

# **Elementi di Topologia Algebrica**

## **Appunti delle lezioni**

Sgubin Alessio

Lezioni di Filippo Callegaro - AA 2022-2023  
Aggiornato al: 29 settembre 2023



# Indice

<b>1</b>	<b>Categorie e Funtori</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Topologia Generale</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Complessi Algebrici</b>	<b>11</b>
3.1	Complessi Algebrici . . . . .	11
3.2	Successioni Esatte . . . . .	13
3.3	Omologia Singolare . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Mappe Omotope e Omotopie di Catene</b>	<b>21</b>
4.1	Successione di Mayer-Vietoris . . . . .	24
4.1.1	Applicazioni del Teorema di Mayer-Vietoris . . . . .	25
4.1.2	Grado di Mappe $S^n \rightarrow S^n$ . . . . .	27
4.2	Legame tra $H_1(X)$ e $\pi_1(X)$ . . . . .	29
4.2.1	Suddivisioni Baricentriche . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Omologia Relativa</b>	<b>39</b>
5.1	Teorema di Escissione . . . . .	39
5.2	Teorema di Separazione di Jordan-Brower . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Omologia di Grafi</b>	<b>47</b>
6.1	Omologia di Superfici Compatte . . . . .	50
6.1.1	Toro . . . . .	50
6.1.2	Piano Proiettivo . . . . .	50
6.1.3	Bottiglia di Klein . . . . .	51
6.1.4	Superfici compatte generiche . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Complessi CW</b>	<b>53</b>
7.1	Esempi di Complessi CW . . . . .	54
7.2	Proprietà Topologiche di Complessi CW . . . . .	55
7.3	Omologia Cellulare . . . . .	56
7.3.1	Calcolo delle mappe $d_n$ e $\varphi_n$ . . . . .	63
7.3.2	Proiettivo Reale . . . . .	64
<b>8</b>	<b>Omologia a coefficienti in un modulo</b>	<b>67</b>
8.1	Omologia a Coefficienti in $G$ . . . . .	67
8.2	Co-omologia a Coefficienti in $G$ . . . . .	69

---

8.3	Funtori Tor ed Ext . . . . .	70
8.4	Omologia e Co-omologia Relativa . . . . .	77
<b>9</b>	<b>Prodotto CUP in Co-omologia</b>	<b>79</b>
9.1	Approssimazione della Mappa Diagonale . . . . .	84
9.2	Caso relativo . . . . .	86
<b>10</b>	<b>Omologia di Varietà</b>	<b>89</b>
<b>11</b>	<b>Prodotto CAP</b>	<b>95</b>
11.1	Caso relativo . . . . .	96
<b>12</b>	<b>Co-omologia a Supporto Compatto</b>	<b>99</b>
<b>13</b>	<b>Gruppi di Omotopia</b>	<b>109</b>
13.1	Gruppi di Omotopia Relativa . . . . .	114
13.1.1	Applicazioni: Omotopia delle Sfere . . . . .	120
<b>14</b>	<b>Omotopia di CW-Complessi</b>	<b>123</b>
14.1	Approssimazione Cellulare . . . . .	129
<b>15</b>	<b>Invariante di Hopf</b>	<b>139</b>
15.1	Introduzione all'invariante . . . . .	139
15.2	Costruzione di $H(f)$ . . . . .	140

# Prefazione

Ho rielaborato in queste note i miei appunti del corso di Elementi di Topologia Algebrica, tenuto nell'AA 2022-2023 dal prof. Filippo Callegaro.

Sperando che possano tornare utili a chi si accinge alla grande fatica di dare quest'esame (o a chi vuole semplicemente godersi un bel viaggetto tra le basi della topologia algebrica), le pubblico online.

Per eventuali errori non esitate a contattarmi alla mail [a.sgubin@studenti.unipi.it](mailto:a.sgubin@studenti.unipi.it) perché lo so... sicuramente qualche cavolata mi sarà scappata!



# Categorie e Funtori

## Definizione 1.1 - Categoria

Una categoria  $C$  è data da:

- una classe di oggetti
- per ogni coppia ordinata  $(x,y)$  di oggetti definisco un insieme  $Hom(x,y)$  di morfismi con "dominio"  $X$  e "codominio"  $Y$
- per ogni tripla di oggetti  $(X,Y,Z)$  di oggetti una funzione di "composizione":

$$\begin{array}{ccc} Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) & \longrightarrow & Hom(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

che ha le proprietà:

- associativa:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- con identità:  $\forall X \exists 1_X$  tale che:  $\begin{cases} 1_X \circ f = f \\ g \circ 1_X = g \end{cases}$

## Osservazione 1.1

Non è detto che gli oggetti siano spazi e i morfismi siano funzioni.

## Definizione 1.2 - Categoria Piccola

Se la classe di oggetti è un insieme, la categoria si dice piccola.

## Esempio 1.2

Alcuni esempi di categorie sono:  $Top, Top_x, Gr, Ab, R$ .

## Esempio 1.3 - Poset

Sia  $X$  insieme parzialmente ordinato. Per  $x, x' \in X$ :

$$\text{hom}(x, x') = \begin{cases} (x, x') & x \leq x' \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora  $(X, <)$  è una categoria.

### Definizione 1.3 - Sottocategoria

Una sottocategoria  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  è tale che:

- oggetti di  $\mathcal{C}'$  sono oggetti anche di  $\mathcal{C}$ .
- $Hom_{\mathcal{C}'}(X', Y') \subset Hom_{\mathcal{C}}(X', Y')$  per ogni  $X', Y'$  oggetti di  $\mathcal{C}'$ .
- la composizione di  $\mathcal{C}'$  è la restrizione della composizione in  $\mathcal{C}$ .

### Definizione 1.4 - Sottocategoria Piena

Una sottocategoria si dice piena se  $Hom_{\mathcal{C}'}(X', Y') = Hom_{\mathcal{C}}(X', Y') \quad \forall X', Y' \in \mathcal{C}'$

### Definizione 1.5 - Funtores Covariante (Controvariante)

Date  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  due categorie, un funtores covariante (rispettivamente controvariante) è una funzione che:

- ad ogni oggetto  $X$  di  $\mathcal{C}$  associa  $T(X)$  oggetto di  $\mathcal{D}$
- ad ogni morfismo  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  associa  $T(f) : T(X) \rightarrow T(Y)$  (rispettivamente se è controvariante  $T(f) : T(Y) \rightarrow T(X)$ ) e  $T$  preserva identità e composizione.

### Definizione 1.6 - Equivalenza

Un morfismo se ha inversa destra e sinistra si dice equivalenza.

### Teorema 1.7

*Un funtores manda equivalenze in equivalenze.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è stata lasciata gentilmente al lettore come esercizio.  $\square$

### Definizione 1.8 - Trasformazione Naturale

Date  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  due categorie e  $F_1, F_2$  funtori tra  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  una trasformazione naturale  $\phi$  tra  $F_1, F_2$  è una funzione da oggetti di  $\mathcal{C}$  a morfismi di  $\mathcal{D}$  tale che per  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  il seguente diagramma (nel caso covariante) è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(Y) \\ \phi(X) \downarrow & & \downarrow \phi(Y) \\ F_2(X) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(Y) \end{array}$$

# Topologia Generale

Dati  $X_i$  spazi topologici tali che  $X_i \cap X_j$  è un insieme su cui  $X_i$  e  $X_j$  inducono la stessa topologia,  $X = \bigcup X_i$  che topologia ha?

**Definizione 2.1 - Topologia Debole**

Dato  $X = \bigcup X_i$  definiamo la topologia debole come quella dove:

$$C \subset X \text{ è chiuso se e solo se } C \cap X_i \text{ è chiuso } \forall i$$

**Esempio 2.1**

Posso dotare della topologia debole i seguenti spazi:

$$\begin{aligned} S^\infty &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n & \mathbb{R}^\infty &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}P^\infty &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}P^n & \mathbb{C}P^\infty &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}P^n \end{aligned}$$

**Definizione 2.2 - Topologia Compattamente Generata**

Dato  $X$  spazio di Hausdorff, la topologia compattamente generata (dove  $X$  è uno spazio compattamente generato) è quella data dalla topologia debole generata dai suoi compatti.

**Definizione 2.3 - Topologia Compatto-Aperto**

Dati due spazi topologici  $X, Y$  chiamiamo topologia compatto-aperto nello spazio:

$$\{f : X \rightarrow Y \text{ continua}\}$$

la topologia che ha come prebase gli aperti:

$$\{f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subset U\}$$

con  $K$  compatto di  $X$  e  $U$  aperto di  $Y$ .

Valgono le seguenti proposizioni.

## 2. Topologia Generale

---

### Proposizione 2.4

Siano  $X$  spazio topologico localmente compatto e di Hausdorff,  $Y, Z$  spazi topologici. Allora

$Z \xrightarrow{f} Y^X$  è continua se e solo se  $Z \times X \rightarrow Y$  è continua

### Proposizione 2.5

$X$  localmente compatto e Hausdorff,  $Z$  Hausdorff,  $Y$  topologico. Allora:

$$(Y^X)^Z \rightarrow Y^{X \times Z}$$

è un omeomorfismo.

### Proposizione 2.6

Sia  $X$  spazio di Hausdorff e localmente compatto. Allora  $X$  è compattamente generato.

# Complessi Algebrici

## 3.1 Complessi Algebrici

In questo capitolo lavoreremo con  $R$ -moduli.

### Definizione 3.1 - $R$ -modulo

Sia  $R$  un anello commutativo con 1 unità. Considereremo la categoria degli  $R$ -moduli graduati  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$ . In particolare vi saranno:

- un oggetto  $M = \{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ovvero una famiglia di  $R$ -moduli
- un morfismo  $\varphi : M \rightarrow M'$  che è di grado  $p$  se si può definire  $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  famiglia di mappe:

$$\varphi_n : M_n \longrightarrow M'_{n+p}$$

con  $\varphi_n$  morfismo di  $R$ -moduli.

Definiamo la struttura particolare che ci interesserà ovvero:

### Definizione 3.2 - Complesso di Catene

Un complesso di catene  $C = \{C_n, \partial_n\}$  su  $R$  è un oggetto della categoria di  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  con un morfismo  $\partial : C \rightarrow C$  di grado  $-1$  e tale che  $\partial^2 = 0$ .

Scrivendo per esteso questa mappa, si ottiene:

$$\dots \longleftarrow C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} C_{n+2} \longleftarrow \dots$$

Chiameremo  $\partial$  mappa di bordo o differenziale.

### Osservazione 3.1

Richiedere che  $\partial^2 = 0$  equivale a dire che  $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq \text{ker } \partial_n$ .

### Definizione 3.3 - Morfismo di Complessi di Catene

Un morfismo di complessi  $\varphi$  è un morfismo  $\varphi : C \rightarrow D$  della categoria  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  di grado

0 e tale che commuti col bordo:

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & D_{n-1} \end{array}$$

### Definizione 3.4 - Omologia di Catene

Sia  $C$  un complesso di catene. Definisco l'omologia di  $C$  come  $H(C) = \{H_n(C)\}_{n \in \mathbb{N}}$  dove per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$H_n(C) = \ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

In particolare  $H_n(C)$  è detto l' $n$ -esimo gruppo di omologia.

### Osservazione 3.2

Un morfismo di complessi di catene  $\varphi : C \rightarrow D$  induce un morfismo di grado 0 tra gli  $R$ -moduli graduati:

$$H(\varphi) : H(C) \rightarrow H(D)$$

quindi la funzione  $H(\cdot)$  è un funtore dalla categoria dei complessi di catene su  $R$  alla categoria  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$ .

### Notazione 3.3

Useremo d'ora in poi le seguenti notazioni:

- elementi di  $C_n$ : sono le  $n$ -catene.
- elementi di  $\ker \partial_n$ : sono gli  $n$ -cicli. Indicheremo  $Z_n(C) = \ker \partial_n$ .
- elementi di  $\text{Im } \partial_n$ : sono gli  $n$ -bordi. Indicheremo  $B_n(C) = \text{Im } \partial_{n+1}$ .
- se due cicli rappresentano la stessa classe nel quoziente  $H(C)$ , allora si diranno omologhi.  
In particolare dato  $c \in Z_n(C)$ , indicheremo con  $[c]$  la sua classe quoziente in  $H_n(C)$ .

**Commento 1.** Vedremo che  $C$  complessi di catene sono strutture troppo ricche per essere studiate. Ad esempio vorremmo non distinguere  $C$  dalla catena  $C'$  dove ad esempio il bordo differisce per un segno  $-$ .

### Definizione 3.5 - Complesso di Co-catene

Un complesso di co-catene è una coppia  $C = \{C^n, \delta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con differenziale di grado  $+1$ :

$$\delta^n : C^n \longrightarrow C^{n+1}$$

In particolare chiameremo:

- $\delta^n$  il co-bordo.
- $C^n$  la co-catena.
- $H$  il morfismo di co-catene.

**Definizione 3.6 - Co-omologia di Co-catene**

La co-omologia è la famiglia  $H(C) = \{H^n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  dove i moduli di co-omologia sono:

$$H^n(C) = \ker \delta^n / \text{Im } \delta^{n-1}$$

**3.2 Successioni Esatte**

**Definizione 3.7 - Successione esatta di catene**

Siano  $A, B, C$  complessi di catene. La successione:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

si dice esatta corta se per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  lo sono le successioni:

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

**Teorema 3.8 - "Lemma del Serpente"**

Data una successione esatta di complessi di catene (o co-catene):

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

Allora esiste un morfismo di grado  $+1$  (o  $-1$  per le co-catene)  $\omega : H(C) \rightarrow H(A)$  tale che:

$$H(A) \xrightarrow{H(\varphi)} H(B) \xrightarrow{H(\psi)} H(C)$$



sia una successione esatta lunga di moduli.

*Dimostrazione.* Bisogna "seguire" il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\varphi_n} & B_n & \xrightarrow{\psi_n} & C_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{\psi_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-2} & \xrightarrow{\varphi_{n-2}} & B_{n-2} & \xrightarrow{\psi_{n-2}} & C_{n-2} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

per provare i seguenti punti:

1. si definisce  $\omega([\gamma])$  nell'unico modo possibile che il diagramma permette. Partendo da  $\gamma \in Z_n(C)$ , si trova un  $\alpha \in Z_{n-1}(A)$  e si pone:

$$\omega([\gamma]) = [\alpha]$$

2. si verifica la buona definizione, ovvero che  $[\alpha]$  non dipende dalle scelte fatte "percorrendo" il diagramma.

3. si verifica l'esattezza della successione esatta lunga ottenuta con  $\omega$ : esattezza in  $H(C)$ , in  $H(B)$  ed  $H(A)$ .

I dettagli sono stati lasciati al lettore: la dimostrazione si fa per "diagram chasing".  $\square$

#### Osservazione 3.4

La costruzione fatta con il Teorema rende il diagramma commutativo in omologia:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{\omega} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(B') & \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{\omega} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

#### Definizione 3.9 - Morfismi omotopi

Siano  $\varphi, \psi$  morfismi di complessi di catene. Un'omotopia  $\Sigma$  che manda  $\varphi \rightarrow \psi$  è un morfismo di grado +1:

$$\Sigma : C \longrightarrow D$$

tale che valga la relazione:

$$\varphi - \psi = \pm \partial \Sigma + \Sigma \partial$$

ovvero passando alle singole catene:

$$\varphi_n - \psi_n = \pm \partial_{n+1} \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \partial_n$$

In tal caso diciamo che  $\varphi$  e  $\psi$  sono omotopi.

#### Proposizione 3.10

Siano  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$  mappe omotope. Allora:

$$H(\varphi) = H(\psi) : H(C) \longrightarrow H(D)$$

*Dimostrazione.* Valutiamo la differenza:

$$(\varphi - \psi)(z) = \partial \Sigma(z) + \Sigma(\partial z)$$

Dato che siamo nel caso in cui  $[z] \in H(C)$ , allora  $z \in \ker \partial$  è un ciclo, quindi  $\partial z = 0$ :

$$\varphi(z) - \psi(z) = \partial \Sigma(z) + 0$$

ovvero le mappe differiscono per un bordo. Passando all'omologo:

$$H(\varphi)([z]) - H(\psi)([z]) = [\partial \Sigma(z)] = [0]$$

cioè  $H(\varphi) = H(\psi)$ .  $\square$

#### Esempio 3.5 - Contrazione

Siano  $\varphi = 0$  e  $\psi = Id : C \rightarrow C$ . Allora un'omotopia:

$$\Sigma : \varphi \rightarrow \psi$$

si dice contrazione per  $C$ . Se essa esiste, allora  $H(C) = 0$  cioè il complesso di catene  $C$  si dice esatto.

### 3.3 Omologia Singolare

**Definizione 3.11 - Simpleso Standard**

Definiamo l' $n$ -simpleso standard come:

$$\Delta^n = \Delta[n] = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0 \right\}$$

**Definizione 3.12 - Omologia Singolare**

Poniamo  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ . Una funzione debolmente crescente  $\alpha : [m] \rightarrow [n]$  induce una mappa<sup>a</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) : \Delta[m] &\longrightarrow \Delta[n] \\ \sum_{i=0}^m t_i e_i &\longmapsto \sum_{i=0}^n t_i e_{\alpha(i)} \end{aligned}$$

Con questa definizione,  $\Delta$  è un funtore:

- l'identità:  $\Delta(Id) = Id$
- la composizione:  $\Delta(\alpha \circ \beta) = \Delta(\alpha) \circ \Delta(\beta)$

<sup>a</sup>Indichiamo  $(e_0, \dots, e_n)$  la base standard di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Costruiamo ora le catene singolari. Definiamo la mappa:

$$\delta_i^n : [n-1] \longrightarrow [n]$$

come la mappa iniettiva e crescente che salta l'indice  $i$ . E' facile dimostrare che per  $i < j$  vale la seguente relazione:

$$\delta_j^{n+1} \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \delta_{j-1}^n$$

Definiamo  $d_i^n = \Delta(\delta_i^n)$ . Per funtorialità di  $\Delta$  vale che per  $i < j$ :

$$d_j^{n+1} d_i^n = d_i^{n+1} d_{j-1}^n$$

**Definizione 3.13 -  $n$ -simpleso singolare**

Dato lo spazio topologico  $X$ , definiamo l' $n$ -simpleso singolare come una mappa continua:

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$$

In particolare, individueremo l' $i$ -esima faccia di  $\sigma$  come  $\sigma \circ d_i^n$ .

**Definizione 3.14 -  $n$ -catena singolare**

Definiamo l'insieme  $C_n(X)$  dove  $X$  spazio topologico come il gruppo abeliano libero generato dagli  $n$ -simplessi singolari di  $X$ . Ogni suo elemento è della forma:

$$x = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma$$

con  $n_{\sigma} \in \mathbb{Z}$  tutti nulli tranne un numero finito.

Definiamo la mappa  $\partial$  che sarà la mappa di bordo come:

$$\begin{aligned} \partial_q : C_q(X) &\longrightarrow C_{q-1}(X) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ d_i^q \end{aligned}$$

quando  $q > 0$  e nulla per  $q \leq 0$ . Si dimostra (per esercizio) che  $\partial^2 = 0$ .

**Definizione 3.15 - Complesso di Catene Singolari di  $X$**

La coppia  $(C.(X), \partial)$  è un complesso di catene.

Indicheremo con  $H_n(X) = H_n(X, \mathbb{Z})$  l' $n$ -esimo gruppo di omologia del complesso di catene.

Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici induce un omomorfismo di complessi:

$$\begin{aligned} f_{\#} = C(f) : C_q(X) &\longrightarrow C_q(Y) \\ \sigma &\longmapsto f\sigma \end{aligned}$$

che induce a sua volta una mappa:

$$f_* = H(f) : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$$

dove  $H_q$  è un funtore da  $Top$  ad  $Ab$ .

**Definizione 3.16 - Complesso di Catene Relative**

Consideriamo una iniezione tra spazi topologici  $i : A \rightarrow X$ . Possiamo definire:

$$C_n(X, A) = \text{coker}(i_{\#} : C_n(A) \rightarrow C_n(X)) = C_n(X)/C_n(A)$$

che è sempre un gruppo abeliano libero. In particolare una sua base è data dalle classi di:

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X \quad \text{Im}(\sigma) \not\subseteq A$$

Inoltre, il bordo  $\partial$  di  $C.(X)$  induce un bordo  $\tilde{\partial}$  su  $C.(X, A) = \{C_n(X, A)\}$ . Quindi:

$$C.(X) \longrightarrow C.(X, A)$$

è una mappa di complessi. La catena di complessi  $C.(X, A)$  è chiamato complesso delle catene relative.

