda(x)\, p_\lambda(y)}{z_\lambda}$ $\quad \prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)} \frac{p_\lambda(x) p_\lambda(y)}{z_\lambda}$

E

Base delle Schur

- **Definizione**

Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ tale che $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$. Definito

$$\sigma(x^\alpha) = x_1^{\alpha_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_{\sigma(k)}}$$

allora la FUNZIONE ALTERNANTE è:

$$a_\alpha(x) = \det\left(x_i^{\alpha_j}\right)_{i,j=1}^{k} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma(x^\alpha)$$

Dato $\delta = (k-1, k-2, \dots, 1, 0)$, $\alpha = \delta + \lambda$ con $\lambda \in Par$:

$$s_\lambda(x) := \frac{a_{\lambda+\delta}(x)}{a_\delta(x)}$$

> **Proprietà**

1) $$s_\nu e_\mu = \sum_{\substack{\lambda \supseteq \nu \\ |\lambda/\nu| = |\mu|}} K_{\lambda'/\nu', \mu}\, s_\lambda$$ B.8

1') $$s_\nu e_n = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda$$ dove $\Lambda = \{\lambda$ tale che λ/ν vertical strip taglia $n\}$

2) $$s_\lambda = \hat{s}_\lambda$$ F.7

3) $$s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i - i + j}\right)_{i,j=1}^{\ell} \qquad \left(\begin{array}{l} h_0 = 1 \\ h_k = 0 \quad \forall k<0 \end{array}\right)$$

4) $$s_\mu p_r = \sum_\lambda (-1)^{ht(\lambda/\mu)} s_\lambda$$
dove $|\lambda/\mu| = r$, λ/μ border strip.

5) $$s_\mu p_\alpha = \sum_{\substack{\lambda \supseteq \mu \\ |\lambda/\mu| = |\alpha|}} \chi^{\lambda/\mu}(\alpha)\, s_\lambda$$ dove $\chi^{\lambda/\mu}(\alpha) = \sum_T (-1)^{ht(T)}$
per T border strip tableau λ/μ, type α

5') $$p_\alpha = \sum_{\lambda \vdash |\alpha|} \chi^\lambda(\alpha)\, s_\lambda$$

6) Sia $f \in Sym^n[x]$. Allora $\langle f \cdot s_\mu, s_\lambda \rangle = \langle f, s_{\lambda/\mu} \rangle$

7) $$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_\lambda \hat{s}_\lambda(x)\, \hat{s}_\lambda(y)$$

8) $$\frac{1}{\prod_i (1 - x_i) \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)} = \sum_{\lambda \in Par} s_\lambda(x)$$

F

BASE delle SCHUR COMBINATORICHE

- DEFINIZIONE

Data una forma skew λ/μ:

$$\hat{S}_{\lambda/\mu}(x) := \sum_{T \in SSYT(\lambda/\mu)} x^T = \sum_{T \in SSYT(\lambda/\mu)} \prod_{i,j} x_{T_{i,j}}$$

> PROPRIETÀ

1) $\hat{S}_{\lambda/\mu}(x) = \sum_{\alpha \vDash |\lambda/\mu|} K_{\lambda/\mu,\alpha} x^\alpha = \sum_{\nu \vdash |\lambda/\mu|} K_{\lambda/\mu,\nu} m_\nu(x)$ A.4

2) $\prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_{\lambda \in Par} \hat{S}_\lambda(x)\hat{S}_\lambda(y)$

3) $\prod_{i,j} (1+x_i y_j) = \sum_{\lambda \in Par} \hat{S}_{\lambda'}(x)\hat{S}_\lambda(y)$

4) $\omega(\hat{S}_\lambda) = \hat{S}_{\lambda'}$

5) $h_\mu = \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda,\mu} \hat{S}_\lambda$ C.9

6) $e_\mu = \sum_{\lambda \vdash |\mu|} K_{\lambda',\mu} \hat{S}_\lambda$ B.9

MODULI di SPECHT

- LEMMA

Siano $T, \tilde{T}$ tableaux iniettivi di forma λ e $\tilde{\lambda}$ in modo che $\lambda \overset{R}{\leq} \tilde{\lambda}$.
Allora una delle due è verificata:

a) ci sono 2 numeri distinti nella stessa riga di $\tilde{T}$ e colonna di T.

b) $\exists\ \tilde{p} \in R(\tilde{T}),\ q \in C(T)$ tali che $\tilde{p}\tilde{T} = qT$ e $\lambda = \tilde{\lambda}$

DIM.

Supponiamo non valga (a). Allora data la prima riga di $\tilde{T}$, le sue entrate si trovano su colonne distinte di T.
Tramite un'azione $q_1 \in C(T)$, porto allora le entrate descritte alla prima riga di T.
Reiteriamo ora con tutte le righe di $\tilde{T}$, in modo che $q_2, q_3, \dots$ non permutino le entrate delle righe precedenti.
Allora, per costruzione, si ottiene che $\forall i:\ \lambda_i \geq \tilde{\lambda}_i$.
Dato che $\lambda \overset{R}{\leq} \tilde{\lambda} \implies \lambda = \tilde{\lambda}$.
Inoltre, $q = q_1 \cdot q_2 \dots \in C(T)$ fa in modo che qT abbia gli stessi elementi di $\tilde{T}$ sulle righe.

$\implies \exists\ \tilde{p} \in R(\tilde{T})$ tale che $q \cdot T = \tilde{p} \cdot \tilde{T}$. ■

- OSS.

Sia T un SYT. Allora per $p \in R(T)$ e $q \in C(T)$:

$$pT \geq T \qquad\qquad qT \leq T$$

- Corollario

Siano T e $\tilde{T}$ SYT tali che $\tilde{T} > T$. Allora vale la condizione (a) del LEMMA.

DIM. Dato che $\tilde{T} > T$, $T \overset{R}{\leq} \tilde{T}$, vale il lemma.
Supponiamo valga (b). Allora $\exists\ q \in C(T)$ e $\tilde{p} \in R(\tilde{T})$ tali che:

$$\tilde{T} \leq \tilde{p}\,\tilde{T} = qT \leq T \quad \text{, assurdo.}$$ ■

- YOUNG SYMMETRIZERS

$$a_T = \sum_{p \in R(T)} p \qquad\qquad b_T = \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q)\, q$$

$$c_T = a_T b_T$$

Possiamo allora definire:

$$v_T = b_T \cdot \{T\}$$

L'azione $\sigma \cdot \{T\} = \{\sigma \cdot T\}$ è ben definita per $b_T \cdot \{T\}$

- **OSS.**

1) $\forall\ p \in R(T),\ q \in C(T)$: $\quad p \cdot a_T = a_T \cdot p = a_T$

$\quad q \cdot b_T = b_T \cdot q = sgn(q)\, b_T$

2) $a_T a_T = |R(T)|\, a_T \qquad b_T b_T = |C(T)|\, b_T$

3) $\forall\ \sigma \in S_n$: $\quad \sigma b_T \sigma^{-1} = b_{\sigma T}$ e $\sigma a_T \sigma^{-1} = a_{\sigma T}$