**Definizione 3.17 - Omologia relativa**

I gruppi di omologia del complesso delle catene relative  $C.(X, A)$  si indica:

$$H_n(X, A) = H_n(X, A; \mathbb{Z})$$

e si dicono gruppi di omologia relativa alla coppia  $(X, A)$ .

Data una mappa continua relativa di coppie:  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  tale che:

$$\begin{cases} f : X \longrightarrow Y \\ f(A) \subseteq B \end{cases}$$

induce un omomorfismo di complessi:

$$f_{\#} : C_q(X, A) \longrightarrow C_q(X, A)$$

che induce a sua volta una mappa:

$$f_* : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(X, A)$$

dove  $H_q$  è un funtore da  $Top^2$  ad  $Ab$ .

**Osservazione 3.6**

Per definizione, si vede subito che è una successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow C.(A) \longrightarrow C.(X) \longrightarrow C.(X, A) \longrightarrow 0$$

Segue da questa proprietà il seguente Teorema.

**Teorema 3.18**

Consideriamo una coppia  $(X, A)$ . Allora la successione:

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

è esatta lunga.

Vale di più: data una tripla  $(X, A, B)$  con  $B \subset A \subset X$  abbiamo che come prima:

$$0 \longrightarrow C.(A, B) \longrightarrow C.(X, B) \longrightarrow C.(X, A) \longrightarrow 0$$

è esatta corta e questo induce la successione:

$$\dots \longrightarrow H_n(A, B) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \dots$$

che è esatta lunga.

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema sulle successioni esatte corte. □

**Osservazione 3.7**

L'omomorfismo di connessione  $\partial$  del Teorema è naturale. Ovvero, se ho una mappa tra coppie  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  allora il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Vediamo ora come possiamo calcolare questi oggetti: certamente non in maniera diretta, quindi studiamo delle proprietà che ci permetteranno di fare i conti.

**Esempio 3.8 -  $X = \{p\}$**

In questo caso, vediamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vi è un unico  $n$ -simpleso singolare di  $X$  del tipo:

$$\Delta^n \longrightarrow X$$

ovvero la mappa costante. Ma allora i gruppi abeliani liberi sono tutti generati da un solo elemento, ovvero  $C_n(X) = \mathbb{Z}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Se consideriamo la successione esatta lunga, le mappe di bordo:

$$\begin{cases} \partial_{2m} \text{ sono isomorfismi} \\ \partial_{2m+1} = 0 \end{cases}$$

basterà infatti vedere ai nuclei e immagini delle mappe. Si ottiene quindi la successione:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots$$

quindi in particolare:

$$H_i(\{p\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

### Proposizione 3.19 - Additività

Siano  $\{X_j\}$  le componenti connesse per archi di  $X$ . Allora:

$$C_n(X, A) = \bigoplus_j C_n(X_j, A \cap X_j)$$

quindi in omologia:

$$H_n(X, A) = \bigoplus_j H_n(X_j, A \cap X_j)$$

### Esempio 3.9 - Componenti connesse di $X$

Vogliamo studiare il gruppo di omologia  $H_0(X)$  per uno spazio topologico  $X$ . Per la Proposizione precedente possiamo dividere lo studio alle sole componenti connesse per archi.

Siano  $p, q \in X$  punti connessi per archi. Definiamo allora gli 0-simplessi singolari:

$$\Delta^0 \xrightarrow{\sigma_p} p \quad \Delta^0 \xrightarrow{\sigma_q} q$$

Dato che vi è un arco che connette  $p$  e  $q$ , possiamo definire un 1-simplesso semplice:

$$\Delta^1 \xrightarrow{\tau} X$$

tale che  $\partial\tau = \sigma_p - \sigma_q$ . Ma allora:

$$H_0(X) = \mathbb{Z}_{\pi_0(X)}$$

Definiamo ora un altro strumento che sarà utile.

### Definizione 3.20 - Omologia Ridotta

Sia  $X \neq \emptyset$ . Allora scriviamo il complesso delle catene singolari definito come:

$$\dots \longrightarrow C_2(X) \longrightarrow C_1(X) \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dove definiamo la mappa di aumentazione  $\varepsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$  come:

$$\varepsilon \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i$$

Chiamo allora  $\tilde{H}_0(X)$  l'omologia ridotta del complesso aumentato. In particolare:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} = H_0(X) \\ \tilde{H}_n(X) = H_n(X) \quad \forall n > 0 \end{cases}$$



Capitolo **4**

# Mappe Omotope e Omotopie di Catene

**Definizione 4.1 - Omotopia**

Siano  $f, g : X \rightarrow Y$  mappe tra topologici. Sono omotope se esiste  $F : X \times I \rightarrow Y$  tale che:

$$\begin{cases} f(x) = F(x, 0) \\ g(x) = F(x, 1) \end{cases}$$

Vedremo come lavorare con i complessi di catene, per calcolare i gruppi di omologia di spazi contraibili nella prossima proposizione.

**Proposizione 4.2 - Spazi Contraibili**

Se  $X$  è uno spazio topologico contraibile, allora  $H_n(X) = 0$  per ogni  $n > 0$  e  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ .

*Dimostrazione.* Dato che  $X$  è contraibile, esiste una mappa di omotopia:

$$h : X \times I \longrightarrow X$$

tra le funzioni  $Id_X$  e  $X \rightarrow \{x_0\} \subset X$ . Definiamo una mappa:

$$\varepsilon = (\varepsilon_n) : C.(X) \longrightarrow C.(X)$$

tale che per ogni  $n > 0$  valga  $\varepsilon_n = 0$  e:

$$\varepsilon_0 \left( \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma \right) = \left( \sum_{\sigma} n_{\sigma} \right) \sigma_0$$

dove  $\sigma_0 : \Delta^0 \rightarrow \{x_0\}$ .

Vogliamo allora costruire l'omotopia di catene  $s$  tra le mappe  $Id$  e  $\varepsilon$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_1(X) & \longrightarrow & C_0(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \varepsilon_n \downarrow \downarrow Id & & \begin{matrix} \swarrow s_{n-1} \\ \varepsilon_{n-1} \downarrow \downarrow Id \end{matrix} & & & & \begin{matrix} \swarrow s_1 \\ \varepsilon_1 \downarrow \downarrow Id \end{matrix} & & \begin{matrix} \swarrow s_0 \\ \varepsilon_0 \downarrow \downarrow Id \end{matrix} & & \\ \dots & \longrightarrow & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_1(X) & \longrightarrow & C_0(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

#### 4. Mappe Omotope e Omotopie di Catene

---

Costruiamo intanto una mappa intermedia, omotopia in  $\Delta^n$  tra i sottospazi  $\{0\} \times \Delta^{n-1}$  e  $\{(1, 0, \dots, 0)\}$ :

$$q : \begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} \times I & \longrightarrow & \Delta^n \\ ((\mu_0, \dots, \mu_{n-1}), t) & \longmapsto & (t, (1-t)\mu_0, \dots, (1-t)\mu_{n-1}) \end{array}$$

Dato che per  $t = 1$  sia  $q$  che  $h$  mandano i loro domini ad un punto, vi è una mappa obbligata che per ogni  $\sigma \in \Delta^{n-1}$  che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} \times I & \xrightarrow{q} & \Delta^n \\ \downarrow \sigma \times Id & & \downarrow s(\sigma) \\ X \times I & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

cioè dev'esserci  $s(\sigma) : \Delta^n \rightarrow X$  tale che:

$$h \circ (\sigma \times Id) = s(\sigma) \circ q$$

Si verifica (x esercizio) che per le facce di  $s(\sigma)$  vale la proprietà:

$$\begin{cases} s(\sigma) \circ d_0 = \sigma \\ s(\sigma) \circ d_i = s(\sigma \circ d_{i-1}) \quad \forall i > 0 \end{cases}$$

dove ricordiamo che  $d_i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$  "salta" l' $i$ -esima coordinata. Questo implica che per:

- $n = 1$ : vale che:

$$\partial(s(\sigma)) = \sigma - \sigma_0$$

- $n > 1$ : vale che:

$$\partial(s(\sigma)) = s(\sigma)d_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s(\sigma)d_i$$

Si ottiene su tutti i gradi che  $\partial s - s\partial = Id - \varepsilon$ . Questa è la definizione di mappe omotope. Ma per come è stata definita  $\varepsilon$ , si ottiene proprio la tesi. Infatti per Proposizione precedente  $H(Id) = H(\varepsilon)$ , segue che  $H_n(X) = 0$  per ogni  $n > 0$  e  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ .  $\square$

#### Teorema 4.3

Mappe omotope inducono omomorfismi di catene omotopi e quindi inducono lo stesso omomorfismo in  $H_*$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo 2 mappe omotope  $f^0, f^1 : X \rightarrow Y$ . Definiamo la famiglia di funzioni:

$$\eta_X^t : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \times I \\ x & \longmapsto & (x, i) \end{array}$$

Allora possiamo considerare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow \eta_X^0 & & \nearrow \eta_X^1 & \\ & & X \times I & \xrightarrow{h} & \\ & \nearrow \eta_X^1 & & \searrow \eta_X^0 & \\ X & & & & Y \end{array}$$

*(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a square with  $X$  at the top-left and  $Y$  at the bottom-right. Curved arrows  $f^0$  and  $f^1$  connect  $X$  to  $Y$ . Straight arrows  $\eta_X^0$  and  $\eta_X^1$  connect  $X$  to  $X \times I$ . A straight arrow  $h$  connects  $X \times I$  to  $Y$ .*

Allora basta vedere che le mappe  $\eta_X^0$  e  $\eta_X^1$  inducono omomorfismi omotopi, cioè mappe omotope:

$$(\eta_X^0)_\# , (\eta_X^1)_\# : C.(X) \longrightarrow C.(X \times I)$$

Vediamo quindi il seguente lemma.

**Lemma 4.4**

Esiste un'omotopia di catene naturale<sup>a</sup> tra  $(\eta_X^0)_\#$  e  $(\eta_X^1)_\#$ .

<sup>a</sup>Ovvero vogliamo che le mappe continue commutino con questa omotopia.

*Dimostrazione.* Vogliamo creare un morfismo di catene:

$$s_n^X : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$$

tale che:

$$\partial s_n^X + s_{n-1}^X \partial = (\eta_X^1)_\# - (\eta_X^0)_\#$$

cioè  $s$  è l'omotopia di catene che cerchiamo. Inoltre, richiediamo la naturalità ovvero il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{s_n^X} & C_{n+1}(X \times I) \\ \downarrow f_\# & & \downarrow (f \times id)_\# \\ C_n(Y) & \xrightarrow{s_n^Y} & C_{n+1}(Y \times I) \end{array}$$

Ci basta in realtà studiare solo una specializzazione di questo diagramma, dove  $X = \Delta^n$ :

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta^n) & \xrightarrow{s_n^{\Delta^n}} & C_{n+1}(\Delta^n \times I) \\ \downarrow \sigma_\# & & \downarrow (\sigma \times id)_\# \\ C_n(X \times I) & \xrightarrow{s_n^X} & C_{n+1}(X \times I) \end{array}$$

Infatti se richiediamo che questo diagramma commuti, vediamo dove viene mandato l'elemento  $\iota_n \in C_n(\Delta^n)$ , con  $\iota_n : \Delta^n \xrightarrow{Id} \Delta^n$ . Questo identifica unicamente per naturalità l'immagine<sup>1</sup> di ogni  $\sigma \in C_n(X)$ :

$$\begin{array}{ccc} \iota_n & \xrightarrow{s_n^{\Delta^n}} & s(\iota_n) \\ \sigma_\# \downarrow & & \downarrow (\sigma \times id)_\# \\ \sigma & \xrightarrow{s_n^Y} & s(\sigma) := (\sigma \times id)_\# (s(\iota_n)) \end{array}$$

Quindi costruiamo induttivamente la mappa  $s^{\Delta^n}$  sui semplici:

- $n = 0$ : consideriamo un elemento  $\sigma : \Delta^0 \rightarrow \{x\} \subset X$ . Questo viene mandato in:

$$s_0(\sigma) : \begin{array}{ccc} \Delta^1 & \longrightarrow & X \times I \\ (t_0, t_1) & \longmapsto & (x, t_1) \end{array}$$

Si verifica subito che:

$$\partial(s_0\sigma) = (s_0\sigma)d_0 - (s_0\sigma)d_1 = \eta_X^1(\sigma) - \eta_X^0(\sigma)$$

quindi è un'omotopia di catene (1) ed è naturale (2).

<sup>1</sup>D'ora in poi, per alleggerire la notazione eviteremo alcuni indici, quando è scontato l'insieme in cui stiamo lavorando.

- $n > 0$ : supponiamo di aver definito  $s_k$  per  $0 \leq k < n$  in modo che soddisfi (1) e (2) per ogni  $X \in Top$ .  
Considero  $\iota_n \in C_n(\Delta^n)$ . Vogliamo costruire:

$$s_n^{\Delta^n}(\iota_n) : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \times I$$

in modo che una volta applicato il bordo  $\partial$  si ottenga:

$$\partial(s_n^{\Delta^n}(\iota_n)) = \eta_{\Delta^n}^1(\iota_n) - \eta_{\Delta^n}^0(\iota_n) - s_{n-1}^{\Delta^n} \partial(\iota_n) \quad (4.1)$$

Infatti, se dimostriamo che il termine a destra si annulla quando applichiamo  $\partial$ , ho concluso perchè allora c'è un elemento  $a \in C_{n+1}(X \times I)$ .

$$\begin{aligned} \partial(\eta_{\Delta^n}^1(\iota_n) - \eta_{\Delta^n}^0(\iota_n) - s_{n-1}^{\Delta^n} \partial(\iota_n)) &= \eta_{\Delta^{n-1}}^1(\partial\iota_n) - \eta_{\Delta^{n-1}}^0(\partial\iota_n) - \partial s_{n-1}^{\Delta^n} \partial(\iota_n) \\ &= \eta_{\Delta^{n-1}}^1(\partial\iota_n) - \eta_{\Delta^{n-1}}^0(\partial\iota_n) - (\eta_{\Delta^{n-1}}^1(\partial\iota_n) - \eta_{\Delta^{n-1}}^0(\partial\iota_n) - s_{n-2}(\partial\partial\iota_n)) \\ &= s_{n-2}(\partial\partial\iota_n) = 0 \end{aligned}$$

Quindi esiste l'elemento  $a$ , tale che:

$$\partial(a) = \eta_{\Delta^n}^1(\iota_n) - \eta_{\Delta^n}^0(\iota_n) - s_{n-1}^{\Delta^n} \partial(\iota_n)$$

Poniamo allora  $s_n(\iota_n) = a$ .

Per naturalità, dato  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  definiremo nel caso generale:

$$s_n(\sigma) = (\sigma \times Id)_{\#} a$$

Verifichiamo che questo soddisfa le proprietà. Vediamo che è omotopia di catene:

$$\begin{aligned} \partial s_n(\sigma) &= \partial(\sigma \times Id)_{\#} a = (\sigma \times Id)_{\#} \partial a \\ &= (\sigma \times Id)_{\#} (\eta^1(\iota_n) - \eta^0(\iota_n) - s_{n-1} \partial(\iota_n)) \\ &= \eta^1(\sigma) - \eta^0(\sigma) - s_{n-1} \partial\sigma \end{aligned}$$

Vediamo la naturalità:

$$(f \times Id)_{\#} s_n(\sigma) = (f \times Id)_{\#} (\sigma \times Id)_{\#} a = (f\sigma \times Id)_{\#} a = s_n(f\sigma) = s_n \circ f_{\#} \sigma$$

Questo conclude la costruzione dell'omotopia naturale cercata. □

Il risultato del Lemma conclude la dimostrazione. □

## 4.1 Successione di Mayer-Vietoris

Sia  $X$  uno spazio topologico che si può scrivere come unione di aperti  $X = A \cup B$ . Vogliamo collegare (sotto opportune ipotesi) tra di loro i gruppi di omologia di  $H(X)$ ,  $H(A)$ ,  $H(B)$  e  $H(A \cap B)$ .

Partiamo dalle solite mappe di inclusione tra questi spazi:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_*(A) & & \\ & i_* \nearrow & & \searrow k_* & \\ H_*(A \cap B) & & & & H_*(X) \\ & j_* \searrow & & \nearrow l_* & \\ & & H_*(B) & & \end{array}$$

Si possono allora considerare le seguenti mappe tra omologie:

$$\begin{aligned} \varphi : H_*(A \cap B) &\longrightarrow H_*(A) \oplus H_*(B) \\ x &\longmapsto (i_*(x), j_*(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : H_*(A) \oplus H_*(B) &\longrightarrow H_*(X) \\ (u, v) &\longmapsto k_*(u) - l_*(v) \end{aligned}$$

Arriviamo quindi al seguente risultato.

**Teorema 4.5 - Successione di Mayer-Vietoris**

Siano  $A, B$  aperti di  $X$  topologico tali che  $X = (intA) \cup (intB)$ . Allora esiste:

$$\Delta : H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B)$$

omomorfismo naturale tale che la seguente successione sia esatta:

$$\dots H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \dots$$

Se  $A \cap B \neq \emptyset$  allora la successione è esatta anche per l'omologia ridotta:

$$\dots \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \dots$$

Sia  $(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$  una coppia di spazi topologici tale che  $C \subset A$  e  $D \subset B$  e dove  $X = (intA) \cup (intB)$  e  $Y = (intC) \cup (intD)$ . Allora la successione esatta è:

$$\begin{array}{ccc} \dots H_n(A \cap B, C \cap D) & \xrightarrow{\varphi} & H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \\ & \searrow \psi & \\ H_n(X, Y) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(A \cap B, C \cap D) \dots \end{array}$$

*Dimostrazione.* Prossime lezioni vedremo la dimostrazione del teorema. □

**4.1.1 Applicazioni del Teorema di Mayer-Vietoris**

Calcoliamo per induzione i gruppi di omologia delle sfere  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ .

**Teorema 4.6 - Omologia ridotta di  $S^n$**

Vale la seguente relazione:

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } n = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Vediamo che vale la relazione per induzione su  $n$ :

- Passo Base: dato che  $S^0 = \{-1, 1\}$ , ovvero è l'unione di due punti disgiunti, abbiamo che i gruppi di omotopia sono tutti nulli tranne  $H_0(S^0) = \mathbb{Z}^2$ . Segue che  $\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$ .
- Passo induttivo: siano  $P = (0, \dots, 0, 1)$  e  $Q = (0, \dots, 0, -1)$ . Consideriamo gli aperti  $A = S^{n+1} \setminus \{P\}$  e  $B = S^{n+1} \setminus \{Q\}$ . Possiamo osservare che:
  1.  $A, B \simeq \mathbb{R}^n$  contraibile, quindi  $\tilde{H}(A) = \tilde{H}(B) = 0$ .
  2.  $A \cap B \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e si retrae su  $S^n$  quindi ha lo stesso gruppo di omologia.

Ma allora per il Teorema 4.5 segue che:

$$\tilde{H}_{i+1}(A) \oplus \tilde{H}_{i+1}(B) \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$$

è una successione esatta dove per le osservazioni (1) e (2) possiamo riscrivere:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n) \longrightarrow 0$$

quindi per esattezza  $\tilde{H}_{i+1}(X) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(S^n)$ , da cui la tesi. □

Vedremo ora delle conseguenze di questo Teorema. Indicheremo:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

**Proposizione 4.7**

$S^n$  non è contraibile ad un punto.

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che  $S^n$  ed un punto hanno omologie diverse. □

**Proposizione 4.8**

$D^{n+1}$  non si può retrarre ad  $S^n$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista una retrazione  $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ . Allora ci sarebbe il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{i} & D^{n+1} & \xrightarrow{r} & S^n \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & Id_{S^n} & \end{array}$$

Passando all'omologia ristretta, per funtorialità avremmo che  $Id_{\tilde{H}(S^n)} = \tilde{H}(r) \circ \tilde{H}(i)$ . Ma  $\tilde{H}(D^{n+1}) = 0$  mentre  $\tilde{H}(S^n)$  non è banale, assurdo. □

**Proposizione 4.9**

I gruppi di omologia relativa di  $(D^n, S^{n-1})$  sono:

$$H_i(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{per } i = n \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Uso la successione esatta data dall'omologia relativa (che continua a valere per la ristretta):

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_i(D^n) \longrightarrow H_i(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(D^n) \longrightarrow \dots$$

dove  $\tilde{H}_i(D^n) = \tilde{H}_{i-1}(D^n) = 0$ . Allora per esattezza della successione segue che:

$$H_i(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(S^{n-1})$$

ovvero la tesi. □

**Teorema 4.10 - Punto Fisso di Brower**

Qualsiasi mappa continua  $f : D^n \rightarrow D^n$  ha almeno un punto fisso.

*Dimostrazione.* Se per assurdo  $x \neq f(x)$  per ogni  $x \in D^n$ , si può costruire (nel solito modo) una retrazione  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ . Ma questo è assurdo per la Proposizione 4.8.  $\square$

**4.1.2 Grado di Mappe  $S^n \rightarrow S^n$**

**Definizione 4.11 - Grado**

Sia una mappa continua  $f : S^n \rightarrow S^n$ . Ad essa possiamo associare un intero  $d$  (almeno del segno) tale che:

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

è la moltiplicazione per  $d$  (ovvero  $d = f_*(1)$ ). L'intero  $d$  si dice grado di  $f$ .

**Definizione 4.12 - Sospensione**

Sia  $X$  uno spazio topologico. La sua sospensione è il quoziente:

$$\Sigma X = (X \times I) / \sim$$

dove si quozientano  $(x, 0) \sim (x', 0)$  e  $(x, 1) \sim (x', 1)$  per ogni  $x, x' \in X$ .

Data una mappa  $f : X \rightarrow Y$  continua, la sua sospensione è:

$$\begin{aligned} \Sigma f : \Sigma X &\longrightarrow \Sigma Y \\ [(x, t)] &\longmapsto [(f(x), t)] \end{aligned}$$

**Osservazione 4.1**

Vedremo ora diverse osservazioni importanti.

1. Se  $f_1$  è omotopa ad  $f_2$  allora hanno lo stesso grado.
2. Il grado di una composizione è il prodotto dei gradi.
3. Data  $f : S^n \rightarrow S^n$  allora  $f$  e  $\Sigma f$  hanno lo stesso grado.
4. La mappa  $id : S^n \rightarrow S^n$  ha grado 1.
5. La mappa costante ad un punto ha grado 0.
6. Una mappa  $f : S^0 \rightarrow S^0$  ha grado  $0, \pm 1$
7. La mappa  $f : S^n \rightarrow S^n$  riflessione rispetto ad un iperpiano passante per l'origine ha grado  $-1$ .
8. La mappa antipodale  $f : S^n \rightarrow S^n$  ha grado  $(-1)^{n+1}$ .
9. Presa una mappa  $f : S^n \rightarrow S^n$  senza punti fissi, essa ha grado  $(-1)^{n+1}$ .

*Dimostrazione.* Vediamo le dimostrazioni separatamente.

1. Segue dal fatto che l'omologia è un invariante omotopico.
2. Segue dalla functorialità dell'operatore di omologia.

3. Lasciato per esercizio.
4. La mappa  $id_*$  manda 1 nell'elemento 1.
5. La mappa indotta dall'omologia ha immagine banale, quindi il grado è 0.
6. Basta vedere i possibili casi (pochi, essendo  $S^0$  unione di 2 punti distinti).
7. Diamo un'idea della dimostrazione, fatta per induzione su  $n$ .  
Nel caso di  $S^0$  vediamo che il grado è proprio  $-1$ . Dato che i punti sono distinti, vi sono 2 possibili  $n$ -simplessi che indichiamo come  $e_1$  ed  $e_2$ : quello costante ad un punto o l'altro.

Vi è un'unica riflessione, data dalla moltiplicazione per  $f(x) = -x$ . Essa induce la mappa in omologia ridotta (sapendo che  $\tilde{H}(S^0) = \langle [e_1 - e_2] \rangle$  è generato da un elemento):

$$f_* : \begin{array}{ccc} \tilde{H}(S^0) & \longrightarrow & \tilde{H}(S^0) \\ [e_1 - e_2] & \longmapsto & [e_2 - e_1] = -[e_1 - e_2] \end{array}$$

Quindi il grado di  $f$  è proprio  $-1$ .

Vediamo ora il passo induttivo. Supponiamo che la tesi sia vera per  $S^n$ , cioè ogni riflessione  $f : S^n \rightarrow S^n$  ha grado  $-1$ . Osserviamo che  $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$ . Dato questo omeomorfismo che indichiamo  $g$ , è possibile definire ogni riflessione di  $S^{n+1}$  proprio come  $g \circ \Sigma f$ .

Per il punto (3),  $\Sigma f$  ha grado  $-1$  come  $f$ . Quindi pure  $g \circ \Sigma f$  ha grado  $-1$ .

8. La mappa antipodale si ottiene come composizione di  $n + 1$  riflessioni per iperpiani, quindi ha grado  $(-1)^{n+1}$  per il punto (2).
9. Dimostriamo che  $f$  è omotopa alla mappa antipodale, questo conclude.  
Dati infatti  $x \in S^n$  ed  $f(x) \neq x$ , è ben definito e unico l'equatore di  $S^n$  passante per  $x$  ed  $f(x)$ . Definiamo allora la mappa  $F(x, t)$  che "percorre" l'equatore da  $f(x)$  al punto  $-x$  (che si trova sempre su questo equatore) senza passare per  $x$  stesso. Così si ottiene un'omotopia di mappe tra  $F(x, 0) = f(x)$  ed  $F(x, 1) = -x$ . Questo conclude.

Abbiamo così dimostrato tutte le osservazioni. □

Infine, vi è un'ultima importante conseguenza.

#### **Teorema 4.13 - Non Pettinabilità**

Definiamo un campo tangente (non nullo) di  $S^n$  come una funzione  $f : S^n \rightarrow S^n$  tale che  $\forall x \in S^n$  vale  $\langle f(x), x \rangle = 0$ .

La sfera  $S^n$  ammette un campo tangente mai nullo se e solo se  $n$  è dispari.

*Dimostrazione.* Vediamo i due casi separatamente:

- $n$  dispari: definiamo un campo tangente valido nel seguente modo, per  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$v : (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \longrightarrow (x_2, -x_1, \dots, x_{n+1}, -x_n)$$

Con un rapido calcolo, si vede che per ogni  $x \in S^n$  è verificato  $\langle v(x), x \rangle = 0$ .

- $n$  pari: supponiamo che esista tale campo tangente  $v : S^n \rightarrow S^n$ , mai nullo. Allora posso costruire un'omotopia tra  $id_{S^n}$  ed una mappa senza punti fissi  $f_1 : S^n \rightarrow S^n$ . Definiamo:

$$f_t(x) = \frac{x + tv(x)}{\|x + tv(x)\|}$$

Per  $t = 0$  si ottiene  $t_0 = id_{S^n}$  e per  $t = 1$  si ottiene proprio  $f_1$  che non ha punti fissi, in quanto  $x$  e  $v(x)$  non sono multipli tra loro (anzi, sono perpendicolari).  
Per il punto (9) osservato precedentemente, il grado di  $f_1$  è  $-1$ , ma quello della mappa omotopa  $id_{S^n}$  è  $1$ . Assurdo.

Ho così la tesi. □

## 4.2 Legame tra $H_1(X)$ e $\pi_1(X)$

Ricordiamo che un 1-simplesso in  $X$  è una mappa:

$$\sigma : \Delta^1 \longrightarrow X$$

dove  $\Delta^1 = \{(t_0, t_1) \in [0, 1]^2 \mid t_0 + t_1 = 1\} \simeq I$ , ovvero è omeomorfo ad un segmento. Possiamo quindi identificare la mappa  $\sigma$  con una mappa:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \sigma(t, 1-t) \end{aligned}$$

Definiamo il cammino inverso come il cammino con verso di percorrenza opposto:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : \Delta^1 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1) &\longmapsto \sigma(t_1, t_0) \end{aligned}$$

Si possono comporre cammini  $\sigma, \tau$  se  $\sigma(1, 0) = \tau(0, 1)$  nel seguente modo:

$$(\sigma * \tau)(t_0, t_1) = \begin{cases} \sigma(2t_0 - 1, 2t_1) & \text{se } t_0 \geq \frac{1}{2} \\ \tau(2t_0, 2t_1 - 1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definiamo allora il 2-simplesso:

$$\begin{aligned} \omega : \Delta^2 &\longrightarrow X \\ (t_0, t_1, t_2) &\longmapsto (\sigma * \tau)(t_0 + \frac{t_1}{2}, t_2 + \frac{t_1}{2}) \end{aligned}$$

In questo modo, per costruzione segue che:

$$\partial\omega = \sigma - (\sigma * \tau) + \tau \tag{4.2}$$

Questo ci permette di definire una mappa che lega tra loro  $H_1(X)$  e  $\pi_1(X)$ :

$$\begin{aligned} h'' : \Gamma &\longrightarrow C_1(X) \\ \gamma &\longrightarrow \sigma \end{aligned}$$

dove  $\Gamma$  è l'insieme dei cammini continui  $I \rightarrow (X, x_0)$  e l'1-simplesso  $\sigma$  è definito  $\sigma(t_0, t_1) = \gamma(t_0)$ .  $h''$  è un omomorfismo in quanto la giunzione di cammini  $\gamma_1 * \gamma_2$ , questa per costruzione va nella giunzione  $\sigma_1 * \sigma_2$ . Passando in omologia l'equazione 4.2 si ottiene che  $[\sigma_1 * \sigma_2] = [\sigma_1] + [\sigma_2]$ . Quindi:

$$h'(\gamma_1 * \gamma_2) = h'(\gamma_1) + h'(\gamma_2)$$

come volevamo.

Vogliamo controllare che questa mappa sia ben definita ai quozienti. Consideriamo due cammini  $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$  omotopi. Dati  $k_1 = h''(\gamma_1)$  e  $k_2 = h''(\gamma_2)$ , sia  $k : \Delta^1 \times I \rightarrow X$  l'omotopia ad estremi fissi tra i cammini:

$$\begin{cases} k((t_0, t_1), 0) = k_0(t_0, t_1) \\ k((t_0, t_1), 1) = k_1(t_0, t_1) \end{cases}$$

Questa omotopia  $k$  si fattorizza passando per i 2-simplessi tramite  $q : \Delta^1 \times I \rightarrow \Delta^2$ .

Definiamo  $q$  collassando<sup>2</sup> il lato costante a  $x_1$  del "rettangolo"  $\Delta^1 \times I$  ad un punto. Così facendo, infatti, si ottiene un "triangolo" identificabile con  $\Delta^2$ .

Il diagramma della fattorizzazione è quindi:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 \times I & \xrightarrow{k} & X \\ \downarrow q & \nearrow \sigma & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

dove abbiamo ottenuto una mappa indotta  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$  tale che per costruzione:

$$\partial\sigma = x_0 - k_0 + k_1$$

Dato che il cammino costante  $x_0$  è nella classe banale, segue che passando in omologia  $[k_0] = [k_1]$ .

Possiamo definire la mappa che passa al quoziente:

$$\begin{array}{ccc} h' : \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & H_1(X) \\ [\gamma] & \longmapsto & [\sigma] \end{array}$$

#### Osservazione 4.2

Sappiamo che il gruppo  $H_1(X)$  è abeliano. L'omomorfismo  $h'$  però ha come dominio un gruppo che può essere non abeliano.

Ha senso quindi considerare il gruppo abelianizzato di  $\pi_1(X)$ :

$$\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} = \pi_1(X, x_0) / D\pi_1(X, x_0)$$

dove indicheremo la mappa di passaggio al quoziente ab.

Possiamo considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h'} & H_1(X) \\ \downarrow \text{ab} & \nearrow h & \\ \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} & & \end{array}$$

dove vediamo che è indotta dal passaggio al quoziente la mappa:

$$h : \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \longrightarrow H_1(X)$$

che è rilevante nel prossimo Teorema.

---

<sup>2</sup>Basandosi sul disegno fatto in classe, si disegna il "rettangolo" che raffigura l'omotopia ad estremi fissi  $k$ : il punto  $x_1$  si riferisce all'estremo fisso a tempo  $t = 1$ .

**Teorema 4.14**

Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi, allora la mappa  $h$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Costruiamo la mappa inversa per  $h$ . Per ogni  $x \in X$ , scegliamo un cammino  $u(x)$  che collega il punto  $x_0$  ad  $x$ .

Dato  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ , denotiamo i punti dello spazio  $X$  dati da:

$$\begin{cases} \sigma_0 = \sigma(1, 0) \\ \sigma_1 = \sigma(0, 1) \end{cases}$$

Definiamo quindi la mappa:

$$\begin{aligned} \ell' : C_1(X) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ \sigma &\longmapsto u(\sigma_0) * \sigma * \overline{u(\sigma_1)} \end{aligned}$$

che per linearità è ben definita. Vorremmo passare in omologia, quindi verificare che si può passare al quoziente.

Sia  $\tau : \Delta^2 \rightarrow X$  dove indichiamo le facce come:

$$\alpha = \tau \circ d_0 \quad \beta = \tau \circ d_1 \quad \gamma = \tau \circ d_2$$

Dato che  $\Delta^2$  è uno spazio contraibile, lo è la mappa  $\tau$ , quindi il percorso sul bordo di  $\Delta^2$  è omotopo alla costante, cioè in omotopia:

$$[\beta] = [\gamma * \alpha] = [\gamma] + [\alpha]$$

Ma allora segue che:

$$\ell'(\gamma) + \ell'(\alpha) = \ell'(\gamma + \alpha) = \ell'(\gamma * \alpha) = \ell'(\beta)$$

ovvero  $\ell'(\partial\tau) = \ell'(\gamma) + \ell'(\alpha) - \ell'(\beta) = 0$ . Segue che  $\ell'$  passa al quoziente rispetto ai bordi (ovvero l'insieme  $B_1(X)$ ) e si ottiene una mappa:

$$C_1(X)/B_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$$

In particolare, sappiamo che  $H_1(X) \subset C_1(X)/B_1(X)$  quindi restringendo la mappa  $\ell'$  al quoziente si trova:

$$\ell : H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$$

Per costruzione, vale l'identità  $\ell \circ h = id_{\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}}$  quindi  $h$  iniettiva. Per avere la tesi basta vedere che  $h$  è surgettiva.

Sia  $\sum_{\sigma} a_{\sigma} \sigma \in Z_1(X)$  un ciclo, per il quale cioè  $\partial \left( \sum_{\sigma} a_{\sigma} \sigma \right) = 0$ . Per costruzione della mappa bordo  $\partial$ , possiamo riscrivere:

$$\sum_{\sigma} a_{\sigma} (\sigma_1 - \sigma_0) = \partial \left( \sum_{\sigma} a_{\sigma} \sigma \right) = 0 \tag{4.3}$$

Ma allora l'elemento generico di  $H_1(X)$ :

$$\sum_{\sigma} a_{\sigma} [\sigma] \stackrel{(*)}{=} \sum_{\sigma} a_{\sigma} ([u(\sigma_0)] + [\sigma] - [u(\sigma_1)]) = \sum_{\sigma} a_{\sigma} [u(\sigma_0) * \sigma * \overline{u(\sigma_1)}]$$

sta in  $\text{Im } h$  perchè  $[u(\sigma_0) * \sigma * \overline{u(\sigma_1)}] \in \pi(X, x_0)^{\text{ab}}$ . Cioè  $h$  è surgettiva.

L'uguaglianza  $(*)$  segue dal fatto che dall'equazione 4.3 ogni 0-simplex (cioè ogni estremo dei cammini  $\sigma$ ) compare 2 volte con segni opposti (in modo da rendere la sommatoria 0). Quindi quando nella sommatoria  $(*)$  si aggiunge un  $[u(\sigma_0)]$  compare anche un termine  $[u(\overline{\sigma_0})]$ . Facendo la giunzione a coppie, questi hanno bordo 0.  $\square$

## 4.2.1 Suddivisioni Baricentriche

**Definizione 4.15 - Simpleso Affine**

Sia  $D \subset \mathbb{R}^n$  convesso. Dati i punti  $v_0, \dots, v_p \in D$  possiamo definire il simpleso affine di vertici  $v_0, \dots, v_p$  come:

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta^p &\longrightarrow D \\ \sum_{i=0}^p \lambda_i e_i &\longmapsto \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \end{aligned}$$

Indicheremo  $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ .

Notiamo che il bordo del simpleso affine sarà (nella notazione della definizione):

$$\partial[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p]$$

Inoltre per qualsiasi  $v \in D$  possiamo definire l'omotopia che è contrazione al punto  $v$  del simpleso:

$$\begin{aligned} D \times I &\longrightarrow D \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)x + tv \end{aligned}$$

Che passa ad un'omotopia di catene:

$$\begin{aligned} C_p(D) &\longrightarrow C_{p+1}(D) \\ \sigma = [v_0, \dots, v_p] &\longmapsto v \cdot \sigma = [v, v_0, \dots, v_p] \end{aligned}$$

Vediamo che per  $\sigma \in C_p(D)$  il bordo di  $v \cdot \sigma$  sarà:

$$\partial(v \cdot \sigma) = \begin{cases} \sigma - \varepsilon(\sigma)v & p = 0 \\ \sigma - v \cdot \partial\sigma & p > 0 \end{cases}$$

dove  $\varepsilon : C_0(D) \rightarrow \mathbb{Z}$  è la mappa di aumentazione.

**Definizione 4.16 - Suddivisione Baricentrica**

Definiamo il baricentro di  $\sigma \in C_p(D)$  come:

$$\sigma^\beta = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p v_i$$

Possiamo quindi definire le suddivisioni baricentriche ricorsivamente:

$$\begin{aligned} B_p(X) = B_p : C_p(X) &\longrightarrow C_p(X) \\ \sigma &\longmapsto \sigma \# B_p(\iota_p) \end{aligned}$$

dove  $\iota_p : \Delta^p \xrightarrow{Id} \Delta^p$  ed in particolare su questa mappa:

$$B_p(\iota_p) = \begin{cases} \iota_0 & p = 0 \\ \iota_p^\beta \cdot B_{p-1}(\partial\iota_p) & p > 0 \end{cases}$$

**Proposizione 4.17 - Mappa  $B_p$** 

La mappa  $B_p$  è una mappa di catene, naturale ed omotopa all'identità.

*Dimostrazione.* Vediamo le proprietà separatamente.

- la mappa  $B_p$  è naturale per costruzione:

$$f_{\#}B(\sigma) = f_{\#}\sigma_{\#}B(\iota_p) = (f\sigma)_{\#}B(\iota_p) = B(f\sigma) = Bf_{\#}(\sigma)$$

- la mappa  $B_p$  è mappa di catene, ovvero commuta col bordo. Dimostriamolo per induzione su  $p$ , nel caso di  $\iota_p$ :

- $p = 0$ : non c'è nulla da vedere, il bordo manda  $\iota_0$  in 0.
- $p = 1$ : vediamo che:

$$\partial B(\iota_1) = \partial \left( \iota_1^{\beta} \cdot B_0(\partial \iota_1) \right) = \partial \iota_1 = B(\partial \iota_1)$$

- $p > 1$ : vediamo che con l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} \partial B(\iota_p) &= \partial \left( \iota_p^{\beta} \cdot B(\partial \iota_p) \right) = B(\partial \iota_p) - \iota_p^{\beta} \cdot \partial B(\partial \iota_p) \\ &= B(\partial \iota_p) - \iota_p^{\beta} \cdot B(\partial^2 \iota_p) = B(\partial \iota_p) \end{aligned}$$

Per naturalità si conclude che questo vale in generale:

$$B(\partial \sigma) = B\partial(\sigma_{\#}\iota_p) = B\sigma_{\#}(\partial \iota_p) = \sigma_{\#}B(\partial \iota_p) = \sigma_{\#}\partial(\iota_p) = \partial\sigma_{\#}B(\iota_p) = \partial B(\sigma)$$

- la mappa  $B$  è omotopa all'identità. Questo seguirà direttamente dal Teorema 4.20.

Provato il Teorema 4.20, si conclude.  $\square$

**Definizione 4.18 - Funtore Libero**

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria e  $CH_*$  la categoria di complessi di catene di gruppi abeliani  $(C_n, d_n)$  dove  $C_n = 0$  per ogni  $n < 0$ . Consideriamo un funtore:

$$F_* : \mathcal{C} \longrightarrow CH_*$$

Il funtore  $F_*$  si dice libero se  $\forall n$  esiste una famiglia  $((B_{n,j}, b_{n,j}), j \in J(n))$  di oggetti (dove  $B_{n,j} \in \mathcal{C}$  e  $b_{n,j} \in F_n(B_{n,j})$ ) con la seguente proprietà.

Chiamando gli oggetti  $B_{n,j}$  modelli, vogliamo che per ogni  $X$  oggetto di  $\mathcal{C}$ :

$$\{F_n(f)(b_{n,j}) \mid \forall j \in J(n) \text{ e } \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B_{n,j}, X)\}$$

sia una base del gruppo abeliano libero  $F_n(X)$ .

**Esempio 4.3 - Caso dei Complessi di Catene**

Siano  $\mathcal{C} = \text{Top}$  ed  $F_n = C_n$ . Si può allora prendere la famiglia:

$$\{B_n, b_n\}_n = \{\Delta_n, \iota_n\}_n$$

Allora una base di  $C_n(X)$  sarà proprio  $\{\sigma : n - \text{simplexso singolare}\} = \{\sigma = \sigma_{\#}\iota_n\}$  come volevamo.