$\Rightarrow \quad \sigma \cdot v_T = v_{\sigma T}$

- **DIM.**

1) $p \cdot a_T = p \cdot \sum_{r \in R(T)} r = \sum_{r \in R(T)} pr = \sum_{p' \in R(T)} p' = a_T$

e analog. per $q b_T = b_T\, sgn(q)$

2) $b_T \cdot b_T = \sum_{q \in C(T)} sgn(q)\, q\, b_T = \sum_{q \in C(T)} sgn(q)^2\, b_T = |C(T)|\, b_T$

3) $\sigma \cdot b_T \cdot \sigma^{-1} = \sigma \cdot \sum_{q \in C(T)} sgn(q)\, q \cdot \sigma^{-1} = \sum_{q \in C(T)} sgn(\sigma q \sigma^{-1})\, \sigma q \sigma^{-1} = \sum_{q' \in C(\sigma T)} sgn(q')\, q' = b_{\sigma T}$

In particolare:

$$\sigma \cdot v_T = \sigma b_T \cdot \{T\} = \sigma b_T \sigma^{-1}\, \sigma \cdot \{T\} = b_{\sigma T} \{\sigma T\} = v_{\sigma T}$$

- **LEMMA 2**

Siano T e $\tilde{T}$ tableaux iniettivi, $\lambda \overset{R}{\leq} \tilde{\lambda}$. Allora:
- se ci sono 2 elementi nella colonna di T stessa riga $\tilde{T}$ $\Rightarrow$ $b_T\{\tilde{T}\} = 0$
- altrimenti $b_T\{\tilde{T}\} = \pm v_T$

- **DIM.**

Per il lemma precedente, se siamo nel caso:

a) Siano i, j tali numeri. Allora consideriamo $t := (i, j)$ trasposizione.
Osservando che $t\{\tilde{T}\} = \{t\tilde{T}\} = \{\tilde{T}\}$, allora:

$$b_T\{\tilde{T}\} = b_T\{t\tilde{T}\} = b_T \cdot t \cdot \{\tilde{T}\} = -b_T\{\tilde{T}\} \quad \Rightarrow b_T\{\tilde{T}\} = 0$$

b) allora $\exists\ \tilde{p} \in R(\tilde{T})$ e $q \in C(T)$ tali che $qT = \tilde{p}\tilde{T}$.

$$b_T\{\tilde{T}\} = b_T \cdot \{\tilde{p}\tilde{T}\} = b_T\{qT\} = sgn(q)\, b_T\{T\} = sgn(q)\, v_T$$

- **Corollario**

Se $T, \tilde{T}$ SYT tali che $\tilde{T} > T$ allora $b_T\{\tilde{T}\} = 0$.

- **TEOREMA**

I moduli di Specht sono rappresentazioni irriducibili non isomorfe di S_n, al variare di $\lambda \vdash n$.

- **DIM.**

1) S^λ non sono banali, in quanto dato un tableau T, $v_T \neq 0$ (in quanto il termine $\{T\}$ compare nella sommatoria solo nell'identità).

2) Inoltre, non sono tra loro isomorfi. Dato T tableau di forma λ:

$$b_T \cdot S^\lambda = \mathbb{C}\, v_T \neq 0$$

ma per $\tilde{\lambda} \overset{R}{>} \lambda$:

$$b_T \cdot S^{\tilde{\lambda}} \subseteq b_T \cdot M^{\tilde{\lambda}} = 0 \quad \Rightarrow \text{per il lemma 2}$$

Per cui, dato che $\overset{R}{\leq}$ è relazione d'ordine totale, S^λ ed $S^{\tilde{\lambda}}$ non isomorfi $\forall \lambda \neq \tilde{\lambda} \vdash n$.

3) S^λ sono IRRIDUCIBILI. Supponiamo che $S^\lambda = V \oplus W$ come S_n-rappresentazioni. Allora:

$$\mathbb{C} \cdot v_T \overset{\star}{=} b_T \cdot S^\lambda = b_T V \oplus b_T W$$

In particolare, supponiamo che $v_T = v + w$ con $v \in V$, $w \in W$. Allora:

$$b_T \cdot v_T = b_T \cdot b_T \cdot \{T\} = |C(T)| \, b_T \{T\} = |C(T)| \, v_T \neq 0$$

da cui segue che

$$b_T \cdot v_T = b_T v + b_T w \neq 0$$

Supponiamo allora che $b_T v \neq 0$. Dato $b_T V \subseteq \mathbb{C} v_T$, $b_T v$ è multiplo di v_T
$\Rightarrow$ V deve contenere il modulo generato da v_T, cioè S^λ (per $\star$).
$\Rightarrow$ $V = S^\lambda$, S^λ è irriducibile.

4) Notiamo che $|\{S_\lambda \mid \lambda \vdash n\}| = |\{\text{classi coniugio di } S_n\}|$, quindi le rappresentazioni irriducibili trovate sono tutte.

BASE di S^λ

▸ TEOREMA

Dato $\lambda \vdash n$, $\{v_T \mid T \text{ è SYT di forma } \lambda\}$ è una base per S^λ.

· DIM.

La dimostrazione si divide in 2 parti, A / B.

A) $\{v_T \mid T \in SYT(\lambda)\}$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

Per dimostrare questa proposizione, definiremo un'ordine parziale sui tabloid.

• COMPOSIZIONE DEBOLE

Definiamo la composizione debole $\alpha \vDash n$ come $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ tale che

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$$

Vi poniamo il dominance order: $\alpha, \beta \vDash n$, allora:

$$\alpha < \beta \iff \alpha_1 + \dots + \alpha_i < \beta_1 + \dots + \beta_i \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

• TABLOID PARZIALI

Definiamo il Tabloid Parziale $\{T\}^i$ di $\{T\}$ come il tabloid ottenuto da $\{T\}$ usando le sole entrate $\leq i$.

• ORDINE PARZIALE $\leq$

Siano $T, \tilde{T}$ tableau di stessa forma. Allora:

$$\{T\} \leq \{\tilde{T}\} \iff sh\{T\}^i \leq sh\{\tilde{T}\}^i \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

▸ LEMMA

Sia T un SYT, allora $\forall q \in C(T)$, $q \neq id$: $\{T\} \gneq \{q \cdot T\}$

PROPOSIZIONE

Il sottoinsieme $\{v_T \mid T \in SYT(\lambda)\}$ è formato da vettori indipendenti.

· DIM.

Sia $\sum_T \gamma_T v_T = 0$ con $\gamma_T \in \mathbb{C}$. Consideriamo $T \in SYT(\lambda)$ in modo che $\{T\}$ sia massimale secondo l'ordine parziale. Allora:

- $\{T\}$ compare in v_T nel solo termine $q = id$, altrimenti $\{qT\} \lneq \{T\}$
- sia $\tilde{T} \neq T$. Allora se $\{T\}$ comparisse in $v_{\tilde{T}}$: per $\tilde{q} \neq id$
$$\{T\} = \{\tilde{q}\tilde{T}\} \lneq \{\tilde{T}\} \quad \text{assurdo per massimalità di } \{T\}$$

$\Rightarrow \gamma_T = 0$. Reiterando, $\gamma_T = 0 \quad \forall\, T \in SYT(\lambda)$, da cui l'indipendenza.