Quindi  $C$  è un funtore libero.

**Definizione 4.19 - Funtore Aciclico**

Nelle ipotesi della definizione precedente, il funtore:

$$F_* : \mathcal{C} \longrightarrow CH_*$$

si dice aciclico rispetto a modelli  $\{B_{n,j}\}$  se:

$$H_n(F_n(B_{n,j})) = 0 \quad \forall n > 0$$

**Teorema 4.20 - Teorema "Jolly"**

Siano  $F_*, G_* : \mathcal{C} \longrightarrow CH_*$  funtori tali che  $F_*$  è libero e  $G_*$  aciclico rispetto alla stessa famiglia di modelli per  $F_*$ . Allora:

1. per ogni trasformazione naturale  $\bar{\varphi}_0 : H_0 \circ F_* \longrightarrow H_0 \circ G_*$  esiste una trasformazione naturale  $\varphi : F_* \longrightarrow G_*$  che induce  $\bar{\varphi}$ .
2. due trasformazioni naturali  $\varphi$  e  $\psi$  con la proprietà di indurre la stessa mappa  $\bar{\varphi}$  sono omotope.

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  sono determinate per naturalità dalle loro immagini su  $F_n(f)(b_{n,j})$ . Definiamo ricorsivamente sul grado la mappa  $\varphi$ .

- Definiamo in grado 0 la mappa  $\varphi_0$  scegliendo per ogni  $b_{0,j}$  un elemento  $\varphi(b_{0,j})$  che è rappresentante della classe di omologia di  $\bar{\varphi}_0(b_{0,j})$ .
- Vogliamo che  $\varphi_i : F_i \rightarrow G_i$  sia una trasformazione naturale tale che per  $0 < i < n$ :

$$d_i^G \varphi_i = \varphi_{i-1} d_i^F$$

Consideriamo  $\varphi_{n-1} d_n^F b_{n,j} \in G_{n-1}(B_{n-1,j})$ . Vediamo che:

- $n = 1$ : questa è la classe nulla in omologia  $H_0$ . Infatti per ipotesi  $\bar{\varphi}_0([\partial\beta]) = [0]$ , quindi manda bordi in bordi. Facendo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{d_1^F} & F_0 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 \\ G_1 & \xrightarrow{d_1^G} & G_0 \end{array}$$

preso l'elemento  $b_{1,j}$ , si passa in  $F_0$  con il bordo e questo elemento viene mandato in un bordo di  $G_0$  tramite  $\varphi_0$ . Ma allora vi è un elemento  $c_{1,j} \in G_1$  che fa commutare il diagramma. Poniamo  $\varphi_1(b_{1,j}) = c_{1,j}$ .

- $n > 1$ : per induzione abbiamo che, facendo il bordo in  $G$ :

$$d_{n-1}^G (\varphi_{n-1} d_n^F b_{n,j}) = \varphi_{n-2} d_{n-1}^F d_n^F b_{n,j} = 0$$

quindi  $\varphi_{n-1} d_n^F b_{n,j}$  è un ciclo. Dato che  $G_*$  è aciclico,  $H_{n-1}(G_*(B_{n,j})) = 0$  ed esiste un elemento  $g_{n,j} \in G_n(B_{n,j})$  tale che:

$$d_n^G(g_{n,j}) = \varphi_{n-1} d_n^F b_{n,j}$$

Possiamo quindi definire  $\varphi(b_{n-1,j}) = g_{n,j}$  e quindi per costruzione questo commuta:

$$d_n^G \varphi_n = \varphi_{n-1} d_n^F$$

Questo ci dà la definizione di  $\varphi$  a partire da  $\bar{\varphi}_0$ .

Resta da costruire l'omotopia tra  $\varphi$  e  $\psi$ .

Siano  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  mappe costruite con il procedimento appena delineato. Allora vediamo che<sup>3</sup>:

$$\varphi_0(b_{0,j}) - \psi_0(b_{0,j}) = d_1^G(c_{1,j})$$

per qualche  $c_{1,j} \in G_1$ . Definiamo allora l'omotopia al grado 0 come:

$$\begin{aligned} s_0 : F_0 &\longrightarrow G_1 \\ b_{0,j} &\longmapsto c_{1,j} \end{aligned}$$

e per naturalità possiamo allora definire  $s_0$  su tutto  $F_0$  (dato che  $F_*$  è libero,  $b_{0,j}$  è base per  $F_0$ ).

Suppongo di aver definito per ricorsione  $s_i : F_i \rightarrow G_{i+1}$  per  $0 \leq i < n$ , in modo che:

$$d_{i+1}^G s_i + s_{i-1} d_i^F = \psi_i - \varphi_i$$

allora seguirebbe che:

$$d_n^G (\psi_n - \varphi_n - s_{n-1} d_n^F) = \psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - (\psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - s_{n-2} d_{n-1}^F d_n^F) = 0$$

Quindi, dato che  $G$  è aciclico, esiste  $c'_{n+1,j} \in G_{n+1}(B_{n+1,j})$  tale che:

$$d_{n+1}^G c'_{n+1,j} = (\psi_n - \varphi_n - s_{n-1} d_n^F) (b_{n,j})$$

e quindi è possibile definire  $s_n : F_n \rightarrow G_{n+1}$  in modo che  $s_n(b_{n,j}) = c'_{n+1,j}$  e per naturalità la costruzione ci dice che:

$$d_{n+1}^G s_n + s_{n-1} d_n^F = \psi_n - \varphi_n$$

che è la proprietà dell'omotopia di mappe. □

**Definizione 4.21 - Simpleso  $\mathcal{U}$ -piccolo**

Sia  $\mathcal{U}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  le cui parti interne ricoprono  $X$ . Allora un simpleso singolare è  $\mathcal{U}$ -piccolo se la sua immagine è tutta contenuta in qualche elemento di  $\mathcal{U}$ . Definiamo quindi i seguenti insiemi:

- $C^{\mathcal{U}}(X)$  il sottogruppo di  $C(X)$  generato dai semplici  $\mathcal{U}$ -piccoli<sup>a</sup>.
- $H^{\mathcal{U}}(X)$  l'omologia del complesso  $C^{\mathcal{U}}(X)$ .

<sup>a</sup> $C^{\mathcal{U}}(X)$  è un complesso di catene con la mappa di bordo indotta da  $C(X)$ , infatti se  $\sigma$  è  $\mathcal{U}$ -piccolo, anche il suo bordo lo è.

**Lemma 4.22 - Diametro**

Sia  $\Delta = [v_0, \dots, v_p]$  un  $p$ -simpleso affine. Il diametro (distanza massima tra punti del simpleso) di ogni simpleso di  $B(\Delta)$  è al più  $\frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione su  $p$ :

- $p = 0$ : in questo caso è ovvio, dato che il diametro dello 0-simpleso è 0.

<sup>3</sup>Gli elementi  $\varphi_0(b_{0,j})$  e  $\psi_0(b_{0,j})$  sono nella stessa classe in  $H_0$  dato che inducono la stessa mappa  $\bar{\varphi}$  in omologia.

- $p > 0$ : sia  $\Delta'$  un semplice di  $B(\Delta)$ . Uno dei suoi vertici per costruzione sarà  $b$  baricentro di  $\Delta$ , gli altri li denotiamo come  $\omega_1, \dots, \omega_p$ . Ci sono 2 possibilità per lo spigolo più lungo (e quindi per il diametro) di  $\Delta'$ :

- lo spigolo non contiene  $b$ . Allora sta in una faccia di  $\Delta$ : è spigolo di un  $p-1$ -simpleso della suddivisione della faccia di  $\Delta$ . Segue che, per ipotesi induttiva:

$$\text{diam}(\Delta') \leq \frac{p-1}{p} \text{diam}(\Delta) \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$$

- lo spigolo più lungo contiene  $b$ , supponiamo esso sia  $\overline{b\omega_1}$ . Osserviamo che  $\omega_1$  non può essere il baricentro della faccia di  $\Delta$ , per massimalità della lunghezza dello spigolo. Allora  $\omega_1$  è vertice di  $\Delta$ . Chiamiamo  $\Delta^1$  la faccia di  $\Delta$  che non contiene il vertice  $\omega_1$  e chiamiamo  $b_1$  il baricentro di  $\Delta^1$ . Allora:

$$b = \frac{1}{p+1}\omega_1 + \frac{p}{p+1}b_1$$

da cui segue che:

$$\text{diam}(\Delta') = \|\overline{b\omega_1}\| \leq \frac{p}{p+1} \|\overline{b_1\omega_1}\| \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$$

Questo conclude. □

#### Lemma 4.23

Sia  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  un  $p$ -simpleso singolare. Esiste un  $k \in \mathbb{N}$  tale che ogni semplice di  $B^k(\sigma)$  ha immagine in un elemento di  $\mathcal{U}$  ricoprimento fissato di  $X$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo il ricoprimento  $\{\sigma^{-1}(\text{int}(U)), U \in \mathcal{U}\}$  di  $\Delta^p$ . Prendiamo allora  $\varepsilon > 0$  numero di Lebesgue per questo ricoprimento. Basterà allora scegliere  $k \in \mathbb{N}$  tale che:

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^k \text{diam}[e_0, \dots, e_n] < \varepsilon$$

e questo conclude. □

#### Teorema 4.24

L'inclusione  $C^{\mathcal{U}}(X) \subset C.(X)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Vediamo che l'inclusione è una mappa iniettiva in omologia.

Se  $[a] \mapsto [0]$  allora esiste  $b \in C.(X)$  tale che  $\partial b = a$ . Inoltre per il Lemma precedente esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $B^k(b) \in C^{\mathcal{U}}(X)$ . Chiamando  $T_k$  l'omotopia tra le mappe  $B^k$  ed  $id$ , segue che:

$$B^k(b) - b = T_k(\partial b) - \partial T_k(b) = T_k(a) - \partial T_k(b)$$

dove gli elementi  $T_k(a)$  e  $\partial T_k(b)$  sono  $\mathcal{U}$ -piccoli. Passando ai bordi l'equazione sopra:

$$\partial B^k(b) - a = \partial T_k(a)$$

Quindi riarrangiando i termini, si trova che  $a$  è un bordo nelle catene  $\mathcal{U}$ -piccolo, ovvero  $[a] = 0$ .

Vediamo ora la surgettività: preso  $a \in C.(X)$  esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $B^k(a)$  è  $\mathcal{U}$ -piccolo. Si ottiene quindi che:

$$B^k(a) - a = T_k(\partial a) + \partial T_k(a)$$

che è un bordo. Quindi  $[B^k(a)] = [a]$  nell'omologia di  $C.(X)$ . □

**Lemma 4.25 - Lemma dei 5**

Consideriamo il diagramma di gruppi abeliani:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

che ha delle successioni esatte come righe ed è tale che:  $f_1$  surgettiva,  $f_5$  iniettiva,  $f_2, f_4$  isomorfismi.

Allora  $f_3$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Lasciato per esercizio. □

**Teorema 4.26**

L'inclusione  $i : C^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow C(X, A)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Scriviamo un diagramma di successioni esatte corte:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con cui si ottiene un diagramma di successioni esatte lunghe in omologia. Lì si può applicare il Lemma dei 5 al diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}$$

Segue quindi la tesi. □

Vedremo ora la dimostrazione del Teorema.

*Dimostrazione di Mayer-Vietoris.* Dato che  $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ , consideriamo il ricoprimento  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . Osserviamo allora che:

$$C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(B)$$

Quindi possiamo costruire la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow C(A \cap B) \longrightarrow C(A) \oplus C(B) \longrightarrow C^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

che induce la successione esatta lunga:

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

Ma sappiamo che  $H_n^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_n(X)$  e sostituendo con questo isomorfismo abbiamo la successione esatta lunga cercata. □

**Osservazione 4.4**

La mappa  $\Delta$  che deriva dalla costruzione della successione di Mayer-Vietoris è naturale.

**Osservazione 4.5**

La stessa costruzione vale in omologia relativa:

1. scriviamo l'analogo per il caso relativo della successione esatta corta.
2. usiamo il Teorema che ci dice  $C^u(X, A) \simeq C(X, A)$ .

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

# Capitolo 5

## Omologia Relativa

### 5.1 Teorema di Escissione

**Teorema 5.1**

Siano  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  omotope come mappe di coppie (ovvero per un'omotopia tale che  $F_0 = f$  e  $F_1 = g$  vale  $F_t(A) \subset B$  per ogni  $t \in I$ ).

Allora  $f$  e  $g$  inducono lo stesso omomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Partiamo dalle successioni esatte lunghe:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \begin{array}{c} f_* \downarrow \downarrow g_* \\ \downarrow \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} f_* \downarrow \downarrow g_* \\ \downarrow \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} f_* \downarrow \downarrow g_* \\ \downarrow \downarrow \end{array} & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

dove per ipotesi le coppie  $f_*$  e  $g_*$  in rosso sono uguali. Vorremmo usare una versione analoga al Lemma 4.25 dove dato il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
 \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow \varphi & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
 B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
 \end{array}$$

con le righe successioni esatte, segue che  $\varphi = 0$ .

Applicando questo argomento alle mappe  $f_* - g_*$  (che sono nulle come mappe  $H_n(A) \rightarrow H_n(B)$  e  $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ) otteniamo che:

$$f_* - g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B) \text{ è nulla}$$

ovvero la tesi. □

Ci chiediamo ora cosa misura effettivamente l'omologia relativa. Vedremo dei teoremi che legano l'omologia relativa di  $(X, A)$  agli spazi  $X \setminus A$  e  $X/A$ .

**Teorema 5.2 - Teorema di Escissione**

Sia  $(X, A)$  una coppia di spazi topologici, con  $W \subset A$  sottospazio tale che  $\overline{W} \subset \text{int}(A)$ . Allora vale l'inclusione:

$$(X \setminus W, A \setminus W) \subset (X, A)$$

che induce un isomorfismo in omologia.

**Commento 2.** In termini più intuitivi, se "togliamo" qualcosa da  $\text{int}(A)$  non me ne accorgo in omologia.

*Dimostrazione.* Consideriamo il ricoprimento  $\mathcal{U} = \{A, X \setminus W\}$ , dove per ipotesi  $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(X \setminus W)$ . Allora vale che:

$$C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(X \setminus W)$$

Consideriamo quindi le inclusioni:

$$\begin{array}{ccc} C(X \setminus W, A \setminus W) & \xrightarrow{\quad i \quad} & C(X, A) \\ & \searrow j & \nearrow f \\ & C^{\mathcal{U}}(X, A) = C(X \setminus W, A \setminus W) + C(A, A) & \end{array}$$

dove ricordiamo che la mappa  $f$  è un isomorfismo. Passando in omologia si ottiene che:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X \setminus W, A \setminus W) & \xrightarrow{\quad i_* \quad} & H_n(X, A) \\ & \searrow j_* & \nearrow f_* \\ & H_n^{\mathcal{U}}(X, A) & \end{array}$$

Ma anche la mappa  $j_*$  è isomorfismo, dato che:

$$\begin{aligned} C^{\mathcal{U}}(X, A) &= C^{\mathcal{U}}(X) / C^{\mathcal{U}}(A) = C(X \setminus W) + C(A) / C((X \setminus W) \cap A) + C(A \cap A) \\ &= C(X \setminus W) / C((X \setminus W) \cap A) = C(X \setminus W) / C(A \setminus W) = C(X \setminus W, A \setminus W) \end{aligned}$$

Ma allora otteniamo che  $i_*$  è composizione di isomorfismi.  $\square$

**Definizione 5.3 - Buona Coppia**

Una coppia  $(X, A)$  di spazi topologici dove  $A$  è chiuso in  $X$  ed è retratto di deformazione di qualche suo intorno in  $X$  si dice buona coppia.

**Teorema 5.4**

Data una buona coppia  $(X, A)$  la mappa quoziente:

$$(X, A) \longrightarrow (X/A, A/A)$$

induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un intorno di  $A$  in  $X$  che si retrae per deformazione su  $A$ . Possiamo allora costruire il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{(1)} & H_n(X, V) & \xrightarrow{(2)} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \quad (3) \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{(5)} & H_n(X/A, V/A) & \xrightarrow{(4)} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \end{array}$$

Osserviamo che se le mappe (1), ..., (5) sono isomorfismi, anche  $q_*$  in rosso è isomorfismo. Verifichiamolo:

- (2) e (4) sono isomorfismi per escissione
- (3) è la mappa identità
- (1) e (5) seguono un argomento analogo tra loro. Vediamolo per la mappa (1). Scriviamo la successione della tripla  $(X, V, A)$ :

$$\dots \longrightarrow H_n(V, A) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{(1)} H_n(X, V) \longrightarrow H_{n-1}(V, A) \longrightarrow \dots$$

dove  $H_n(V, A) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , dato che  $A$  è retratto per deformazione di  $V$ . Allora per esattezza della successione la mappa (1) è isomorfismo.

Segue la tesi. □

### Osservazione 5.1

Nel caso particolare in cui  $A = \{p\}$  è un punto, vale che:

$$H_n(X, \{p\}) \simeq \tilde{H}_n(X)$$

perchè l'unico gruppo di omologia che cambia è  $H_0$  quando prendiamo come intorno  $V$  la componente connessa di  $\{p\}$ .

Questo isomorfismo però non è naturale, dipende dalla scelta del punto  $p$ .

**Commento 3.** *In linea generale, nel caso in cui lavoriamo con spazi puntati ha senso considerare questo isomorfismo, in quanto il punto  $p$  è fissato.*

Cerchiamo ora di capire come interpretare l'omologia relativa anche quando la coppia di spazi topologici non è buona.

### Definizione 5.5 - Cono

Sia  $X$  uno spazio topologico. Definiamo il cono di  $X$  come il quoziente:

$$CX = (X \times I) / (X \times \{0\})$$

### Osservazione 5.2

Riconosciamo che vi è un'inclusione naturale:

$$\begin{aligned} i: X &\hookrightarrow CX \\ x &\longmapsto [(x, 1)] \end{aligned}$$

Dato quindi una coppia  $(X, A)$  si può considerare lo spazio  $X \cup CA$  definito come:

$$X \cup CA = (X \sqcup CA) / \sim$$

dove  $X \ni x \sim (a, t) \in CA$  se e solo se  $t = 1$  ed  $x = a$  (cioè faccio combaciare  $A \times \{0\}$  con  $A \subset X$ ).

**Corollario 5.6**

Vale che:

$$\tilde{H}_n(X \cup CA) \simeq H_n(X, A)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il punto  $p = [A \times \{0\}]$ . Per costruzione, l'intorno  $V = CA$  si retrae su  $\{p\}$ . Ne segue che:

$$\tilde{H}_n(X \cap CA) \stackrel{(1)}{\simeq} H_n(X \cap CA, \{p\}) \stackrel{(2)}{\simeq} H_n(X \cap CA, CA) \stackrel{(3)}{\simeq} H_n(X, A)$$

dove i passaggi sono giustificati da:

1. l'Osservazione 5.1.
2. dal fatto che  $CA$  si retrae per deformazione su  $\{p\}$ .
3. dal Teorema di Escissione 5.2.

Segue la tesi. □

## 5.2 Teorema di Separazione di Jordan-Brower

Supponiamo di avere una curva semplice (embedded)  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ . Allora  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$  è unione di 2 componenti connesse con  $\mathcal{C}$  come bordo topologico.

Ci chiediamo allora in generale cosa succede se mandiamo un  $S^2$  in uno spazio topologico, al complementare.

**Proposizione 5.7**

Sia  $(X, A)$  una coppia di spazi topologici.

1. Data  $u \in H_n(X, A)$  esiste  $(C, D) \subset (X, A)$  coppia compatta (ovvero  $C, D$  compatti) ed  $u' \in H_n(C, D)$  tali che:

$$i_*(u') = u$$

per  $i : (C, D) \hookrightarrow (X, A)$ .

2. Supponiamo che  $(C, D) \subset (X, A)$  con  $(C, D)$  coppia compatta e che ci sia  $v \in H_n(C, D)$  tale che  $i_*(v) = 0$ .

Allora esiste  $(C', D') \subset (X, A)$  coppia compatta tale che valgano:

$$(C, D) \xrightarrow{j} (C', D') \xrightarrow{i} (X, A)$$

tale che  $j_*(v) = 0$ .

*Dimostrazione.* Vediamo separatamente i 2 punti.