· Corollario

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2 \geq \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

B) $n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$

- Definiamo "aggiunta" e "rimozione":

$\mu \to \lambda$: μ si ottiene rimuovendo una cella da λ

$\mu \leftarrow \lambda$: μ si ottiene aggiungendo una cella a λ

PROPOSIZIONE

Sia $\mu \vdash n$. Allora:

$$(1) \quad \sum_{\nu \to \mu} f^\nu = f^\mu \qquad \text{e} \qquad (2) \quad \sum_{\lambda \leftarrow \mu} f^\lambda = (n+1) f^\mu$$

da cui segue che:

$$(3) \quad n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

· DIM.

(1) $f^\mu = |\{T \in SYT(\mu)\}|$. In particolare, suddividiamo per ogni cella del bordo (angoli) su cui può andare l'entrata n. Allora:

$$f^\mu = |\{T \in SYT(\mu)\}| \underset{\substack{\text{entrata } n \text{ corrisponde} \\ \text{a rimozione}}}{=} \sum_{\nu \to \mu} |\{T \in SYT(\nu)\}| = \sum_{\nu \to \mu} f^\nu$$

(2) Possiamo scrivere, per induzione:

$$(n+1) f^\mu = f^\mu + n f^\mu = f^\mu + n \sum_{\nu \to \mu} f^\nu$$
$$= f^\mu + \sum_{\nu \to \mu} n f^\nu = f^\mu + \sum_{\nu \to \mu} \sum_{\lambda \leftarrow \nu} f^\lambda$$

[sia r numero di $\nu \to \mu,\ \lambda \leftarrow \nu \mid \lambda = \mu$]

$$= f^\mu + r f^\mu + \sum_{\nu \to \mu} \sum_{\substack{\lambda \leftarrow \nu \\ \lambda \neq \mu}} f^\lambda$$
$$= (r+1) f^\mu \sum_{\nu \leftarrow \mu} \sum_{\substack{\lambda \to \nu \\ \lambda \neq \mu}} f^\lambda = \sum_{\nu \leftarrow \mu} \sum_{\lambda \to \nu} f^\lambda = \sum_{\nu \leftarrow \mu} f^\nu$$

e per il passo base, è banale: $\lambda = \emptyset$, $\mu = 1$. $\Rightarrow f^\mu = f^\lambda \cdot 1$.

(3) Usando i punti (1) e (2), si dimostra per induzione (3):

- PASSO BASE: $1 = \sum_{\lambda \vdash 1} (f^\lambda)^2$
- PASSO INDUTTIVO:

$$\sum_{\lambda \vdash n+1} (f^\lambda)^2 = \sum_{\lambda \vdash n+1} f^\lambda \sum_{\nu \to \lambda} f^\nu$$

$$= \sum_{\lambda \vdash n+1} \sum_{\nu \to \lambda} f^\lambda f^\nu = \sum_{\nu \vdash n} \sum_{\lambda \leftarrow \nu} f^\lambda f^\nu$$

$$= \sum_{\nu \vdash n} f^\nu \sum_{\lambda \leftarrow \nu} f^\lambda = \sum_{\nu \vdash n} (n+1)(f^\nu)^2 = (n+1)\sum_{\nu \vdash n} (f^\nu)^2 = (n+1)!$$

■

Abbiamo allora concluso la dimostrazione del Teorema, in quanto

$$\sum_{\lambda \vdash n} |\{v_T \mid T \in SYT(\lambda)\}|^2 = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n! = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2$$

e data la disuguaglianza precedente (A) $\Rightarrow$ Vale l'uguaglianza di dimensione: $|\{v_T \mid T \in SYT(\lambda)\}| = \dim S^\lambda$.

■

ALGORITMO RSK

- **BUMPING ALGORITHM**

Sia $T \in SSYT(\lambda)$. Allora il bumping algorithm produce $\tilde{T} = T \leftarrow j$ dove $j \in \mathbb{N}$: ad ogni passo i-esimo, sostituisco nella i-esima riga:
- j con il termine $> j$ più a sinistra nella riga e riapplico alla riga $i+1$-esima il bump con l'elemento sostituito
- se j è il termine massimo nella i-esima riga, si pone una casella $\boxed{j}$ in fondo. L'algoritmo allora si ferma.

- **OSS:** $T \leftarrow j$ è ancora un SSYT
  - ↳ insertion path si muove a sinistra
  - ↳ per $j \leq k$: $I(T \leftarrow j)$ è strettamente a SX rispetto a $I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$

- **ALGORITMO RSK**

Sia A una $\mathbb{N}$-matrice a supporto finito. Ad essa è associata la PERM. GENER.

$$\omega_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots \\ j_1 & j_2 & \dots \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} i_1 \leq i_2 \leq \dots \quad \leftarrow \text{righe} \\ \text{se } i_r = i_s,\ r<s,\ j_r \leq j_s \leftarrow \text{colonne} \end{array}$$

Siano:

a) $(L(0), R(0)) = (\emptyset, \emptyset)$

b) al passo $k = 1, \dots, m$ ottengo:
- $L(k) = L(k-1) \leftarrow j_k$
- $R(k)$ si ottiene aggiungendo una cella con i_k in modo che
$$sh(L(k)) = sh(R(k))$$

si otterranno allora $(L, R) = (L(m), R(m))$.

$$A \equiv \omega_A \xrightarrow{RSK} (L, R)$$

- **TEOREMA**

L'algoritmo RSK è in realtà CORRISPONDENZA BIUNIVOCA:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \ \ \mathbb{N}\text{-matrici a} \\ \text{supporto finito} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{RSK} \left\{ \begin{array}{l} (L,R) \text{ tali che} \\ L,R \text{ SSYT di stessa forma} \end{array} \right\}$$

dove in particolare: $row(A) = type(R)$, $col(A) = type(L)$

[Da vedere che $R \in SSYT$ e che da (L,R) si ricava A]

- **IDENTITÀ di CAUCHY**

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_i} = \sum_{\lambda \in Par} \hat{s}_\lambda(x)\, \hat{s}_\lambda(y)$$

• DIM.

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_{i,j} \frac{1}{1-z_{ij}} = \prod_{i,j} (1 + z_{ij} + z_{ij}^2 + \dots)$$

Ma allora, consideriamo il singolo monomio:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots \, y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots = x^\alpha y^\beta$$

In particolare, esso si può ottenere ponendo, come già visto:

$$x^\alpha y^\beta = \prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{i,j}} = x^{\mathrm{row}(A)} y^{\mathrm{col}(A)} \quad \text{dove allora} \quad \begin{array}{l} \alpha = \mathrm{row}(A) \\ \beta = \mathrm{col}(B) \end{array}$$

Allo stesso tempo, il monomio $x^\alpha y^\beta$ appare in $\sum_{\lambda \in Par} \hat{s}_\lambda(x) \hat{s}_\lambda(y)$ un numero di volte pari alle coppie L, R di SSYT tali che

$$\mathrm{type}(L) = \alpha \qquad \mathrm{type}(R) = \beta$$

Ma RSK mette in BIGEZIONE $A \leftrightarrow (L,R)$ quindi i coefficienti dei monomi si UGUAGLIANO. ■

• Corollario

Dato che $\prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = u(x) v(y) \Rightarrow u, v$ basi ortonormali, allora:

$$\langle \hat{s}_\lambda, \hat{s}_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$$

► ALGORITMO RSK*

Analogo all'algoritmo RSK, dove il bumping algorithm $\leftarrow^*$ bumpa il primo numero $\geq j$.

► TEOREMA

L'algoritmo RSK* mette in corrispondenza:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \quad (0,1)\text{-matrici a} \\ \text{supporto finito} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{RSK^*} \left\{ \begin{array}{l} (L,R) \text{ tali che } L^T \text{ ed } R \text{ SSYT} \\ \text{con } sh(L^T) = sh(R) \,/\, \mathrm{row}(A) = \mathrm{type}(R) / \mathrm{col}(A) = \mathrm{type}(L) \end{array} \right\}$$

► IDENTITÀ di CAUCHY DUALE

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j) = \sum_{\lambda \in Par} \hat{s}_{\lambda'}(x) \hat{s}_\lambda(y)$$

• DIM.

La molteplicità del termine $x^\alpha y^\beta$ si ottiene:

- ad SX: numero di matrici A $(0,1)$ a supporto finito, $\mathrm{row}(A) = \alpha$, $\mathrm{col}(A) = \beta$.
- a DX: numero di (L,R) con L^T, R SSYT, $\mathrm{type}(L^T) = \alpha$, $\mathrm{type}(R) = \beta$

$\Rightarrow$ l'algoritmo RSK* mette in BIGEZIONE questi elementi. ■

S_λ ed $\hat{S}_\lambda$: funzioni di Schur

- **OMEGA ed $\hat{S}_\lambda$**

$$\omega(\hat{s}_\lambda) = \hat{s}_{\lambda'}$$

· DIM.
Considero:

$$\sum_\lambda \hat{s}_\lambda(x)\,\omega_y(\hat{s}_\lambda(y)) = \omega_y\Big(\sum_\lambda \hat{s}_\lambda(x)\hat{s}_\lambda(y)\Big)$$
$$= \omega_y\Big(\sum_{i,j} \frac{1}{1-x_iy_j}\Big)$$
$$= \omega_y\Big(\sum_\lambda m_\lambda(x)\,h_\lambda(y)\Big)$$
$$= \sum_\lambda m_\lambda(x)\,e_\lambda(y) = \sum_{i,j}(1+x_iy_j)$$
$$= \sum_\lambda \hat{s}_{\lambda'}(x)\,\hat{s}_{\lambda'}(y)$$

$$\Rightarrow \hat{s}_{\lambda'}(y) = \omega(\hat{s}_\lambda(y))$$

- **IDENTITA' $e_\lambda/\hat{s}_\mu/h_\lambda$**

Data l'identità:

$$h_\lambda = \sum_{\mu\vdash n} K_{\lambda,\mu}\,\hat{s}_\mu$$

che si ottiene scrivendo: $h_\lambda = \sum_{\mu\vdash n} a_\mu \hat{s}_\mu$ e calcolando allora:

$$a_\mu = \langle h_\lambda, \hat{s}_\mu\rangle = \langle h_\lambda, \sum_\nu K_{\nu,\mu} m_\nu\rangle = \sum_\nu K_{\nu,\mu}\langle h_\lambda, m_\nu\rangle = K_{\lambda,\mu}$$

segue che applicando ω:

$$e_\lambda = \sum_{\mu\vdash n} K_{\lambda,\mu}\,\hat{s}_{\mu'} = \sum_{\mu\vdash n} K_{\mu',\lambda}\,\hat{s}_\mu \qquad \star$$

Ma visto in precedenza che

$$s_\mu e_\nu = \sum_{\substack{\mu\subseteq\lambda \\ |\lambda/\mu| = |\nu|}} K_{\lambda'/\mu',\nu}\, s_\lambda$$

cioè per $\lambda = \varnothing$:

$$e_\nu = \sum_\lambda K_{\lambda',\nu}\, s_\lambda \qquad ✡$$

Ora, essendo $(K_{\lambda,\mu})$ non singolare, vi può essere un'unica soluzione al sistema definito da $\star$ e ✡ :

$$\boxed{s_\lambda = \hat{s}_\lambda} \qquad \forall\, \lambda\vdash n$$

SCHUR e HALL PRODUCT

- **TEOREMA**

Per ogni $f \in Sym[X]$ vale:

$$\langle f s_\nu, s_\lambda \rangle = \langle f, s_{\lambda/\nu} \rangle$$

· DIM.

Data la definizione:

$$s_{\lambda/\mu}(x) = \sum_{T \in SSYT(\lambda/\mu)} x^T = \sum_{\nu \vdash n} K_{\lambda/\mu, \nu} m_\nu$$

e la relazione

$$s_\nu e_\mu = \sum_{|\lambda/\nu| = |\mu|} K_{\lambda'/\nu', \mu} s_\lambda$$

su cui applicando ω:

$$s_\nu \cdot h_\mu = \sum_{|\lambda/\nu| = |\mu|} K_{\lambda/\nu, \mu} s_\lambda$$

[Funziona su h_μ base quindi funziona $\forall f$]

Segue che:

$$\langle s_\nu \cdot h_\mu, s_\lambda \rangle = K_{\lambda/\nu, \mu} = \sum_\rho K_{\lambda/\nu, \rho} \langle h_\mu, m_\rho \rangle = \langle h_\mu, s_{\lambda/\nu} \rangle \quad \blacksquare$$

- **TEOREMA**

$$\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'}$$

· DIM.

$$\langle s_{\mu'} s_{\nu'}, s_{\lambda'} \rangle = \langle \omega(s_\mu s_\nu), \omega(s_\lambda) \rangle =$$

$$= \langle \omega(s_\nu), \omega(s_{\lambda/\mu}) \rangle = \langle s_{\nu'}, \omega(s_{\lambda/\nu}) \rangle$$

Da cui segue:

$$\langle s_{\nu'}, s_{\lambda'/\mu'} \rangle = \langle s_{\nu'}, \omega(s_{\lambda/\mu}) \rangle$$

- **COEFF. $C^\lambda_{\mu,\nu}$**

Si definiscono: $C^\lambda_{\mu,\nu} = \langle s_\mu s_\nu, s_\lambda \rangle = \langle s_\nu, s_{\lambda/\mu} \rangle$

COEFFICIENTI di LITTLEWOOD - RICHARDSON

IDENTITÀ di JACOBI - TRUDI

Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$. Allora:

$$S_\lambda = \det \left(h_{\lambda_i - i + j} \right)_{ij=1}^{\ell} \qquad \text{dove } h_0 = 1,\ h_k = 0 \ \forall\, k < 0$$

- DIM.