1. Una classe  $u \in H_n(X, A)$  è rappresentata da  $\alpha' \in C_n(X, A)$ . A sua volta, essendo  $C_n(X, A)$  quoziente di  $C_n(X)$ ,  $\alpha'$  è rappresentato da un elemento  $\alpha \in C_n(X)$ . Supponiamo di poter scrivere:

$$\alpha = \sum_{\sigma \in I} a_\sigma \sigma$$

Prendiamo allora:

$$C = \bigcup_{\sigma \in I} \text{Im}(\sigma)$$

compatto perchè unione finita di compatti. Dato che  $\alpha'$  rappresenta un elemento di  $H_n(X, A)$ , è un ciclo, quindi:

$$\partial\alpha = \sum_{\tau \in J} b_\tau \tau$$

dove  $\text{Im}(\tau) \subset A$  per ogni  $\tau \in J$  (dato che  $\partial\alpha$  è nullo nel quoziente per  $C_n(A)$ ). Definiamo quindi:

$$D = \bigcup_{\tau \in J} \text{Im}(\tau)$$

Questo conclude, dato che  $u = [\alpha] \in H_n(C, D)$ .

2. Supponiamo  $i_*(v) = 0$ . Allora si possono prendere (con argomenti analoghi al punto precedente):

$$\begin{cases} \beta' \in C_n(C, D) & \text{rappresentante di } v \\ \beta \in C_n(C) & \text{rappresentante di } \beta' \end{cases}$$

Deve valere che  $\beta$  è un bordo in  $C_n(X, A)$ . Quindi esiste  $\gamma \in C(X)$  tale che  $\partial\gamma = \beta$  in  $C(X, A)$  (ovvero  $\partial\gamma \equiv \beta \pmod{C(A)}$ ).

Come nel caso precedente, si trovano  $C'$  come supporto di  $\gamma$  e  $D'$  come la "differenza" tra  $\partial\gamma$  e  $\beta$  in  $C(X)$ .

I dettagli sono stati lasciati per esercizio. □

### Lemma 5.8

Se consideriamo  $Y \subset S^n$  con  $Y$  omeomorfo a  $D^k$  con  $0 \leq k \leq n$  allora  $\forall i$ :

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus Y) = 0$$

*Dimostrazione.* Facciamo una dimostrazione per induzione su  $k$ .

- $k = 0$ :  $S^n \setminus Y = S^n \setminus \{P\} \simeq \mathbb{R}^n$  dove l'omologia è banale (spazio contraibile).
- $k \geq 1$ : scriviamo  $Y = f(D^k)$  dove  $f$  è omeomorfismo.  
Come notazione, considero  $Y = I^k$  (cubo di dimensione  $k$ ), dato che  $I^k \overset{\text{omeo}}{\simeq} D^k$ .  
Suddividiamo ora  $I^k$  in 2 parti:

$$\begin{cases} I_+^k = \{x \in I^k \mid x_1 \geq \frac{1}{2}\} \\ I_-^k = \{x \in I^k \mid x_1 \leq \frac{1}{2}\} \end{cases}$$

dove valgono le proprietà:

$$I^k = I_+^k \cup I_-^k \quad e \quad I_+^k \cap I_-^k \simeq I^{k-1}$$

Da cui passando ai complementari:

$$\begin{cases} S^n \setminus I^{k-1} = S^n \setminus (I_+^k \cap I_-^k) = (S^n \setminus I_+^k) \cup (S^n \setminus I_-^k) \\ S^n \setminus I^k = S^n \setminus (I_+^k \cup I_-^k) = (S^n \setminus I_+^k) \cap (S^n \setminus I_-^k) \end{cases} \quad (5.1)$$

Per induzione sappiamo che  $\tilde{H}_i(S^n \setminus I^{k-1}) = 0$  per ogni  $i$ . Applicando Mayer-Vietoris al ricoprimento dato dalle equazioni 5.1:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I^{k-1}) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_-^k) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus I^{k-1}) \rightarrow \dots$$

che si riscrive:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_-^k) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

quindi vi è un isomorfismo  $\varphi : \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_-^k)$  dove ricordiamo che  $\varphi = (i_0, i_1)$ .

Supponiamo per assurdo che  $\tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \neq \emptyset$ . Allora esiste  $a_0 \in \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k)$  classe non nulla. Supponiamo che  $i_0(a_0) \neq 0$  (alternativamente,  $i_1(a_0) = 0$ ).

Reiterando il ragionamento, si possono considerare:

$$\begin{cases} I_{++}^k = \{x \in I^k \mid x_1 \geq \frac{3}{4}\} \\ I_{+-}^k = \{x \in I^k \mid \frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{4}\} \end{cases}$$

e applicando Mayer-Vietoris come prima:

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \xrightarrow{(i_{00}, i_{01})} \tilde{H}_i(S^n \setminus I_{++}^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_{+-}^k)$$

è un isomorfismo. Quindi  $a_1 = i_0(a_0)$  che è non nullo ha immagine non nulla o in  $i_{00}$  o in  $i_{01}$ . Continuiamo in questo modo. Ad ogni passo si ottiene un elemento non nullo di un certo  $Y^{(m)} = I_S^k$  (con  $S$  una "parola" di  $m$  segni + e -). Definiamo inoltre:

$$\bigcap_i Y^{(i)} = Y^\infty \simeq I^{k-1}$$

dove quindi sappiamo che  $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y^\infty) = 0$  per ogni  $i$ .

Otteniamo un diagramma del tipo:

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus Y) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)}) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^\infty)$$

$$a_0 \longmapsto a_1 \longmapsto \dots \longmapsto a_m \longmapsto \dots \rightarrow 0$$

Chiamiamo  $j^{(m)} : \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)}) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^\infty)$  sapendo che banalmente  $j^{(m)}(a_m) = 0$ . Per la Proposizione 5.7, vale che:

1. esiste  $C$  compatto tale che  $C \subset S^n \setminus Y$  ed  $\exists a'_0 \in \tilde{H}_i(C)$  tale che  $a'_0 \mapsto a_0$ .
2. esiste  $C'$  compatto, con  $C \subset C' \subset S^n \setminus Y^\infty$  tale per cui  $a'_0 \mapsto 0$  con la mappa indotta dall'inclusione  $C \hookrightarrow C'$ .

Sappiamo per compattezza che:

$$C' \subset S^n \setminus Y^\infty = S^n \setminus \left( \bigcap_m Y^{(m)} \right) = \bigcup_m (S^n \setminus Y^{(m)})$$

cioè sta nell'unione di aperti ed esiste  $M \in \mathbb{N}$  tale che:

$$C' \subset S^n \setminus Y^{(M)}$$

Quindi il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_i(C) & \longleftarrow & \tilde{H}_i(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus Y) & \longleftarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(M)}) \end{array}$$

e percorrendo il diagramma con  $a_0 \in \tilde{H}_i(C)$  si otterrebbe che  $a_M = 0$ , assurdo.

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 5.9**

Sia  $A \subset S^n$  con  $A$  omeomorfo ad  $S^k$  con  $0 \leq k < n$ . Ma allora:

$$\begin{cases} \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A) = \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus A) = 0 \quad \forall i \neq n - k - 1 \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Lavoriamo per induzione su  $k$ .

- $k = 0$ :  $S^n \setminus A \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$  che sappiamo avere omologia non banale solo per  $i = 1$ .
- $k > 0$ : sia  $A = S^k$  (abuso notazionale, è un insieme omeomorfo a  $S^k$ ). Vediamo la suddivisione di  $A = A_1 \cup A_2$ , dove:

$$\begin{cases} A_1 = S^k \cap \{x_1 \geq 0\} \\ A_2 = S^k \cap \{x_1 \leq 0\} \end{cases}$$

per cui notiamo subito che  $A_1 \simeq A_2 \simeq I^k$  e che  $A_1 \cap A_2 = S^{k-1}$ . Siamo in grado di usare Mayer-Vietoris con:

$$\begin{cases} S^n \setminus A = (S^n \setminus A_1) \cap (S^n \setminus A_2) \\ S^n \setminus (A_1 \cap A_2) = (S^n \setminus A_1) \cup (S^n \setminus A_2) \end{cases}$$

quindi per il Lemma precedente:  $\tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) = 0$  per  $j = 1, 2$ . Abbiamo quindi un isomorfismo:

$$\Delta : \tilde{H}_i(S^n \setminus (A_1 \cap A_2)) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus (A_1 \cup A_2))$$

e per ipotesi induttiva, questo conclude.  $\square$

**Corollario 5.10 - Teorema di Jordan-Brower**

Un sottoinsieme  $A \subset S^n$  omeomorfo ad  $S^{n-1}$  sconnette  $S^n$  in 2 componenti connesse.

*Dimostrazione.* Siamo nel caso in cui  $k = n - 1$  del Teorema precedente.

Per cui  $\tilde{H}_0(S^n \setminus A) = \mathbb{Z}$ , cioè che  $H_0(S^n \setminus A) = \mathbb{Z}^2$ . Questo ci dice che  $S^n \setminus A$  è sconnesso in 2 componenti connesse per archi. Ma  $A$  è chiuso, quindi  $S^n \setminus A$  è aperto, localmente connesso per archi. Vale la corrispondenza tra componenti connesse e componenti connesse per archi.  $\square$

**Proposizione 5.11**

Se  $A \subset S^n$  omeomorfo a  $S^{n-1}$ , allora  $A$  è il bordo di ognuna delle componenti connesse di  $S^n \setminus A$ .

*Dimostrazione.* Dato che  $S^n \setminus A$  è localmente connesso, ogni componente connessa è aperto di  $S^n \setminus A$ , quindi aperto di  $S^n$  (aperto in sottospazio aperto è aperto nello spazio totale). Questo ci dice che il bordo di ogni componente connessa sta in  $A$ . Mostriamo che tutti i punti di  $A$  sono nel bordo delle componenti connesse.

Chiamiamo  $C_0$  e  $C_1$  le componenti connesse di  $S^n \setminus A$ . Vogliamo mostrare che per ogni

$a \in A$  e per ogni  $N$  intorno di  $a$  vale che  $N \cap C_i \neq \emptyset$  per  $i = 0, 1$ .

Sappiamo che  $N \cap A$  è intorno di  $a$  in  $A \simeq S^{n-1}$ . Possiamo quindi definire un ricoprimento aperto  $A = A_1 \cup A_2$  tale che:

$$\begin{cases} A_1 \simeq A_2 \simeq I^{k-1} \\ A_1 \cap A_2 \simeq S^{n-2} \\ A_2 \subset N \cap A \end{cases}$$

Per il Lemma,  $S^n \setminus A_1 \simeq S^n \setminus I^{k-1}$  quindi è connesso per archi. Prendiamo  $p_0 \in C_0$  e  $p_1 \in C_1$  connessi da un arco  $f : I \rightarrow S^n \setminus A_1$ , dove  $f(0) = p_0$  e  $f(1) = p_1$ .

Dato che  $A$  sconnetteva,  $f(I) \cap A_2 \neq \emptyset$ . In particolare,  $f^{-1}(A_2) \subset I$  è un compatto, con un minimo  $t_0$  e massimo  $t_1$  che sono nel bordo di  $f^{-1}(A_2)$ . Ma  $f^{-1}(N)$  è un aperto di  $I$  che contiene  $t_0$  e  $t_1$  (perchè  $f^{-1}(A_2) \subset f^{-1}(N)$ ). Questo ci dice che  $f^{-1}(N) \cap f^{-1}(C_i) \neq \emptyset$  per  $i = 0, 1$  perchè  $f(t) \in C_0$  per  $t < t_0$  e  $f(t) \in C_1$  per  $t > t_1$ .

Questo conclude.  $\square$

### Teorema 5.12 - Teorema di Invarianza del Dominio

Siano  $U, V \subset S^n$  sottoinsiemi omeomorfi. Allora uno è aperto se e solo se lo è l'altro.

*Dimostrazione.* Sia  $h : U \rightarrow V$  omeomorfismo. Sia  $x \in U$  con un intorno chiuso  $N \simeq D^n$  di bordo  $\partial N \simeq S^{n-1}$ . Dati  $y = h(x)$  e  $N' = h(N)$  con  $\partial N' = h(\partial N)$ , abbiamo che  $N'$  è intorno chiuso di  $y$  in  $V$ .

Per il Lemma,  $S^n \setminus N'$  è connessa e per il Teorema precedente  $S^n \setminus \partial N'$  ha 2 componenti connesse,  $N' \setminus \partial N'$  ed  $S^n \setminus N'$ .

Ma allora  $N' \setminus \partial N'$  è intorno aperto di  $y$  contenuto in  $V$ , ovvero  $y$  è interno a  $V$ .

Questo implica che  $U$  aperto se e solo se  $V$  aperto.  $\square$

### Corollario 5.13

Siano  $A, B \subset S^n$  con  $h : A \rightarrow B$  omeomorfismo. Allora  $h$  manda punti interni in punti interni e punti di bordo in altri punti di bordo.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla dimostrazione del Teorema 5.12.  $\square$

### Teorema 5.14 - Teorema di Schoenflies

Sia  $J \subset S^2$  sottoinsieme omeomorfo ad  $S^1$ . Allora esiste un omeomorfismo  $S^2 \rightarrow S^2$  che mappa  $J$  sull'equatore.

*Dimostrazione.* Omessa.  $\square$

# Omologia di Grafi

## Definizione 6.1 - Grafo (Regolare Finito)

Un grafo regolare finito è una coppia  $(X, X^0)$  con  $X$  di Hausdorff ed  $X^0 \subset X$  finito (sarà l'insieme dei vertici del grafo) tale che:

1.  $X \setminus X^0$  è unione finita di aperti disgiunti  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$  detti lati ed omeomorfi ad intervalli aperti.
2.  $\bar{\ell}_i \setminus \ell_i$  (anche denotato  $\partial\ell_i$ ) è insieme di 2 vertici distinti, in modo che  $(\bar{\ell}_i, \ell_i) \overset{\text{omeo}}{\simeq} ([0, 1], (0, 1))$ .

## Osservazione 6.1

Delle osservazioni immediate sono che:

- ogni grafo è compatto.
- ogni grafo si può immergere in  $\mathbb{R}^3$ . C'è un Teorema (di Kuratowski) che dice quando si può immergere un grafo perfino in  $\mathbb{R}^2$ .

Dato un grafo  $(X, X^0)$  posso suddividere il grafo aggiungendo altri elementi all'insieme dei vertici.

Per studiare i gruppi di omologia di un grafo, bisogna prima passare dallo studio di  $(X, X^0)$ . Ricordiamo come primo passo che:

$$\tilde{H}_q(\bar{\ell}_i, \partial\ell_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } q = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Arriviamo al seguente Teorema:

## Teorema 6.2

Sia  $(X, X^0)$  un grafo di lati  $\ell_1, \dots, \ell_k$ . L'inclusione:

$$(\bar{\ell}_i, \partial\ell_i) \longrightarrow (X, X^0)$$

induce un omeomorfismo iniettivo in omologia per  $i = 1, \dots, k$ :

$$\tilde{H}_q(\bar{\ell}_i, \partial\ell_i) \longrightarrow \tilde{H}_q(X, X^0)$$

dove in particolare  $H_q(X, X^0)$  è la somma diretta delle immagini.

## 6. Omologia di Grafi

---

Segue che  $H_1(X, X^0)$  è abeliano libero di rango  $k$  e vale che:

$$H_q(X, X^0) = 0 \quad \text{per } q \neq 1$$

*Dimostrazione.* Osserviamo subito che la proposizione sul primo gruppo di omologia segue dal caso di  $q$  generale.

Identifichiamo  $\bar{\ell}_i$  con l'intervallo  $[0, 1]$  e secondo la stessa identificazione:

$$a_i \longleftrightarrow \frac{1}{2} \quad d_i \longleftrightarrow \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$$

Chiamiamo inoltre:  $D = \bigcup_i d_i$  e  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

Consideriamo le seguenti coppie in omologia:

$$\begin{array}{ccccc} H_q(D, D \setminus A) & \xrightarrow{(1)} & H_q(X, X \setminus A) & \xleftarrow{(2)} & H_q(X, X^0) \\ \uparrow (5) & & \uparrow & & \uparrow (6) \\ H_q(d_i, d_i \setminus \{a_i\}) & \xrightarrow{(3)} & H_q(\bar{\ell}_i, \bar{\ell}_i \setminus \{a_i\}) & \xleftarrow{(4)} & H_q(\bar{\ell}_i, \partial\bar{\ell}_i) \end{array}$$

Vogliamo dire qualcosa della funzione (6), quindi analizziamo il diagramma:

- (4) sappiamo che  $\partial\bar{\ell}_i$  è retratto di deformazione di  $\bar{\ell}_i \setminus \{a_i\}$ , quindi la mappa è isomorfismo.
- (2) si può applicare lo stesso argomento.
- (1) e (3) sono isomorfismi per escissione.
- dato che  $D$  è disconnesso,  $(D, D \setminus A) = \bigsqcup_i (d_i, d_i \setminus \{a_i\})$ , quindi in omologia si ottiene una somma diretta.

Allora la mappa (6) è proprio un'inclusione di  $H_q(\bar{\ell}_i, \partial\bar{\ell}_i)$  in  $H_q(X, X^0)$  somma diretta. Per finire la dimostrazione, studieremo con il prossimo Teorema la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_1(X, X^0) \longrightarrow H_0(X^0) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0$$

e da questo seguirà poi la tesi. □

### Osservazione 6.2 - Sui gruppi abeliani liberi

Ricordiamo 2 proprietà note di gruppi abeliani liberi:

1. sottogruppi di gruppi abeliani liberi sono liberi.
2. data la successione esatta:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

di gruppi abeliani liberi. Allora esiste una mappa  $s : C \rightarrow B$  che è sezione. Otteniamo che  $B \simeq A \oplus C$ .

**Definizione 6.3 - Caratteristica di Eulero**

Dato un grafo  $(X, X^0)$  definiamo la sua caratteristica di Eulero come:

$$\chi(X, X^0) = \#\text{vertici} - \#\text{lati}$$

**Teorema 6.4**

Sia  $(X, X^0)$  un grafo. Allora per  $q > 1$  abbiamo che  $H_q(X) = 0$ . Invece  $H_1(X)$  è abeliano libero di rango:

$$\text{rk } H_0(X) - \text{rk } H_1(X) = \chi(X, X^0)$$

*Dimostrazione.* Usiamo la seguente successione esatta corta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(X) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X, X^0) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(X^0) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{dotted} & & \uparrow \text{dotted} & & \uparrow \text{dotted} & & \uparrow \text{dotted} & & \\ & & \text{rk} = a & & \text{rk} = \#\text{lati} & & \text{rk} = \#\text{vertici} & & \text{rk} = b & & \end{array}$$

Tronchiamo questa successione in modo da poter applicare l'Osservazione precedente:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_1(X, X^0) \longrightarrow \ker i_* \longrightarrow 0$$

è esatta per costruzione. Ma  $\dim \ker i_* = \#\text{vertici} - b$ , quindi:

$$\#\text{lati} = a + \dim \ker i_* = a + \#\text{vertici} - b$$

che riscritto in termini dei ranghi è la tesi. □

A volte, non ci basta questo risultato, ma è interessante studiare esplicitamente la mappa:

$$\partial_* : H_1(X, X^0) \longrightarrow H_0(X^0)$$

Troviamo innanzitutto una base di generatori per questi gruppi abeliani liberi.

- Denotiamo  $\ell_1, \dots, \ell_k$  i lati del grafo e  $v_1, \dots, v_m$  i vertici e (contemporaneamente) i generatori dei singoli  $H_0(\{v_i\}) \simeq \mathbb{Z}$ , tali che  $\varepsilon(v_i) = 1$ . Otteniamo così la base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  di  $H_0(X^0)$ .
- Per la base di  $H_1(X, X^0)$  invece non c'è una scelta "naturale". Per il Teorema 6.2 basta prendere un generatore per ogni  $\tilde{H}_1(\bar{\ell}_i, \partial\bar{\ell}_i)$ . Questa scelta del generatore è equivalente a scegliere l'orientazione del lato (ovvero se scegliere un elemento il cui bordo è  $v_i - v_j$  o  $v_j - v_i$ ). Questo si può vedere dal diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H_1(\bar{\ell}_i, \partial\bar{\ell}_i) & & \\ & & & \swarrow \partial_1 & \downarrow \partial_* & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_0(\partial\bar{\ell}_i) & \longrightarrow & H_0(\partial\bar{\ell}_i) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Data l'indicizzazione dei vertici, possiamo ad esempio associare al lato  $\partial\bar{\ell}_i = \{v_\alpha, v_\beta\}$ , con  $\alpha < \beta$ , il generatore  $e_i$  di  $H_1(\bar{\ell}_i, \partial\bar{\ell}_i)$  in modo che  $\partial e_i = v_\beta - v_\alpha$ .

Fissate queste scelte, possiamo descrivere  $\partial_*$  con una matrice, con la quale si trova una base per  $\ker \partial_*$ .