- Definisco un CAMMINO $p = s_1, s_2, \dots$ come una successione di passi N = nord / E = est su una griglia di punti $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. In particolare:

$$L(i) = \left| \{ \text{passi N che precedono } i\text{-esimo passo E} \} \right| + 1$$

Allora, definisco l'operazione di p su x:

$$x^p = \sum_i x_{L(i)}$$

da cui segue, per p cammini da (a,b) a $(a+n, b+k-1)$:

$$h_n(x_1, \dots, x_k) = \sum_p x^p$$

- Definisco la FAMIGLIA di CAMMINI $\mathcal{P}$ da $u_1, \dots, u_\ell$ a $v_1, \dots, v_\ell$ come

$$\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_\ell) \quad \text{dove} \quad u_i \xrightarrow{p_i} v_{\sigma(i)} \quad \text{per } \sigma \in S_\ell,\ \forall\, i = 1, \dots, \ell$$

che opera:

- $$x^{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^{\ell} x^{p_i}$$
- $$(-1)^{\mathcal{P}} = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

Fisso allora i vertici $u_i = (1-i, 0)$ per $i = 1, \dots, \ell$

$$v_i = (\lambda_i + 1 - i, k - 1)$$

Si ottiene che:

$$\det \left(h_{\lambda_i - i + j} \right)_{ij=1}^{\ell} = \sum_{\sigma \in S_\ell} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{\ell} h_{\lambda_{\sigma(j)} - \sigma(j) + j}$$

$$= \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} x^{\mathcal{P}} \qquad \text{con } \mathcal{P} : (u_1, \dots, u_\ell) \to (v_1, \dots, v_\ell)$$

Si consideri allora la seguente involuzione $i : \{\mathcal{P}\} \to \{\mathcal{P}\}$:

- se $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_\ell)$ non ha cammini che si intersecano, $i(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$
- altrimenti, considero i cammini p_i e p_j che danno l'intersezione più in basso ad est che indico $\bar{v}$. Allora se $p_i : u_i \xrightarrow{p_i'} \bar{v} \xrightarrow{p_i''} v_{\sigma(i)}$ e $p_j : u_j \xrightarrow{p_j'} \bar{v} \xrightarrow{p_j''} v_{\sigma(j)}$ considero $\tilde{p}_i : u_i \xrightarrow{p_i'} \bar{v} \xrightarrow{p_j''} v_{\sigma(j)}$ $\quad \tilde{p}_j : u_j \xrightarrow{p_j'} \bar{v} \xrightarrow{p_i''} v_{\sigma(i)}$

  La nuova famiglia $\mathcal{P}'$ con $\tilde{p}_i$ e $\tilde{p}_j$ ha permutazione $(i,j)\sigma$ e $x^{\mathcal{P}} = x^{\mathcal{P}'}$

  Pongo $i(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ (banale $i^2 = id$)

Inoltre: $(-1)^{\mathcal{P}} x^{\mathcal{P}} = -(-1)^{\mathcal{P}'} x^{\mathcal{P}'}$ quindi i termini in corrispondenza tramite i si annullano:

$$\det\left(h_{\lambda_i - i + j}\right)_{i,j=1}^{\ell} = \sum_{\mathcal{P}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, x^{\mathcal{P}} = \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ non} \\ \text{intersecting}}} x^{\mathcal{P}}$$

(per tali $\mathcal{P}$, $\sigma = id$ quindi $(-1)^{\mathcal{P}} = \mathrm{sgn}(id) = 1$).

Ora, bisogna mettere in corrispondenza $x^{\mathcal{P}}$ con i termini di s_λ.

Ma per costruzione, i cammini $p_1, \dots, p_\ell$ hanno $L(p_i)$ di lunghezza λ_i.

Inoltre le stringhe $L(p_i)$ sono debolmente decrescenti ed:

$$L(p_i)(j) < L(p_{i+1})(j) \qquad \forall i, j$$

per la proprietà di non-intersecting.

$\Rightarrow$ C'è una bigezione tra

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \text{ non intersecting con punti} \\ u_1, \dots, u_\ell \longrightarrow v_1, \dots, v_\ell \end{array} \right\} \longleftrightarrow SSYT(\lambda)$$

per cui

$$\sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ non} \\ \text{inters}}} x^{\mathcal{P}} = \sum_{T \in SSYT(\lambda)} x^T = s_\lambda$$

■

FROBENIUS

- **DEF.** Frob

Sia $CF^n = \mathbb{C}(S_n)$. Allora definisco:

$$\text{Frob} : CF^n \longrightarrow \text{Sym}^n[x]$$
$$f \longmapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}$$

e per identità note:

$$\text{Frob}(f) = \sum_{\lambda\vdash n} f(\lambda)\frac{p_\lambda}{z_\lambda}$$

- **PROP.** Frob è ISOMETRIA

$$\langle \text{Frob}(f), \text{Frob}(g)\rangle_{\text{Sym}^n[x]} = \langle f, g\rangle_{CF^n}$$

- **DIM.**

$$\langle \text{Frob}(f), \text{Frob}(g)\rangle = \sum_{\lambda\vdash n}\langle f(\lambda)\frac{p_\lambda}{z_\lambda}, \sum_{\mu\vdash n} g(\mu)\frac{p_\mu}{z_\mu}\rangle$$

prod. Hermitiano

$$= \sum_{\lambda\vdash n}\frac{f(\lambda)\overline{g(\lambda)}}{z_\lambda} = \langle f, g\rangle$$

■

PRODOTTO per CF

Definiamo $CF = \bigoplus CF^n$. Vogliamo definire un prodotto su CF.

Siano $f\in CF^n$ e $g \in CF^m$. Definiamo:

$$f\times g \in \mathbb{C}(S_n\times S_m) \quad \text{dove} \quad (f\times g)(u,v) = f(u)g(v)$$

A questo punto, $S_n\times S_m < S_{n+m}$ e allora:

$$f\circ g = \text{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}(f\times g) = \frac{1}{n!\,m!}\sum_{\substack{x\in S_{m+n}\\ x^{-1}ux\in S_m\times S_n}}(f\times g)(x^{-1}ux)$$

Inoltre, estendiamo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a CF ponendo per $n\neq m$, $f\in CF^n$ e $g\in CF^m$:

$$\langle f, g\rangle = 0$$

Per linearità, dato che $CF = \bigoplus_{n\geq 0} CF^n$ e $\text{Sym}[x] = \bigoplus_{n\geq 0}\text{Sym}^n[x]$ si estende

$$\text{Frob}: CF \longrightarrow \text{Sym}[x]$$

Allora si enuncia la proposizione seguente:

- **PROP.** Frob è isomorfismo di algebre

$$\text{Frob}(f\circ g) = \text{Frob}(f)\cdot\text{Frob}(g)$$

- **DIM.**

$$\text{Frob}(f\circ g) = \langle f\circ g, \Psi\rangle_{S_{n+m}} = \langle \text{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}(f\times g), \Psi\rangle_{S_{n+m}}$$

$$= \langle f \times g, \psi \rangle_{S_n \times S_m} = \sum_{(u,v)\in S_n\times S_m} \frac{1}{n!m!} f(u)g(v)\psi(uv)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{u\in S_n} f(u)\psi(u) \frac{1}{m!}\sum_{v\in S_m} g(v)\psi(v) = \mathrm{Frob}(f)\cdot \mathrm{Frob}(g)$$ ■

Frob e CARATTERI S_n

- Sia G gruppo, indichiamo $\mathbb{1}_G = \chi_{\square\square\square\square}$ il carattere della triviale.

Allora:

$$\mathrm{Frob}(\mathbb{1}_{S_n}) = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda = h_n$$

Inoltre, data la composizione $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ scriveremo:

$$S_\alpha = S_{\alpha_1} \times S_{\alpha_2} \times \dots \times S_{\alpha_\ell}$$

ed in particolare se $\alpha_1 + \dots + \alpha_\ell = n$:

$$\mathbb{1}_{S_\alpha}^{S_n} = \mathbb{1}_{S_{\alpha_1}}^{S_n} \circ \dots \circ \mathbb{1}_{S_{\alpha_\ell}}^{S_n} =: \eta^\alpha$$

Perchè Frob e' isomorfismo di algebre:

$$\mathrm{Frob}(\eta^\alpha) = h_\alpha = h_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot h_{\alpha_\ell} \qquad (1)$$

- CARATTERE VIRTUALE

Definiamo allora:

$$\psi^\lambda := \det\left(\eta^{\lambda_i - i + j}\right)_{i,j=1}^{|\lambda|}$$

Per l'osservazione (1):

$$\mathrm{Frob}(\psi^\lambda) = \det\left(h^{\lambda_i - i + j}\right)_{i,j=1}^{|\lambda|} = s_\lambda$$

quindi dato che Frob e' isometria:

$$\langle \psi^\lambda, \psi^\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} \Rightarrow$$ ψ^λ sono i caratteri irriducibili di S_n a meno del segno

- TEOREMA

Le class functions χ^λ del Teorema di Murnaghan-Nakayama sono i caratteri irriducibili di S_n.

- DIM.

Sappiamo che: $\mathrm{Frob}(\chi^\lambda) = \sum_{\mu\vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) p_\mu = s_\lambda$

Da cui segue che $\chi^\lambda = \psi^\lambda$, cioe' χ^λ e' carattere di irriducibili di S_n a meno del segno. Però osservo che:

$$\psi^\lambda((1^n)) = \chi^\lambda((1^n)) = f^\lambda > 0$$

per cui χ^λ sono i caratteri irriducibili di S^n. ■

TEOREMA di MURNAGHAN-NAKAYAMA

- DEF.

- Una forma λ/μ è CONNESSA se la "parte interna" della forma è connessa.
- Una BORDER STRIP è una forma λ/μ connessa tale che non compaia $\boxplus$.
- Un BORDER STRIP TABLEAU di forma λ/μ e tipo α è un tableau di forma λ/μ con numeri in ordine debolmente crescente per riga/colonna e in modo che la restrizione ai singoli numeri sia border strip.

- $ht(B)$ = # righe border strip -1
- $ht(T) = \sum_{B_i \text{ border strip}} ht(B_i)$

- TEOREMA

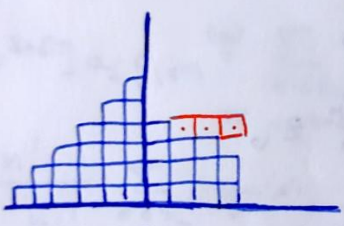
$$s_\mu \cdot p_r = \sum_{\lambda \vdash |\mu|+r} (-1)^{ht(\lambda/\mu)} s_\lambda$$

- DIM.

Moltiplicando per a_δ, si ottiene:

$$a_{\mu+\delta} \cdot p_r = \sum_{j=1}^{k} a_{\delta+\mu+r\varepsilon_j}$$

Ora, se si considera il diagramma:



rappresentare il termine: $a_{\mu+\delta+r\varepsilon_i}$ equivale ad aggiungere una riga di r celle alla i-esima riga.

Ci sono allora 2 casi:

a) ci sono 2 righe con stesso numero di celle: allora perché $a_{\mu+\delta+r\varepsilon_i}$ è alternante, il termine si deve cancellare

b) allora $a_{\mu+\delta+r\varepsilon_i} = (-1)^{ht(\lambda/\mu)} a_{\lambda+\delta}$ dove λ si ottiene riordinando in ordine crescente dal basso le righe sul diagramma: il segno si ottiene perché il riordinamento dei termini equivale alla permutazione degli indici di variabili.

In particolare, osserviamo che λ si ottiene da μ aggiungendo una border strip di taglia r. Ne segue proprio la tesi:

$$a_{\mu+\delta} \cdot p_r = \sum_{\lambda} (-1)^{ht(\lambda/\mu)} a_{\lambda+\delta}$$

■

TEOREMA di MURNAGHAN-NAKAYAMA

Sia $\mu \vdash n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_R)$:

$$s_\mu p_\alpha = \sum_{|\lambda/\mu| = |\alpha|} \chi^{\lambda/\mu}(\alpha)\, s_\lambda$$

dove in particolare

$$\chi^{\lambda/\mu}(\alpha) = \sum_T (-1)^{ht(T)}$$ dove T ha $sh(T) = \lambda/\mu$, $type(T) = \alpha$

· DIM.

Segue direttamente dal Teo precedente, dato che:

$$p_\alpha = p_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_{\alpha_R}$$

Corollario

Ponendo $\mu = \emptyset$:

$$p_\alpha = \sum_{\lambda \vdash |\alpha|} \chi^\lambda(\alpha)\, s_\lambda$$

PROP.

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu \vdash |\lambda/\mu|} \chi^{\lambda/\mu}(\nu) \frac{p_\nu}{z_\nu}$$

· DIM.

Scrivo $s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu \vdash |\lambda/\mu|} c_\nu^{\lambda/\mu} p_\nu$. Allora:

$$\chi^{\lambda/\mu}(\nu) = \langle s_\mu p_\nu, s_\lambda \rangle = \langle p_\nu, s_{\lambda/\mu} \rangle$$

$$= \sum_{\rho \vdash |\lambda/\mu|} c_\rho^{\lambda/\mu} \langle p_\nu, p_\rho \rangle = c_\nu^{\lambda/\mu} z_\nu$$

Hook Formula

- **DEF. Hook**

Sia T un tableau di forma λ. Sia c una cella di T, $c=(i,j)$. Allora definisco il numero di Hook come:

$$h(c) = \lambda_i - i + \lambda'_j - j + 1$$

ossia pari al numero di celle debolmente sopra o a dx di c.