In generale, possiamo descrivere un algoritmo esplicito per trovare  $\ker \partial_*$  usando i cosiddetti "alberi massimali". Ordiniamo (totalmente) i lati "lessicograficamente": se  $\partial \bar{\ell}_i = \{v_\alpha, v_\beta\}$ , con  $\alpha < \beta$ , associo ad  $\ell_i$  la parola " $\alpha\beta$ ".

Costruiamo ora l'albero massimale partendo dalla configurazione con i soli vertici (che è un albero). Ad ogni passo, considero l' $i$ -esimo lato secondo l'ordine totale e:

- se aggiungendo tale lato compaiono cicli nel grafo (ovvero non è più albero), non si considera il lato
- altrimenti, si aggiunge il lato all'albero

A questo punto, si ottiene un sottografo che è albero massimale. Per trovare gli elementi di una base di  $\ker \partial_*$ , consideriamo uno ad uno i lati "eliminati" dal grafo completo. Percorrendo il ciclo che creerebbero nel grafo, si ottiene un elemento di  $H_1(X, X^0)$  che sta nel nucleo di  $\partial_*$  (si sommano i lati che compongono il ciclo, con segni che dipendono dall'orientazione dei lati percorsi).

L'insieme di tutti questi elementi forma proprio una base di  $\ker \partial_*$ .

Aggiungendo i lati dell'albero massimale, inoltre, si ottiene una base di  $H_1(X, X^0)$ .

## 6.1 Omologia di Superfici Compatte

### 6.1.1 Toro

Dallo studio dell'omologia del toro  $S^1 \times S^1$  si ottiene che:

$$H_i(S^1 \times S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### 6.1.2 Piano Proiettivo

Consideriamo  $X = \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ . Sappiamo l'identificazione data dal disco  $D^2$  quozientato i punti antipodali del suo bordo.

Consideriamo la mappa di identificazione:

$$f : (D^2, \partial D^2) \longrightarrow (X, X')$$

che sul bordo si restringe a:

$$f : \partial D^2 \longrightarrow X'$$

dove  $X'$  è il bordo  $\partial D^2$  quozientato. Passando ora all'omologia vediamo che:

$$f_* : H_i(D^2, \partial D^2) \longrightarrow H_i(X, X')$$

è un isomorfismo. Infatti, consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} H_i(D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{\text{eq omot}} & H_i(D^2, D^2 \setminus \{e\}) & \xleftarrow{\text{esciss}} & H_i(D_\varepsilon^2, D_\varepsilon^2 \setminus \{e\}) \\ \downarrow f_* & & & & \downarrow \text{omeo} \\ H_i(X, X') & \xrightarrow{\text{eq omot}} & H_i(X, X \setminus \{e\}) & \xleftarrow{\text{esciss}} & H_i(f(D_\varepsilon^2), f(D_\varepsilon^2 \setminus \{e\})) \end{array}$$

Quindi  $f_*$  è isomorfismo in quanto composizione di isomorfismi.

Consideriamo ora la seguente successione esatta, dove con  $D_\varepsilon^2$  indicheremo il disco di raggio  $0 < \varepsilon < 1$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(X) & \longrightarrow & H_2(X, X') & \xrightarrow{\varphi} & H_1(X') & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \text{iso} \uparrow & & g \uparrow & & & & \\ & & & & H_2(D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{\text{iso}} & H_1(\partial D^2) & & & & \end{array}$$

Studiamo quindi la mappa  $g$ , così sappiamo determinare la mappa  $\varphi$ .

In particolare, vediamo che il cammino che genera  $H_1(\partial D^2)$  si identifica in  $H_1(X') \simeq \mathbb{Z}$  come l'elemento 2. Quindi  $g$  è la mappa moltiplicazione per 2, lo è anche  $\varphi : H_2(X, X') \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X') \simeq \mathbb{Z}$ .

Ora, per esattezza della successione:

$$H_2(X) = \ker \varphi = 0$$

e resta la successione esatta:

$$0 \rightarrow H_2(X, X') \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{-2} H_1(X') \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0$$

quindi dato che  $H_1(X')$  è isomorfo a  $H_1(X)$  in somma diretta con  $\text{Im } \varphi \simeq 2\mathbb{Z}$ , si ottiene che:

$$H_1(X) = \mathbb{Z}_2$$

I gruppi di omologia superiori sono tutti nulli per il solito argomento con la successione di Mayer-Vietoris.

### 6.1.3 Bottiglia di Klein

Possiamo costruire la bottiglia di Klein  $K$  come quoziente  $I^2 / \sim$  dove si quozientano i lati opposti (una coppia di lati secondo lo stesso "verso", l'altra con "versi opposti").

Consideriamo, come per il proiettivo reale, la mappa di identificazione al quoziente:

$$f : (I^2, \partial I^2) \rightarrow (K, K')$$

dove come in precedenza  $K' = \partial I^2 / \sim$ . Questo induce in modo analogo al precedente un isomorfismo in omologia relativa. Otteniamo quindi il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(K) & \longrightarrow & H_2(K, K') & \xrightarrow{\varphi} & H_1(K') & \longrightarrow & H_1(K) & \longrightarrow & H_1(K, K') \\ & & & & \text{iso} \uparrow & & g \uparrow & & & & \\ & & & & H_2(I^2, \partial I^2) & \xrightarrow{\text{iso}} & H_1(\partial I^2) & & & & \end{array}$$

dove vediamo che  $H_1(K, K') = 0$  in quanto  $i_*(H_1(K')) = H_1(K)$ .

Per studiare<sup>1</sup> la mappa  $\varphi : H_2(K, K') \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_1(K') \simeq \mathbb{Z}^2$ , studiamo equivalentemente la mappa  $g : H_1(\partial I^2) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_1(K') \simeq \mathbb{Z}^2$ . Possiamo identificare  $g$  come mappa tra grafi: applicando il metodo dell'"albero massimale" troviamo che la mappa si può descrivere:

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ma allora, per esattezza  $H_2(K) = \ker \varphi = 0$  mentre:

$$H_1(X) = \text{coker } \varphi = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

e questo conclude.

---

<sup>1</sup>Ricaviamo che  $H_1(K') \simeq \mathbb{Z}^2$  dal fatto che  $K' \simeq S^1 \vee S^1$ .

## 6.1.4 Superfici compatte generiche

Gli esempi qua riportati risultano importanti alla luce dei seguenti fatti:

**Fatto 6.5**

*Ogni superficie chiusa compatta ed orientabile è somma connessa di un certo numero di tori.*

*Ogni superficie chiusa compatta ma non orientabile è somma connessa di tori ed un proiettivo reale  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Omessa.

□

# Complessi CW

In questo capitolo useremo le seguenti notazioni:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \quad e \quad U^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

per cui  $S^n = \partial D^{n+1}$ .

Introduciamo le seguenti strutture:

**Definizione 7.1 -  $n$ -celle**

Consideriamo  $X^*$  spazio topologico Hausdorff, con  $X \subset X^*$  tali che:

$$X^* \setminus X = \bigsqcup \text{di aperti } e_\lambda^n \text{ omeomorfi ad } U^n$$

dove  $e_\lambda^n$  sono  $n$ -celle. Assumiamo inoltre che la  $n$ -cella  $e_\lambda^n$  sia "attaccata" ad  $X$  con una mappa caratteristica:

$$f_\lambda : D^n \longrightarrow \overline{e_\lambda^n}$$

tale che:

- $f_\lambda|_{U^n} : U^n \longrightarrow e_\lambda^n$  è omeomorfismo
- $f_\lambda(\partial D^n) \subset X$

Bisogna definire la giusta topologia su questo spazio:

- se le celle  $e_\lambda^n$  sono finite, è chiaro dalla topologia di  $X$  quale sarà la topologia di  $X^*$ .
- se le celle  $e_\lambda^n$  sono infinite, allora  $X^*$  ha la topologia debole associata alle mappe  $f_\lambda$  e  $i : X \longrightarrow X^*$ .

**Definizione 7.2 - Complesso CW**

Un complesso CW è uno spazio topologico Hausdorff  $X$  ottenuto come unione di:

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

dove  $\{X^n\}$  sono detti  $n$ -scheletri, tale che:

1.  $X^0$  è un insieme discreto (insieme dei vertici).
2.  $\forall n > 0$  si ottiene  $X^n$  da  $X^{n-1}$  incollando delle  $n$ -celle come definito sopra.

3.  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$
4.  $X$  ed  $X^n$  hanno la topologia debole (W).

**Teorema 7.3**

Sia  $X^*$  ottenuto da  $X$  incollando le  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Allora:

$$H_q(X^*, X) = 0 \quad \forall q \neq 0, n$$

e per  $\lambda \in \Lambda$ ,  $f_\lambda$  induce un omomorfismo iniettivo:

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(X^*, X)$$

ed  $H_n(X^*, X)$  è somma diretta  $\bigoplus_\lambda$  delle immagini di tali mappe.

*Dimostrazione.* Segue riadattando la dimostrazione del Teorema 6.2. □

**Corollario 7.4**

La mappa  $H_q(X) \longrightarrow H_q(X^*)$  indotta dall'inclusione è un isomorfismo eccetto al più  $q = n - 1, n$ . Si ha che:

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X^*) \rightarrow H_n(X, X^*) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(X^*) \rightarrow 0$$

**Osservazione 7.1**

Consideriamo due coppie  $(X^*, X)$  e  $(Y^*, Y)$  ottenute attaccando  $n$ -celle. Se c'è una mappa  $f : (X^*, X) \longrightarrow (Y^*, Y)$  allora c'è un diagramma commutativo tra le corrispondenti successioni:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X^*) & \longrightarrow & H_n(X, X^*) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^*) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y^*) & \longrightarrow & H_n(Y, Y^*) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y^*) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Questo per la naturalità della successione esatta di coppia.

**7.1 Esempi di Complessi CW**

Vedremo ora alcuni esempi notevoli di CW-complessi.

- Sfera  $S^n$ : si può descrivere come una 0-cella ed una  $m$ -cella.
- Grafi: è il caso particolare dato da 0-celle ed 1-celle.
- Superfici compatte
- Prodotto di CW-complessi è CW-complesso.
- Proiettivo reale/complesso/quaternionico: consideriamo infatti l'inclusione naturale:

$$\mathbb{P}^n \mathbb{K} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \quad \supset \quad \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{K} = \mathbb{K}^n \setminus \{0\} / \sim$$

Ora prendiamo l'insieme  $D_{\mathbb{K}}^n = \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| \leq 1\}$ . Si può considerare la mappa:

$$f : \begin{array}{ccc} D_{\mathbb{K}}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \mathbb{K} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - |x|^2}) \end{array}$$

che è proprio la mappa di incollamento di una cella di dimensione  $nk$  (dove  $k = 1/2/4$  in base al campo  $\mathbb{K}$  rispettivamente reale/complesso/quaternionico) su  $\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{K}$ .

Infatti:

$$\partial D_{\mathbb{K}}^n \xrightarrow{f} V = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^n \mathbb{K}$$

Segue che  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  è ottenuto da  $\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{K}$  incollando una  $nk$ -cella.

- $\mathbb{P}^\infty \mathbb{K}$ : è un CW-complesso, in quanto unione di una successione di inclusioni  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{K} = \bigcup_n \mathbb{P}^n \mathbb{K}$ .
- $S^\infty$ : è un CW-complesso come unione di inclusioni, dove ad ogni passo identifico  $S^n$  come equatore di  $S^{n+1}$ .

Quindi:

$$S^{n+1} = \begin{array}{ccccc} S^n & \sqcup & e_+^{n+1} & \sqcup & e_-^{n+1} \\ \text{equatore} & & \text{calotta superiore} & & \text{calotta inferiore} \end{array}$$

**Fatto 7.5**

Lo spazio  $S^\infty = \bigcup_n S^n$  è contraibile.

*Dimostrazione.* Omessa. □

## 7.2 Proprietà Topologiche di Complessi CW

Definiamo delle proprietà topologiche che torneranno nelle proprietà successive.

**Definizione 7.6 - Paracompattezza**

Dato un ricoprimento aperto di uno spazio topologico  $X$ , lo posso raffinare ad un ricoprimento localmente finito.

**Definizione 7.7 - Partizione dell'1**

Sia  $X$  spazio topologico. Una partizione dell'unità è una famiglia  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  di funzioni continue a supporto compatto e localmente tutte nulle a meno di un numero finito. In particolare, deve valere  $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda = 1$ .

Abbiamo le seguenti proprietà:

1. Un CW-complesso è uno spazio paracompatto, quindi normale.
2. Un CW-complesso è localmente contraibile.
3. Un compatto in un CW-complesso interseca al più un numero finito di celle.  
In particolare, il CW-complesso è compatto se e solo se ha un numero finito di celle.  
La chiusura di una cella interseca un numero finito di celle.

4. Una funzione  $f$  definita su un CW-complesso è continua se e solo se lo sono le restrizioni alle celle chiuse.

*Dimostrazione.* Sono lasciate come lettura, dall'appendice del libro Hatcher. □

### Definizione 7.8 - Sottocomplesso

Un sottocomplesso  $A \subset X$  di CW-complesso è un'unione di celle di  $X$  tale che:

$$e^n \in A \quad \Rightarrow \quad \bar{e}^n \in A$$

### Definizione 7.9 - Mappa Cellulare

Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra CW-complessi si dice cellulare se manda:

$$f(X^n) \subset Y^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### Teorema 7.10 - Teorema di Whitehead

Ogni mappa tra CW-complessi è omotopa ad una mappa cellulare.

*Dimostrazione.* Questo Teorema verrà dimostrato in seguito... □

## 7.3 Omologia Cellulare

Vedremo in questa Sezione che l'omologia che costruiremo sulla *struttura* di CW-complesso si rivelerà dipendente soltanto da  $X$  come spazio topologico. Schematicamente:

$$\begin{array}{ccc} \text{CW-complesso è uno} & \longleftrightarrow & \text{Struttura di CW-complesso} \\ \text{spazio topologico } X & & \text{data dagli scheletri} \\ & & K = \{K^n \mid n=0,1,2,\dots\} \end{array}$$

Partiamo da alcune osservazioni.

### Osservazione 7.2

Dato che  $K^n$  è ottenuto da  $K^{n-1}$  incollando delle  $n$ -celle, vale che:

$$H_q(K^n, K^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq n \\ \mathbb{Z}^{\oplus |\Lambda_n|} & \text{se } q = n \end{cases}$$

### Lemma 7.11

Vale che  $H_q(K^n) = 0$  per ogni  $q > n$ .

*Dimostrazione.* Vediamolo per induzione su  $n$ :

- $n = 0$ : è banalmente vero.
- $n > 0$ : vediamo che nella successione esatta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q(K^{n-1}) & \longrightarrow & H_q(K^n) & \longrightarrow & H_q(K^n, K^{n-1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow \text{dotted} & & & & \uparrow \text{dotted} & & \\ & & = 0 \text{ per } q > n-1 & & & & = 0 \text{ per } q \neq n & & \end{array}$$

e questo conclude per esattezza.

□

Costruiamo un complesso algebrico associato allo scheletro  $K$ .

Possiamo definire:

$$C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$$

con una mappa di bordo  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  che è descritta dalla composizione  $d_n = j_{n-1} \circ \partial_*$ :

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$

dove le mappe vengono dalle successioni esatte lunghe di  $(K^n, K^{n-1})$  e  $(K^{n-1}, K^{n-2})$ . Osserviamo subito che in effetti  $d^2 = 0$ , infatti continuando la successione che definisce  $d_n$ , si trova:

$$\dots \longrightarrow H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-2}(K^{n-2}) \longrightarrow \dots$$

è una parte di successione esatta, quindi la composizione dà la mappa nulla (perchè  $\text{Im } j_{n-1} = \ker \partial_*$ ).

### Osservazione 7.3

Scrivendo la successione esatta lunga della tripla  $(K^n, K^{n-1}, K^{n-2})$  si ritrova proprio la mappa di bordo definita:

$$\dots \longrightarrow H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \longrightarrow \dots$$

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

### Definizione 7.12 - Complesso delle Catene Cellulari

La coppia  $(C_n(K), d_n)$  è definito complesso delle catene cellulari di  $K$ .

Nella stessa convenzione dei complessi algebrici standard, indicheremo:

- $Z_n(K) = \ker d_n$  i cicli.
- $B_n(K) = \text{Im } d_{n-1}$  i bordi.
- $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$  i gruppi di omologia.

### Teorema 7.13 - Teorema di Isomorfismo tra Omologia Singolare e Cellulare

Consideriamo le seguenti mappe:

$$H_n(X) \xleftarrow{k_n} H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$$

Allora segue che:

1.  $j_n$  è una mappa iniettiva
2.  $k_n$  è una mappa surgettiva
3.  $\text{Im } j_n = Z_n(K)$
4.  $\ker k_n = j_n^{-1}(B_n(K))$

e quindi è la mappa  $j_n \circ k_n^{-1}$  che induce una mappa ben definita ed isomorfismo in omologia:

$$\theta : H_n(X) \longrightarrow H_n(K)$$

*Dimostrazione.* Studiamo innanzitutto la mappa  $k_{q+1} : H_q(K^{q+1}) \rightarrow H_q(X)$ . Per fare questo, osserviamo che dalla successione esatta lunga della coppia  $(K^n, K^{n-1})$  vale che:

$$0 \longrightarrow H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_n} H_{n-1}(K^n) \longrightarrow 0$$

dove  $H_q(K^{n-1}) \rightarrow H_q(K^n)$  è isomorfismo per  $q \neq n - 1, n$ .

Quindi valgono le seguenti inclusioni:

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(K^{q+1}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(K^{q+2}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(K^{q+3}) & \xrightarrow{\sim} & \dots \\ & \searrow k_{q+1} & \downarrow k_{q+2} & & \swarrow k_{q+3} & & \\ & & H_q(X) & & & & \end{array}$$

dove le mappe orizzontali sono tutte isomorfismi. Dividiamo ora in 2 casi:

- se  $X$  ha dimensione finita<sup>1</sup> allora esiste  $Q > q$  tale che  $k_Q = id_K$  e per commutatività del diagramma risulterebbe che anche  $k_{q+1}$  è isomorfismo.
- se  $X$  ha dimensione infinita, usiamo il fatto che le classi di omologia e i bordi hanno supporto compatto (per la Proposizione 5.7) e il fatto che ogni compatto interseca un numero finito di celle.

Per  $\alpha \in H_q(X)$  esiste  $N > q$  tale che  $\alpha \in \text{Im } k_N : H_q(K^N) \rightarrow H_q(X)$ . Per commutatività del diagramma precedente, allora  $\alpha \in \text{Im } k_{q+1}$ .

Sia  $\beta \in \ker k_{q+1}$ , allora esiste  $M > q$  tale che  $\beta$  è nullo in  $H_q(K^M)$ . Ma allora  $\beta = 0$  anche in  $H_q(K^{q+1})$ .

Questo implica che la mappa  $k_{q+1} : H_q(K^{q+1}) \longrightarrow H_q(X)$  è un isomorfismo.

Possiamo ora dimostrare i 4 punti del Teorema:

1. Guardando alla mappa  $j_n : H_n(K^n) \longrightarrow H_n(K^n, K^{n-1})$ , questa si trova nella successione esatta lunga:

$$0 = H_n(K^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1})$$

quindi per esattezza  $\ker j_n = 0$  ovvero  $j_n$  è iniettiva.

2. Guardando la successione esatta di  $(K^n, K^{n-1})$  si vede che:

$$H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_n} H_{n-1}(K^n) \longrightarrow H_{n-1}(K^n, K^{n-1}) = 0$$

quindi per esattezza  $i_n$  è surgettiva  $\forall n$ .

Consideriamo allora il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(K^n) & \xrightarrow{i_{n+1}} & H_n(K^{n+1}) \\ & \searrow k_n & \swarrow k_{n+1} \\ & & H_n(X) \end{array}$$

dove  $k_{n+1}$  è l'isomorfismo considerato all'inizio della dimostrazione. Per commutatività del diagramma, allora, anche la mappa  $k_n = k_{n+1} \circ i_{n+1}$  è surgettiva.

---

<sup>1</sup>Per dimensione finita di  $K$  si intende che esiste un  $N \in \mathbb{N}$  tale che tutti gli scheletri successivi a  $K^N$  non aggiungono ulteriori celle.

3. Considerando sempre lo stesso diagramma, vediamo che  $\ker k_n = \ker i_{n+1}$ . Riscriviamo la successione della coppia  $(K^n, K^{n-1})$ :

$$0 \rightarrow H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_n} H_{n-1}(K^n) \rightarrow 0$$

da cui segue che  $\ker \partial_* = \text{Im } j_n$ . Ma sappiamo anche che  $d_n = j_{n-1} \partial_*$  dove  $j_{n-1}$  è iniettiva, quindi:

$$Z_n(K) = \ker d_n = \ker \partial_* = \text{Im } j_n$$

che è l'uguaglianza cercata.