- **TEOREMA Hook Formula**

Sia $\lambda \in Par(n)$. Allora:

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_c h(c)}$$

- **LEMMA 1** f^λ formula

Sia $\lambda \in Par(n)$. Dato $k \geq \ell(\lambda)$, definisco $\mu = \lambda + \delta$. Calcolo allora f^λ:

$$f^\lambda = \chi^\lambda((1^n)) \overset{\text{TR. M.N. ⊛}}{=} [x^{\lambda+\delta}]\, a_\delta\, p_{(1^n)}$$

⊛ Infatti sappiamo che:

$$\chi^\lambda(\alpha) = [x^{\lambda+\delta}]\, a_\delta\, p_{(1^n)}$$

dove $\delta = (k-1, k-2, \dots, 0)$

In particolare ricordiamo:

$$a_\delta = \det\left(x_j^{k-i}\right)_{i,j=1}^k = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k x_i^{k-\sigma(i)}$$

$$p_{(1^n)} = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{r_1+\dots+r_k=n} \frac{n!}{r_1! \dots r_k!}\, x_1^{r_1} \cdot \dots \cdot x_k^{r_k}$$

Ma allora:

$$f^\lambda = [x^{\lambda+\delta}]\, a_\delta\, p_{(1^n)} \overset{(*)}{=} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \forall i\ \mu_i - k + \sigma(i) \geq 0}} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (\mu_i - k + \sigma(i))!}$$

(*) $\mu_i = k - \sigma(i) + r_i \ \forall i$

cioè: $0 \leq r_i = \mu_i - k + \sigma(i)$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^k \mu_i!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\prod_{i=1}^k \mu_i!}{\prod_{i=1}^k (\mu_i - k + \sigma(i))!}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^k \mu_i!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k \mu_i(\mu_i - 1)\dots(\mu_i - k + \sigma(i) + 1)$$

$$= \frac{n!}{\prod \mu_i!} \det\left(\mu_i(\mu_i-1)\dots(\mu_i - k + j + 1)\right)_{i,j=1}^k$$

$$= \frac{n!}{\prod \mu_i!} \det\left(\mu_i^{k-j}\right)_{i,j=1}^k = \frac{n!}{\prod \mu_i!} \prod_{i<j} (\mu_i - \mu_j)$$

$$\Rightarrow f^\lambda = n! \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\mu_i - \mu_j)}{\prod_{i=1}^k \mu_i!}$$

- <u>LEMMA 2</u>

Sia come prima $\lambda \vdash n$, $k \geq \ell(\lambda)$ e $\mu = \lambda + \delta$. Vogliamo vedere che:

$$\prod_c h(c) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \mu_i!}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\mu_i - \mu_j)}$$

- <u>DIM.</u>

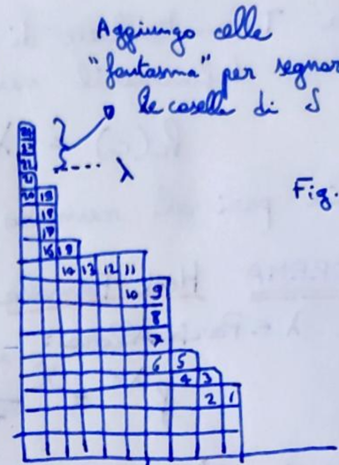


Fig. 1

Vogliamo vedere che:

$$\left(\prod_{c \in \lambda} h(c)\right)\left(\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\mu_i - \mu_j)\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu_i!$$

Fissiamo $i \in \{1, \dots, k\}$. Allora vogliamo vedere:

$$\left(\prod_{c \in \lambda_i} h(c)\right)\left(\prod_{i < j \leq k} (\mu_i - \mu_j)\right) = \mu_i!$$

In particolare, abbiamo 2 casi:

a) <u>$i > \ell(\lambda)$</u>, allora banalmente $\mu_i = k - i$ (perché $\lambda_i = 0$). Segue che:

$$\prod_{i < j \leq k} (\mu_i - \mu_j) = \prod_{i < j \leq k} (j - i) = (k-i)! \quad \text{come volevamo.}$$

b) <u>$i \leq \ell(\lambda)$</u>, allora partendo dalla cella più a DX della i-esima riga, numeriamo il bordo della forma λ in ordine crescente. Dimostreremo che questi numeri corrisponderanno proprio a ciò che cercavamo. Infatti per TAXI CAB, la numerazione va da 1 a μ_i:

$$\mu_i = \underbrace{\lambda_i}_{\text{cammino orizzontale}} + \underbrace{k - i}_{\text{cammino verticale}}$$

Ora, facciamo una divisione delle celle numerate:

1) le celle senza celle soprastanti contano proprio gli hook numbers delle celle alla riga i-esima, a loro sottostanti (sempre per TAXICAB)
2) le restanti celle ora sono una per ogni riga j-esima, $j > i$. In particolare, il numero su di esse è pari a:

$$\lambda_i - \lambda_j + k - i - k + j = \mu_i - \mu_j$$

Ma allora:

$$\left(\prod_{c \in \lambda_i} h(c)\right)\left(\prod_{i < j \leq k} (\mu_i - \mu_j)\right) = \mu_i!$$

■

- <u>DIM. Teorema</u>

Segue subito che:

$$f^\lambda = n! \frac{\prod \mu_i!}{\prod_{i<j} (\mu_i - \mu_j)} = \frac{n!}{\prod_c h(c)}$$

■

- **TEOREMA** (es. 7.4)

Sia $\lambda \vdash n$. Consideriamo la S_n-rappresentazione irriducibile V_λ tale che per il suo carattere χ_λ valga $\mathrm{Frob}(\chi_\lambda) = s_\lambda$.
Allora:

$$\mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_\lambda = \bigoplus_{\mu \leftarrow \lambda} V_\mu$$

- DIM.

Sia $\mu \vdash n-1$. Allora:

$$\begin{aligned}
< \mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} \chi_\lambda , \chi_\mu > &= < \chi_\lambda , \mathrm{Ind}^{S_n}_{S_{n-1}} \chi_\mu > \\
&= < \chi_\lambda , \mathrm{Ind}^{S_n}_{S_{n-1} \times S_1} \chi_\mu \times 1 > \\
&= < \chi_\lambda , \chi_\mu \circ 1 > \\
&= < \mathrm{Frob}\, \chi_\lambda , \mathrm{Frob}(\chi_\mu \circ 1) > = < \mathrm{Frob}(\chi_\lambda), \mathrm{Frob}(\chi_\mu) \mathrm{Frob} \\
&= < \mathrm{Frob}\, \chi_\lambda , \mathrm{Frob}\, \chi_\mu \cdot \mathrm{Frob}\, 1 > \\
&= < s_\lambda , s_\mu \cdot h_1 > = < s_\lambda , \sum_{\nu \leftarrow \mu} s_\nu > \\
&= \sum_{\nu \leftarrow \mu} < s_\lambda , s_\nu > = \begin{cases} 1 & \mu \rightarrow \lambda \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}$$

Segue allora la tesi. ∎

ALGORITMO di HILLMAN-GRASSL

- **DEF.** Reverse Plane Partition

Sia λ una partizione, T un tableaux tale che le entrate siano debolmente crescenti sia in riga che colonna. Allora per
$$n = \sum_{(i,j)\in\lambda} T_{i,j}$$
vale che T e' una reverse plain partition di n, forma λ.

Indicheremo $T \in rpp_\lambda(n)$.

- **TEOREMA**

Considerato $\lambda \in Par$, vale che:
$$\sum_{n\geq 0} rpp_\lambda(n)\, x^n = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{1}{1-x^{h_{i,j}}}$$
con $h_{i,j}$ hook numbers per la forma λ.

- **DIM.**

Riscriviamo il termine a DX come:
$$\prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{1}{1-x^{h_{i,j}}} = \prod_{(i,j)\in\lambda} \left(1 + x^{h_{i,j}} + x^{2h_{i,j}} + x^{3h_{i,j}} + \dots\right)$$
In particolare la tesi equivale a vedere che:
$$rpp_\lambda(n) = [x^n] \prod_{(i,j)\in\lambda} \left(1 + x^{h_{ij}} + x^{2h_{ij}} + \dots\right)$$
$$= [x^n] \sum_{h_{i_1 j_1},\dots,h_{i_k j_k}} \left(x^{h_{i_1 j_1}} \cdot x^{h_{i_2 j_2}} \cdot \dots \cdot x^{h_{i_k j_k}}\right)$$
$$= \sum_{\substack{h_{i_1 j_1},\dots,h_{i_k j_k} \\ h_{i_1 j_1}+\dots+h_{i_k j_k}=n}} 1$$
per cui mi riduco a dimostrare che vi e' una bigezione:
$$T \in rrp_\lambda(n) \longleftrightarrow (h_{i_1 j_1},\dots,h_{i_k j_k}) \text{ tali che } h_{i_1 j_1}+\dots+h_{i_k j_k}=n$$

A] $T \to (h_{i_1 j_1},\dots)$

Definiamo un algoritmo che ad ogni passo modifica T, ottenendo:
$$T = T_0 \to T_1 \to \dots \to T_e = \text{tableaux di zeri}$$
dove ad ogni passo, definito un cammino p_i, passo da T_i a T_{i+1} sottraendo alle celle del cammino 1.

Descriviamo allora l'algoritmo che definisce tali cammini:

a1) La cella di partenza del cammino sarà la cella non nulla più a sudest. Sia essa (α_0, β_0).

a2) Se l'ultima cella è (α_j, β_j) allora definiamo:

$$(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}) = \begin{cases} (\alpha_j, \beta_j - 1) & \text{se } T_{\alpha_j, \beta_j} = T_{\alpha_j, \beta_j - 1} \\ (\alpha_j + 1, \beta_j) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a3) L'algoritmo si ferma quando non è più possibile proseguire (a2).

<u>OSS1</u>: il cammino p_i è definito in modo tale che T_{i+1} sia ancora una reverse plain partition di λ

<u>OSS2</u>: per Taxicab, il numero di passi del cammino p_i corrisponde al hook number di una cella: $|p_i| = h_{\alpha_0, \beta_f}$

Associato ad ogni passo $T_i \to T_{i+1}$ vi sarà quindi l'hook number $h_{i_i j_i}$ corrispondente a p_i: si ottiene

$$T \longrightarrow (h_{i_1 j_1}, h_{i_2 j_2}, \dots)$$

e per costruzione deve valere $\sum_{(i,j) \in \lambda} T_{i,j} = \sum_k h_{i_k j_k}$.

B] $(h_{i_1 j_1}, h_{i_2 j_2}, \dots) \to T$

Bisogna innanzitutto riordinare la sequenza di hook numbers. Vi è quindi un lemma:

<u>LEMMA 1</u>

Siano $h_{i'j'}$ e $h_{i''j''}$ hook numbers nella decomposizione di T. Allora $h_{i'j'}$ compare prima di $h_{i''j''}$ $\iff$ $i' < i''$ oppure $i' = i''$ e $j' \geq j''$

- <u>DIM Lemma</u>

L'ordine definito sui nodi è TOTALE. Allora basta l'implicazione $\Rightarrow$, poiché dalla contronominale seguirà $\Leftarrow$.

Inoltre, per transitività dell'ordine totale, basta considerare il caso in cui $h_{i'j'}$ è rimosso direttamente prima di $h_{i''j''}$, coi passi $T' \to T'' \to T'''$.

In particolare, dato che T'' ha entrate $\leq T'$, per scelta del punto iniziale vale sicuramente $i' \leq i''$.

Supponendo $i' = i''$, se per assurdo $j'' > j'$ vi è una cella:

$(s,t) \in p' \cap p''$ tale che $p'' \ni (s+1, t)$ e $p' \ni (s, t-1)$

Ma affinché $(s, t-1), (s,t) \in p'$, $T'_{s,t} = T'_{s,t-1}$. Ma allora, $T''_{s,t} = T''_{s,t-1}$, in contraddizione col fatto che $(s,t), (s+1,t) \in p''$.

$\square$

Ma allora, ordiniamo gli hook numbers secondo il lemma 1:

$$(h_{i_1 j_1}, \dots, h_{i_f j_f})$$

e bisogna ora ricreare un "reverse path" r_i per ricostruire dal tableau nullo il tableau T:

$$\text{tableau nullo} = T_f \to T_{f-1} \to \dots \to T_0 = T$$

Definiamo l'algoritmo per r_i, dove si aggiunge $h_{a,c}$ a T:

b1) La cella di partenza è la più a nord della colonna c.

b2) Sia $(i,j) \in r$. Allora:

$$\begin{cases} (i, j+1) \in r & \text{se } T_{i,j} = T_{i,j+1} \\ (i-1, j) \in r & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b3) L'algoritmo termina quando $(a, \lambda_a) \in r$.

Allora, per passare da $T_i \to T_{i-1}$ si sommano a T_i degli 1 in corrispondenza delle celle di r.

E' chiaro che questo è l'inverso dell'algoritmo di "decomposizione". Resta da vedere la buona definizione del punto (b3) dell'algoritmo.

<u>LEMMA 2</u>

Se r_k è il reverse path di $h_{i_k j_k}$, allora $(i_k, \lambda_{i_k}) \in r_k$.

• <u>DIM. Lemma</u>

Useremo l'induzione inversa su k.

- <u>$k = f$</u>: il percorso seguirà il "bordo" a nord/est: certamente si ottiene $(i_f, \lambda_{i_f}) \in r_f$.
- <u>$k < f$</u>: siano $r' = r_k$, $r'' = r_{k+1}$. Definite: $T' \xleftarrow[h_{i'j'}]{r_k} T'' \xleftarrow[h_{i''j''}]{r_{k+1}} T'''$ e per l'ordinamento dato ci sono 2 casi:
  - <u>$i' < i''$</u>: allora, la riga i'-esima è di soli zeri: con l'algoritmo si ottiene che reiterando $(i', \lambda_{i'}) \in r'$
  - <u>$i' = i''$</u>: allora $j' \geq j''$. Per l'argomento del lemma 1, il cammino r' sta a nordest rispetto a r'' $\Rightarrow$ se r'' arriva a $(i'', \lambda''_{i''}) = (i', \lambda_{i'})$ allora anche r' deve arrivarsi. □

Abbiamo allora definito la bigezione da cui segue la tesi. ■

- **ESEMPIO**

Sia $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 \\ \cline{1-1} 3 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$. Allora:

$$T_0 \xrightarrow{h_{1,1}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 \\ \cline{1-1} 2 & 2 & 3 \\ \cline{1-3} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{h_{11}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 \\ \cline{1-1} 1 & 2 & 3 \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{h_{2,3}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 \\ \cline{1-1} 1 & 2 & 2 \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{h_{2,2}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 \\ \cline{1-1} 1 & 1 & 1 \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{h_{2,1}} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 \\ \cline{1-1} 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = T_5$$

Ma allora

$$T \longrightarrow (h_{1,1}, h_{1,1}, h_{2,3}, h_{2,2}, h_{2,1})$$