4. Vediamo, sempre dal diagramma precedente, che  $\ker k_{n-1} = \ker i_n = \text{Im } \partial_*$ , quindi:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_n} & H_{n-1}(K^n) & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & \searrow k_{n-1} & \uparrow k_n & & \\ & & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \twoheadrightarrow & H_{n-1}(X) & & \end{array}$$

Si nota allora che:

$$\ker k_{n-1} = \text{Im } \partial_* = j_{n-1}^{-1}(\text{Im } j_{n-1} \circ \partial_*) = j_{n-1}^{-1}(\text{Im } d_n) = j_{n-1}^{-1}(B_{n-1}(K))$$

Dimostrati i 4 punti, segue direttamente che la mappa:

$$\theta : H_n(X) \longrightarrow H_n(K)$$

è ben definita. Infatti, l'indeterminazione data dalla scelta del rappresentante in  $H_n(X)$  (cioè la differenza tra rappresentanti della stessa classe) finisce nei bordi (per i punti (c) e (d)) quindi in omologia, dove i bordi si quozientano, si determina univocamente l'immagine di  $\theta$ .

Con ragionamenti analoghi si dimostra che  $\theta$  è iniettiva e surgettiva, quindi isomorfismo.  $\square$

Seguono allora le seguenti proposizioni.

**Proposizione 7.14**

Valgono le seguenti proprietà.

1. Se  $X$  è un CW-complesso  $n$ -dimensionale, allora:

$$H_q(X) = 0 \quad \forall q > n$$

2. Se  $X$  è un CW-complesso con un numero finito di  $n$ -celle, allora:

$$H_n(X) \text{ è finitamente generato}$$

3. Se  $X$  è CW-complesso senza  $n$ -celle, allora:

$$H_n(X) = 0$$

**Definizione 7.15 - Caratteristica di Eulero**

Dato uno spazio  $X$  CW-complesso con scheletro  $K = \{K^n\}$ , definiamo  $\alpha_n = \#n$ -celle. Allora la caratteristica di Eulero è data da:

$$\chi(K) = \sum_n (-1)^n \alpha_n$$

**Proposizione 7.16 - Caratteristica di Eulero invariante**

Sia  $X$  uno spazio topologico con struttura  $K = \{K^n\}$  di CW-complesso finito. Allora  $\chi(K)$  è invariante, non dipende dalla struttura  $K$  ma soltanto da  $X$ .

Vedremo in particolare che:

$$\chi(K) = \sum_n (-1)^n \text{rk } H_n(X)$$

dove  $\text{rk } H_n(X) = \#$ generatori liberi di  $H_n(X)$ .

**Corollario 7.17**

Per la costruzione precedentemente fatta dei proiettivi complessi e quaternionici:

$$H_q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad H_q(\mathbb{H}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 4, \dots, 4n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Viene rimandata alla prossima lezione. □

**Definizione 7.18 - Rango di  $G$** 

Dato  $G$  gruppo abeliano, diciamo che  $X \subset G$  è linearmente indipendente se soddisfa la "condizione di indipendenza lineare" a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ .

Possiamo definire allora il rango di  $G$  come:

$$\text{rk}(G) = \max\{\#X \mid X \subset G \text{ linearmente indipendente}\}$$

**Osservazione 7.4**

Se  $G$  è abeliano libero,  $\text{rk}(G) = \#$ generatori liberi.

**Proposizione 7.19 - Proprietà**

Valgono le seguenti proprietà:

1. Se  $A \leq B$  o  $A$  quoziente di  $B$ , allora  $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(B)$ .
2. Data la successione esatta corta  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  vale che:

$$\text{rk}(B) = \text{rk}(A) + \text{rk}(C)$$

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

Basta il seguente Lemma per dimostrare la Proposizione 7.16.

**Lemma 7.20**

Sia  $K$  struttura di CW-complesso finito su  $X$ . Allora:

$$\sum_n (-1)^n \text{rk}(C_n(K)) = \sum_n (-1)^n \text{rk}(H_n(X))$$

*Dimostrazione.* Scriviamo la successione esatta:

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

del complesso cellulare di  $K$ . Facciamo un'induzione su  $n$ :

- $n = 1$ : possiamo scrivere la successione esatta:

$$0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow C_0 = Z_0 \longrightarrow H_0(C) \longrightarrow 0$$

e allo stesso tempo, dato che in questo caso  $Z_1 = H_1(C)$ :

$$0 \longrightarrow H_1(C) \longrightarrow C_1 \longrightarrow B_0 \longrightarrow 0$$

quindi applicando la proprietà (2) del rango:

$$\begin{aligned} \text{rk}(C_0) - \text{rk}(C_1) &= \text{rk}(H_0(C)) + \text{rk}(B_0) - \text{rk}(H_1(C)) - \text{rk}(B_0) \\ &= \text{rk}(H_0(C)) - \text{rk}(H_1(C)) \end{aligned}$$

- $n > 1$ : consideriamo il complesso  $C'$  dato da:

$$C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Abbiamo le successioni esatte analoghe al caso  $n = 1$ :

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

$$0 \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0 \tag{7.2}$$

Inoltre, sappiamo che:

$$H_i(C) = H_i(C') \quad \forall i \leq n-2 \tag{7.3}$$

ed anche che:

$$H_{n-1}(C') = Z_{n-1}(C) \tag{7.4}$$

Unendo tutto questo, calcoliamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk}(C_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(C'_i) + (-1)^n \text{rk}(C_n) \\ &\stackrel{7.2}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(C'_i) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) \\ &\stackrel{\text{hp}}{=} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \text{rk}(H_i(C')) + (-1)^{n-1} \text{rk}(H_{n-1}(C')) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) \\ &\stackrel{7.1+7.3}{=} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \text{rk}(H_i(C')) + (-1)^{n-1} (\text{rk} B_{n-1} + \text{rk}(H_{n-1}(C))) + \\ &\quad + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk}(H_i(C)) \end{aligned}$$

Segue la tesi. □

**Corollario 7.21**

Sia  $K$  struttura di CW-complesso finito su  $X$ . Allora:

$$\chi(K) = \sum_n (-1)^n \text{rk}(H_n(X))$$

quindi la caratteristica di Eulero è invariante per la struttura  $K$  di  $X$ .

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Lemma precedente. □

**Osservazione 7.5**

Sia  $f : X \rightarrow Y$  mappa cellulare tra spazi con struttura di CW-complesso:  $K = \{K^n\}$  per  $X$  e  $L = \{L^n\}$  per  $Y$ , allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(K^n) \subset L^n$$

Abbiamo allora il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(K^n) & \longrightarrow & H_n(K^n, K^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(K^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(K^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varepsilon_n & & \downarrow f_n & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(L^n) & \longrightarrow & H_n(L^n, L^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(L^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(L^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove  $f_n$  e  $\varphi_n$  sono indotte da  $f$ . Segue che:

$$\begin{array}{ccc} C_n(K) & \xrightarrow{\varphi_n} & C_n(L) \\ \downarrow d_n & & \downarrow d_n \\ C_{n-1}(K) & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & C_{n-1}(L) \end{array}$$

deve commutare, in quanto commuta il diagramma sopra. Ma allora  $\varphi_n$  induce un omomorfismo in omologia cellulare.

**Teorema 7.22**

Sia  $\theta_n$  l'isomorfismo del Teorema 7.13. Siano  $f_n$  e  $\varphi_n$  mappe come sopra, indotte da  $f : X \rightarrow Y$  cellulare. Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{\theta_n} & H_n(K) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \varphi_* \\ H_n(Y) & \xrightarrow{\theta_n} & H_n(L) \end{array}$$

*Dimostrazione.* Segue dalla commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X) & \xleftarrow{k_n} & H_n(K^n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(K^n, K^{n-1}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_n & & \downarrow \varphi_n \\ H_n(Y) & \xleftarrow{k_n} & H_n(L^n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(L^n, L^{n-1}) \end{array}$$

per cui anche il diagramma dell'enunciato commuta. □

Segue che non solo  $X$  e  $K$  corrispondono in omologia, ma anche le mappe cellulari associate corrispondono.

### 7.3.1 Calcolo delle mappe $d_n$ e $\varphi_n$

Sia  $X$  spazio topologico ottenuto da  $A$  attaccando delle  $n$ -celle. Abbiamo già visto l'isomorfismo:

$$\Phi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \longrightarrow H_n(X, A)$$

in quanto  $\Phi$  è iniettiva e genera tutto  $H_n(X, A)$  con la sua immagine.

Possiamo descrivere l'inversa di  $\Phi$ ?

Sia  $e = E_\lambda^n$  una  $n$ -cella. Allora vi è un omomorfismo indotto dall'inclusione:

$$p_n^e : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, X \setminus e)$$

Per escissione c'è un isomorfismo:

$$H_n(X, X \setminus e) \xrightarrow{\sim} H_n(D^n, S^{n-1})$$

e la composizione di queste mappe è l'inverso sulla singola componente  $\lambda$ . Infatti:

$$H_n(X, A) \xrightarrow{p_n^e} H_n(X, X \setminus e) \xrightarrow{\sim} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$$

Quindi dato  $X$  un CW-complesso con  $K = \{K^n\}$  struttura di CW, il bordo della tripla  $(K^n, K^{n-1}, K^{n-2})$  è:

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$

e corrisponde tramite  $\Phi$  a:

$$\bigoplus_{\lambda} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \simeq H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \simeq \bigoplus_{\mu} H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2})$$

Essendoci agli estremi somme dirette di copie di  $\mathbb{Z}$ , ne segue che  $\Phi$  corrisponde ad una matrice.

Consideriamo quindi le entrate di questa matrice, sono delle mappe  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ :

$$m(\lambda, \mu) : H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2})$$

Considerando la mappa di incollamento, vediamo la composizione:

$$S_\lambda^{n-1} \xrightarrow{f_\lambda} K^{n-1} \longrightarrow K^{n-1}/(K^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1}) \simeq D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2} \simeq S^{n-1}$$

Quello che si ottiene è quindi una mappa:

$$L^{\lambda, \mu} : S_\lambda^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

essendo una mappa tra  $S^{n-1}$  ha un grado.

#### Definizione 7.23 - Numero di Incidenza

Il grado della mappa  $L^{\lambda, \mu}$  che indicheremo  $d(\lambda, \mu)$  è il numero di incidenza della coppia di celle  $\lambda, \mu$ .

#### Osservazione 7.6

L'unico caso speciale è il caso  $n = 1$ , cioè quello dei grafi.

In tal caso, il numero di incidenza sarà 0 o  $\pm 1$ .

**Proposizione 7.24**

Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{m(\lambda, \mu)} & H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \rho \\ \tilde{H}_{n-1}(S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{L^{\lambda, \mu}} & \tilde{H}_{n-1}(D_\lambda^{n-1}/S_\mu^{n-2}) \end{array}$$

dove  $\partial$  è la mappa della successione di  $(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$  e la mappa  $\rho$  è il passaggio al quoziente.

*Dimostrazione.* Consideriamo il diagramma commutativo in nero, dove denotiamo  $e = e_\mu^{n-1}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(K^{n-1}) & \xrightarrow{j^{n-1}} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \xrightarrow{p_*} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \\ \Phi_\lambda \uparrow & & f_*^\lambda \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S_\lambda^{n-1}) & & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-1} \setminus e) & \rightarrow & H_{n-1}(K^{n-1}/(K^{n-1} \setminus e)) \\ & & & & \downarrow L^{\lambda, \mu} & & \uparrow \\ & & & & H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}) & \xrightarrow{\rho} & H_{n-1}(D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2}) \end{array}$$

$m(\lambda, \mu)$  (red arrow from  $H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$  to  $H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2})$ )

Allora segue la commutatività del diagramma rosso. Questo conclude.  $\square$

**Osservazione 7.7 - Unicità a meno del segno**

La definizione di numero di incidenza usa la mappa caratteristica delle celle e una delle equivalenza omotopiche tra  $D^n/S^{n-1}$  ed  $S^n$ . In particolare, le scelte richieste dalla costruzione determinano il numero di incidenza a meno del segno.

Quindi queste mappe non sono completamente determinate dalla struttura  $\{K^n\}$  di CW-complesso, cioè non danno informazioni generali sulla struttura di CW-complesso.

**7.3.2 Proiettivo Reale**

Consideriamo la sfera  $S^n$  come un CW-complesso costituito dall'unione di 2  $i$ -celle disgiunte  $E_+^i$  e  $E_-^i$  per  $i = 0, \dots, n$ .

Il complesso cellulare associato è:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Calcoliamo quindi in omologia che:

$$H_i(S^i, S^{i-1}) = H_i(D_+^i, S^{i-1}) \oplus H_i(D_-^i, S^{i-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Inoltre osserviamo che la mappa antipodale  $\alpha : S^n \rightarrow S^n$  si restringe alle mappe antipodali  $S^{i-1} \rightarrow S^{i-1}$  che sono omeomorfismi per ogni  $i$ . Quindi<sup>2</sup> dato  $x^i$  generatore di  $H_i(D_+^i, S^{i-1})$  vale che  $\alpha_* x^i$  genera  $H_i(D_-^i, S^{i-1})$ .

<sup>2</sup>Segue dal fatto che  $\alpha$  omeomorfismo implica  $\alpha_*$  isomorfismo.

**Lemma 7.25**

Vale per ogni  $i$  che:

$$d_i(x^i) = \pm (\alpha_* x^{i-1} + (-1)^i x^{i-1})$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $d_i$  è data dalla composizione:

$$H_i(S^i, S^{i-1}) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(S^{i-1}) \xrightarrow{j_{i-1}} H_{i-1}(S^{i-1}, S^{i-2})$$

e che la mappa  $\alpha_*$  commuta con  $\partial$  e con  $j$ . Inoltre, ha grado  $(-1)^i$  su  $S^{i-1}$ . Quindi:

$$d_i \alpha_* = j_{i-1} \circ \partial \circ \alpha_* = j_{i-1} \circ \alpha_* \circ \partial = (-1)^i j_{i-1} \circ \partial = (-1)^i d_i$$

Ma allora segue subito che  $\alpha_* x^i + (-1)^{i+1} x^i \in \ker d_i$ . Dato che:

$$H_q(S^n) = \begin{cases} 0 & q \neq 0, n \\ \mathbb{Z} & q = 0, n \end{cases}$$

segue che  $\ker d_i = \text{Im } d_{i+1}$  per  $i = 0, \dots, n-1$  e hanno tutti rango 1. Ma allora  $d_i x^i \neq 0$ , altrimenti pure  $d_i(\alpha_* x^i) = 0$  e dato che  $\{x^i, \alpha_* x^i\}$  sono generatori per  $H_i(S^i)$  ne seguirebbe che  $\text{rk Im } d_i = 0$ , assurdo.

Quindi  $\alpha_* x^i - (-1)^{i+1} x^i$  sta nell'immagine. Di più, la genera perchè dato un elemento generico  $ax^i + b\alpha_* x^i \in H_i(S^i)$  che si annulla, vale che:

$$0 = d_i(ax^i + b\alpha_* x^i) = (a + b(-1)^i)d_i(x^i)$$

ma  $d_i(x^i) \neq 0$ , quindi  $a = (-1)^{i+1}b$  cioè l'elemento è un multiplo di  $\alpha_* x^i + (-1)^{i+1}x^i$ . Ma banalmente anche  $d_{i+1}(x^{i+1}) = (-1)^{i+1}d_{i+1}(\alpha_* x^{i+1})$  genera  $\text{Im } d_{i+1}$ . C'è quindi l'uguaglianza a meno del segno:

$$d_{i+1}(x^{i+1}) = \pm (\alpha_* x^i + (-1)^{i+1}x^i)$$

che è la tesi. □

**Teorema 7.26**

Il complesso algebrico associato a  $\mathbb{R}P^n$  è:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1+(-1)^n} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ n & & n-1 & & \dots & & 2 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

Ne segue che in omologia:

$$H_q(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 \mid q \text{ e } q > 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{se } 2 \nmid q \text{ e } 0 < q < n \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

e per  $q = n$ :

$$H_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 \mid n \\ \mathbb{Z} & \text{se } 2 \nmid n \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa  $S^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^n$  antipodale. Sappiamo che il complesso cellulare di  $S^n$  si può scrivere tramite generatori come:

$$C_i^{CW}(S^n) = H_i(D_+, S^{i-1}) \oplus H_i(D_-, S^{i-1}) = \langle x^i \rangle \oplus \langle \alpha_* x^i \rangle$$

mentre il complesso cellulare di  $\mathbb{R}P^n$  è:

$$C_i^{CW}(\mathbb{R}P^n) = H_i(D^i, S^{i-1}) = \langle y^i \rangle$$

con  $y_i$  generatore. Possiamo scegliere  $y^i$  in modo che:

$$\pi : \begin{array}{ccc} x^i & \mapsto & y^i \\ \alpha_* x^i & \mapsto & y^i \end{array}$$

Si ottiene quindi che valutando la mappa di bordo di  $\mathbb{R}P^n$ :

$$\begin{aligned} d_i(y^i) &= d_i(\pi(x^i)) = \pi(d_i(x^i)) = \pi(\pm(\alpha_* x^{i-1} + (-1)^i x^{i-1})) \\ &= \pm(y^{i-1} + (-1)^i y^{i-1}) = \pm(1 + (-1)^i)y^{i-1} \end{aligned}$$

quindi la mappa di bordo di  $\mathbb{R}P^n$  sarà:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{-2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Segue per esattezza che i gruppi di omologia sono quelli cercati. □

# Omologia a coefficienti in un modulo

Sia  $C.(C_n, \partial_n)$  un complesso di catene di gruppi abeliani liberi. Sia  $G$  un gruppo abeliano (o un anello). Siano  $A, B$  moduli su un anello  $R$  (o gruppi abeliani soltanto).

**Definizione 8.1 - Prodotto Tensoriale**

Definiamo il prodotto tensoriale tra  $A$  e  $B$  denotato  $A \otimes_R B$  come l' $R$ -modulo generato dagli elementi  $a \otimes b$  con  $a \in A$  e  $b \in B$  con le relazioni, per ogni  $r \in R$ :

$$\begin{cases} r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes (rb) \\ a_1 \otimes b + a_2 \otimes b = (a_1 + a_2) \otimes b \\ a \otimes b_1 + a \otimes b_2 = a \otimes (b_1 + b_2) \end{cases}$$

ovvero  $\otimes$  si comporta bene per prodotto in  $R$ , somma in  $A$  e somma in  $B$ .

**Osservazione 8.1 - Esempi**

Alcuni esempi notevoli sono che  $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m \simeq \mathbb{Z}/m$  e che  $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \simeq \mathbb{Z}/MCD(m, n)$ .

## 8.1 Omologia a Coefficienti in $G$

Consideriamo il complesso dato dal prodotto tensoriale di  $C.$  con  $G$ :

$$\dots \longrightarrow C_i \otimes G \longrightarrow C_{i-1} \otimes G \longrightarrow \dots$$

dove la mappa di bordo sarà data da  $\delta_n = \partial_n \otimes id_G$ .

**Definizione 8.2 - Omologia a Coefficienti in  $G$**

Dato il complesso a coefficienti in  $G$ , definiamo:

- $Z_n(X; G) = \ker \delta_n$  come gli  $n$ -cicli
- $B_n(X; G) = \text{Im } \delta_{n+1}$  come gli  $n$ -bordi

Si può quindi definire l'omologia:

$$H.(X; G) = H.(C. \otimes G) = Z_n(X; G) / B_n(X; G)$$

Analogamente si può definire l'omologia singolare relativa a coefficienti in  $G$ . Si dimostra che  $C.$  e  $H.$  sono funtori covarianti rispetto ad  $X$ ,  $(X, A)$  ed in particolare è covariante il funtore:

$$G \rightsquigarrow H_n(X; G)$$

**Lemma 8.3 - Successioni esatte e Tensore**

Data una successione esatta di gruppi abeliani:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

è esatta anche la successione:

$$A \otimes G \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

**Osservazione 8.2 - Non-esattezza iniziale**

Supponiamo di avere la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

e tensoriamo per  $\mathbb{Z}/2$ :

$$0 \cdots \times \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

non c'è esattezza iniziale, in quanto abbiamo la mappa 0 adiacente.

Però c'è un'ipotesi aggiuntiva che garantisce l'esattezza di tutta la successione:

**Lemma 8.4 - Successioni esatta completa e Tensore**

Data una successione esatta di gruppi abeliani, con  $C$  libero:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

è esatta anche la successione:

$$0 \longrightarrow A \otimes G \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Basta vedere che con l'ipotesi aggiuntiva la successione "spezza", ovvero che esiste una sezione:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \longrightarrow 0$$

In questo modo si otterrebbe che  $B \simeq A \oplus s(C)$  e passando ai tensori si ottiene che  $B \otimes G \simeq (A \otimes G) \oplus (s(C) \otimes G)$ . Questo conclude.

Ma  $s$  esiste perchè  $C$  è libero quindi dati  $c_i$  generatori di  $C$ , per surgettività di  $g$  esistono  $b_i$  tali che  $g(b_i) = c_i$ . Si può allora definire la mappa  $s$  in modo che  $s(c_i) = b_i$ . □

## 8.2 Co-omologia a Coefficienti in $G$

Consideriamo il complesso dato dai gruppi  $\text{hom}$  da  $C$  a  $G$ :

$$\dots \longrightarrow \text{hom}(C_i, G) \longrightarrow \text{hom}(C_{i-1}, G) \longrightarrow \dots$$

dove la mappa di bordo sarà data da  $\delta^n(\varphi) = (-1)^{i+1}\varphi \circ \partial_n$ .

### Definizione 8.5 - Co-omologia a Coefficienti in $G$

Dato il complesso a coefficienti in  $G$ , definiamo:

- $Z^n(X; G) = \ker \delta^n$  come gli  $n$ -cocicli
- $B^n(X; G) = \text{Im } \delta^{n-1}$  come gli  $n$ -cobordi

Si può quindi definire la co-omologia:

$$H^n(X; G) = H^n(\text{hom}(C_i, G)) = Z^n(X; G)/B^n(X; G)$$

Analogamente si può definire la co-omologia singolare relativa a coefficienti in  $G$ . Si dimostra che  $C$  e  $H$  sono funtori controvarianti rispetto ad  $X$ ,  $(X, A)$  ed in particolare è covariante il funtore

$$G \rightsquigarrow H^n(X; G).$$

### Lemma 8.6 - Successioni esatte e $\text{hom}$

Data una successione esatta di gruppi abeliani:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

è esatta anche la successione:

$$0 \longleftarrow \text{hom}(A, G) \longleftarrow \text{hom}(B, G) \longleftarrow \text{hom}(C, G)$$

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

### Osservazione 8.3 - Non-esattezza finale

Supponiamo di avere la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e passiamo a  $\text{hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ :

$$0 \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \text{hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0 \longleftarrow \text{hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longleftarrow 0$$

non c'è esattezza iniziale, in quanto abbiamo la mappa 0 adiacente.

Però c'è un'ipotesi aggiuntiva che garantisce l'esattezza di tutta la successione:

### Lemma 8.7 - Successione esatta completa per $\text{hom}$

Data una successione esatta di gruppi abeliani, con  $C$  libero:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

è esatta anche la successione:

$$0 \longleftarrow \text{hom}(A, G) \longleftarrow \text{hom}(B, G) \longleftarrow \text{hom}(C, G) \longleftarrow 0$$

*Dimostrazione.* Basta vedere come nel caso precedente che con l'ipotesi aggiuntiva la successione "spezza", ovvero che esiste una sezione:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \longrightarrow 0$$

In questo modo si ottiene che  $B \simeq A \oplus s(C)$  e passando al funtore  $\text{hom}(\cdot, G)$  si ottiene  $\text{hom}(B, G) \simeq \text{hom}(A, G) \oplus \text{hom}(s(C), G)$ , che conclude.  $\square$

### 8.3 Funtori Tor ed Ext

Sia  $R$  un PID. Nella categoria degli  $R$ -moduli definiamo allora:

#### Definizione 8.8 - Risoluzione Libera

La successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

si dice risoluzione libera di  $A$  se  $F_0$  è libero (e quindi anche  $F_1$  lo è).

#### Definizione 8.9 - Risoluzione Standard

Definiamo una risoluzione libera particolare, che chiameremo standard. Consideriamo  $F(A) = "R\text{-modulo libero generato da elementi di } A"$  e definiamo la mappa:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \longrightarrow & A \\ \sum n_a[a] & \longmapsto & \sum n_a a \end{array}$$

Chiamiamo allora  $K(A) = \ker(F(A) \rightarrow A)$  in modo da ottenere la risoluzione libera:

$$0 \longrightarrow K(A) \longrightarrow F(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Possiamo allora dare la prima definizione.

#### Definizione 8.10 - Tor

Dati  $A, G$  un  $R$ -moduli, possiamo definire:

$$\text{Tor}(A; G) = \ker \left( K(A) \otimes G \xrightarrow{i \otimes id_G} F(A) \otimes G \right)$$

#### Lemma 8.11

Dati  $f : A \rightarrow A'$  e delle corrispondenti risoluzioni libere nelle righe del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{i} & F_0 & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & \swarrow s & \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & F'_1 & \xrightarrow{i'} & F'_0 & \xrightarrow{p'} & A' \longrightarrow 0 \end{array}$$

esistono le mappe  $f_1, f_0$  che fanno commutare il diagramma.

Inoltre, se  $f'_1, f'_0$  sono un'altra scelta per questi omomorfismi, allora  $\exists s : F_0 \rightarrow F'_1$  tale che:

$$f_0 - f'_0 = i' s \quad e \quad f_1 - f'_1 = s i$$

Ciò equivale a dire che  $f_0 \sim f'_0$  e che  $f_1 \sim f'_1$ .

*Dimostrazione.* Definiamo  $f_0$  in modo che commuti:  $F_0$  è libero quindi scelti dei generatori  $x_i$  di  $F_0$  si possono scegliere le immagini  $f_0(x_i) \in (p')^{-1}(f(p(x_i)))$  affinché commuti. Poichè  $p' \circ f_0 \circ i = 0$  (per esattezza della prima riga e commutatività), esiste un'unica  $f_1$  tale che:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{i} & F_0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ F'_1 & \xrightarrow{i'} & F'_0 \end{array}$$

Infatti si può fare l'argomento analogo a prima e l'unicità di  $f_1$  segue dall'iniettività di  $i'$ . Prendiamo altre 2 mappe  $f'_0$  e  $f'_1$  che funzionano. Allora per commutatività:

$$p' \circ (f_0 - f'_0) = f \circ p - f \circ p = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(f_0 - f'_0) = \ker p'$$

Quindi  $\exists s : F_0 \rightarrow F'_1$  tale che:

$$i' \circ s = f_0 - f'_0$$

Inoltre, sempre per commutatività:

$$i' \circ (f_1 - f'_1) = (f_0 - f'_0) \circ i = i' \circ s \circ i$$

Poichè  $i'$  è iniettiva,  $f_1 - f'_1 = i' \circ s$ . □

**Proposizione 8.12**

Il funtore  $\text{Tor}(A, G)$  è naturalmente isomorfo a:

$$\ker(F_1 \otimes G \rightarrow F_0 \otimes G)$$

per qualsiasi risoluzione libera di  $A$  del tipo  $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo 2 risoluzioni di  $A$ , delle quali una quella standard. Otteniamo un diagramma del tipo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow id \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{i'} & F_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \downarrow id \\ 0 & \longrightarrow & K(A) & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Si potrebbero quindi dare 2 definizioni per  $\text{Tor}(A, G)$ , ovvero:

$$\begin{cases} \text{Tor}(A, G) = \ker(i \otimes id_G) = H_1(K(A) \otimes G \rightarrow F(A) \otimes G) \\ \text{Tor}(A, G) = \ker(i' \otimes id_G) = H_1(F_1 \otimes G \rightarrow F_0 \otimes G) \end{cases}$$

Ma dal diagramma sopra si otterrebbe anche il seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & \text{id} \downarrow \downarrow g_1 \circ f_1 & & \text{id} \downarrow \downarrow g_0 \circ f_0 & & \downarrow \text{id} \\
 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i'} & F(A) & \longrightarrow & A \longrightarrow 0
 \end{array}$$

quindi per il Lemma precedente,  $g_1 \circ f_1 \sim \text{id}_{K(A)}$  e  $g_0 \circ f_0 \sim \text{id}_{F(A)}$ . Questo si può fare anche con  $f_1 \circ g_1$  e con  $f_0 \circ g_0$  quindi passando in omologia a coefficienti in  $G$ :

$$H_1(F_1 \otimes G \rightarrow F_0 \otimes G) \simeq H_1(K(A) \otimes G \rightarrow F(A) \otimes G)$$

ovvero la tesi. □

### Proposizione 8.13 - Proprietà di Tor

Vediamo diverse proprietà.

1. Sia  $A$  un gruppo abeliano libero. Allora  $\text{Tor}(A, G) = 0$ .
2. Vale che  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n, G) = \{g \in G \mid ng = 0\}$ .
3. Se  $G$  è libero da torsione, allora  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n, G) = 0$ .
4. Vale che  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/\text{MCD}(m, n)$ .
5. Vale che  $\text{Tor}(A_1 \oplus A_2, G) = \text{Tor}(A_1, G) \oplus \text{Tor}(A_2, G)$ .

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

Diamo una definizione alternativa di Tor, che vedremo essere equivalente.

### Definizione 8.14 - Tor'

Consideriamo una risoluzione libera di  $G$  del tipo:

$$0 \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{i} Q_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

allora definiamo il funtore  $\text{Tor}'$  come:

$$\text{Tor}'(A, G) = \ker\{\text{id}_A \otimes i : A \otimes Q_1 \longrightarrow A \otimes Q_0\}$$

### Proposizione 8.15 - Equivalenza di Tor e Tor'

Vale che  $\text{Tor}(A, G) = \text{Tor}'(A, G)$ .

Possiamo allora denotare  $\text{Tor}(A, G) = A * G = G * A$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo le risoluzioni libere rispettivamente di  $A$  e  $G$ :

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad 0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

Tensorizzando l'una con l'altra si ottiene l'ultima riga del seguente diagramma commutativo (che si completa partendo dall'ultima riga):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \text{Tor}(A, G) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_1 \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Tor}'(A, G) & \longrightarrow & A \otimes Q_1 & \longrightarrow & A \otimes Q_0 & \longrightarrow & A \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Concentriamoci sulla porzione di diagramma data dalle prime 2 righe:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_1 \otimes G & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes G \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Passando all'omologia relativa, si ottiene, applicando il "Lemma del Serpente" analogo al Teorema 3.8:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker(\alpha) & \longrightarrow & \ker(\beta) & \longrightarrow & \ker(\gamma) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 \text{coker}(\alpha) & \longleftarrow & \text{coker}(\beta) & \longrightarrow & \text{coker}(\gamma) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

che è una successione esatta lunga. Ma  $\alpha$  e  $\beta$  sono iniettive quindi  $\ker(\alpha) = \ker(\beta) = 0$ , segue che:

$$\text{Tor}(A, G) = \ker(\gamma) = \ker(\text{coker}(\alpha) \rightarrow \text{coker}(\beta))$$

Guardando ora al diagramma iniziale, abbiamo che  $\text{coker}(\alpha) = A \otimes Q_1$  e che  $\text{coker}(\beta) = A \otimes Q_0$ . Quindi:

$$\text{Tor}(A, G) = \ker(A \otimes Q_1 \rightarrow A \otimes Q_0) = \text{Tor}'(A, G)$$

ovvero la tesi. □

**Definizione 8.16 - Ext**

Consideriamo la risoluzione libera:

$$0 \longrightarrow K(A) \xrightarrow{i} F(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Definiamo allora il funtore Ext come:

$$\text{Ext}(A, G) = \text{coker}(i^* : \text{hom}(F(A), G) \rightarrow \text{hom}(K(A), G))$$

Come per il funtore Tor, si dimostra che Ext non dipende dalla scelta della risoluzione libera.

**Proposizione 8.17 - Proprietà di Ext**

Valgono le seguenti proprietà.

1.  $\text{Ext}(A, B) = 0$  se  $A$  è abeliano libero.
2.  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n, B) = B/nB$ .
3.  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n, B) = 0$  se  $B = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .
4.  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) = \mathbb{Z}/\text{MCD}(n, m)$ .
5.  $\text{Ext}(A_1 \oplus A_2, B) = \text{Ext}(A_1, B) \oplus \text{Ext}(A_2, B)$ .

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

Vediamo come applicare questi strumenti alla nostra teoria su omologia e co-omologia a coefficienti in  $G$ .

Risolveremo il "problema" dato dalla non esattezza dell'intera successione quando si passa in omologia.

**Proposizione 8.18 - Teorema dei Coefficienti Universali per l'omologia**

Sia  $(C, \partial)$  un complesso di catene di moduli liberi. Allora la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow H_q(C) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_q(C \otimes G) \xrightarrow{\beta} \text{Tor}(H_{q-1}(C), G) \longrightarrow 0$$

La successione è anche naturale e spezza. Inoltre, possiamo scrivere esplicitamente:

$$\alpha : [z] \otimes g \longmapsto [z \otimes g]$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \overset{\leftarrow}{\hookrightarrow} B_{n-1} \longrightarrow 0 \quad (8.1)$$

dove c'è la sezione in quanto  $B_{n-1}$  libero. Ne segue che è esatta la successione:

$$0 \longrightarrow Z_n \otimes G \longrightarrow C_n \otimes G \overset{\leftarrow}{\hookrightarrow} B_{n-1} \otimes G \longrightarrow 0 \quad (8.2)$$

e dato che (8.1) spezza, anche (8.2) lo fa.

Facendo variare  $n$ , si ottiene quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_n \otimes G & \longrightarrow & C_n \otimes G & \longrightarrow & B_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \partial \otimes id_G & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & C_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & B_{n-2} \otimes G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-2} \otimes G & \longrightarrow & C_{n-2} \otimes G & \longrightarrow & B_{n-3} \otimes G & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (8.3)$$

Ma allora esiste la successione esatta lunga in omologia (dove l'omologia di  $Z_n \otimes G$  resta  $Z_n \otimes G$  dato che la mappa di bordo è la mappa 0, e così anche per  $B_{n-1} \otimes G$ ):

$$\dots \rightarrow B_n \otimes G \overset{*}{\rightarrow} Z_n \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C_n \otimes G) \rightarrow B_{n-1} \otimes G \overset{*}{\rightarrow} Z_{n-1} \otimes G \rightarrow \dots \quad (8.4)$$

dove l'omomorfismo di connessione  $*$  si verifica (per esercizio) essere proprio  $i \otimes id_G$ . Possiamo inoltre prendere un'altra successione:

$$0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{i} Z_n \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0$$

e tensorizzando si perde l'esattezza all'inizio:

$$B_n \otimes G \xrightarrow{i \otimes id_G} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G \longrightarrow 0$$

ma si può osservare che  $\text{coker}(i \otimes id_G) = H_n(C) \otimes G$ . Si può riscrivere la successione (8.4):

$$H_n(C) \otimes G = \text{coker}(i \otimes id_G) \xrightarrow{\alpha} H_n(C_n \otimes G) \rightarrow B_{n-1} \otimes G \rightarrow Z_{n-1} \otimes G \quad (8.5)$$

che continua ad essere esatta dato che  $\alpha$  passa bene al quoziente per  $(i \otimes id_G)_*(B_n \otimes G)$  del coker.

In particolare vale proprio che:

$$\alpha : [z] \otimes g \mapsto [z \otimes g]$$

Vediamo che anche per  $n - 1$  è esatta la successione:

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

quindi anche passando ai tensori:

$$\text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow B_{n-1} \otimes G \longrightarrow Z_{n-1} \otimes G \longrightarrow H_{n-1}(C) \otimes G \longrightarrow 0$$

Questo implica per esattezza che  $\ker(B_{n-1} \otimes G \rightarrow Z_{n-1} \otimes G) = \text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$ . Sostituendo nella successione (8.5) si ottiene la tesi:

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C_n \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0$$

Resta da vedere che la successione spezza. Prendiamo  $r : C_n \rightarrow Z_n$  proiezione che spezza la successione:

$$0 \longrightarrow Z_n \xleftarrow{r} C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Ma allora c'è la successione:

$$Z_n(C \otimes G) \subseteq C_n \otimes G \xrightarrow{r \otimes id_G} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G$$

dove la mappa  $r \otimes id_G$  manda  $B_n(C \otimes G)$  in 0 (dato che manda a 0 tutto  $B_n \otimes G$ ). Segue che  $r \otimes id_G$  induce una mappa:

$$\rho : H_n(C \otimes G) \longrightarrow H_n(C) \otimes G$$

tale che  $\rho \circ \alpha = id$ . Questo spezza la successione. □

**Proposizione 8.19 - Teorema dei Coefficienti Universali per la co-omologia**  
 Sia  $(C, \partial)$  un complesso di catene di moduli liberi (su  $R$  PID). Allora la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C, G) \xrightarrow{\alpha} \text{hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

La successione è anche naturale rispetto alle mappe di catene e rispetto a omomorfismi di moduli  $G$ . La successione spezza in modo naturale rispetto a  $G$  ma in modo non naturale rispetto a  $C$ .

Inoltre, possiamo scrivere esplicitamente per  $\varphi : C_n \rightarrow G$ :

$$\alpha(\varphi)[c] = \varphi(c)$$

*Dimostrazione.* Come nel Teorema precedente, partiamo dalla successione esatta:

$$0 \longrightarrow Z_n \xleftarrow{r} C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

da cui si ottiene passando al funtore hom:

$$0 \longleftarrow \text{hom}(Z_n, G) \longleftarrow \text{hom}(C_n, G) \longleftarrow \text{hom}(B_{n-1}, G) \longleftarrow 0$$

Prendiamo le successioni esatte al variare di  $n$ , ottenendo così un diagramma analogo a quello (8.3). Si ottiene così la successione esatta lunga:

$$\text{hom}(B_n, G) \xleftarrow{d_n} \text{hom}(Z_n, G) \longleftarrow H^n(C; G) \longleftarrow \text{hom}(B_{n-1}, G) \xleftarrow{d_{n-1}} \text{hom}(Z_{n-1}, G) \quad (8.6)$$

da cui con opportune successioni esatte otteniamo:

$$0 \longleftarrow \ker d_n \longleftarrow H^n(C; G) \longleftarrow \text{coker } d_{n-1} \longleftarrow 0$$

Come nella dimostrazione precedente,  $d_n$  è indotto dall'inclusione  $B_n \subset Z_n$  quindi c'è la successione esatta:

$$0 \longrightarrow B_n \subset Z_n \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0$$

Passando nuovamente al funtore hom si trova che:

$$\text{Ext}(H_n(C), G) \longleftarrow \text{hom}(B_n, G) \xleftarrow{d_n} \text{hom}(Z_n, G) \longleftarrow \text{hom}(H_n(C), G) \longleftarrow 0$$

Quindi per esattezza segue che  $\text{coker } d_{n-1} = \text{Ext}(H_{n-1}(C), G)$  ed anche che  $\ker d_n = \text{hom}(H_n(C), G)$ . Sostituendo nella successione (8.6):

$$0 \longleftarrow \text{hom}(H_n(C)) \longleftarrow H^n(C; G) \longleftarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longleftarrow 0$$

che è la successione del Teorema. Vediamo lo spezzamento dalla mappa  $r : C_n \rightarrow Z_n$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^n(\text{hom}(C_n, G)) = \ker \delta & \hookrightarrow & \text{hom}(C_n, G) & \xrightarrow{\delta} & \text{hom}(C_{n+1}, G) \\ & & \uparrow \text{red} & & \uparrow r^* & & \uparrow d_{n+1}^* \\ 0 & \longrightarrow & \text{hom}(H_n(C_n), G) = \ker i^* & \longrightarrow & \text{hom}(Z_n, G) & \xrightarrow{i^*} & \text{hom}(B_n, G) \end{array}$$

Vogliamo costruire la mappa rossa in modo che il diagramma commuti passando in omologia. Dato  $\varphi \in \ker i^*$ , si vede che  $r^*(\varphi) \in \ker \delta$  e questo induce una mappa:

$$\begin{array}{ccc} \ker i^* = \text{hom}(H_n(C), G) & \longrightarrow & H^n(C, G) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ r \end{array}$$

che completa e fa commutare il diagramma in omologia. Questo dà lo spezzamento.  $\square$

**Corollario 8.20**

Se  $H_{n-1}(C)$  è libero, allora la mappa  $\alpha : H^n(C; G) \rightarrow \text{hom}(H_n(C), G)$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Teorema 8.19. □

**Corollario 8.21**

Sia  $(C', \delta)$  complesso di co-catene di  $R$ -moduli liberi.  $C'$  è una successione esatta che spezza:

$$0 \longrightarrow H^q(C') \otimes G \longrightarrow H^q(C' \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{q+1}(C'), G) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Possiamo vedere le co-catene come catene con l'ordine opposto sugli indici. Quindi il risultato del corollario è una riscrittura del Teorema 8.18. □

**Corollario 8.22**

Se  $(C, \delta)$  è un complesso di catene di  $R$ -moduli liberi e  $G$  è un  $R$ -modulo finitamente generato, allora c'è la successione esatta:

$$0 \longrightarrow H^q(C) \otimes G \longrightarrow H^q(C; G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{q+1}(C), G) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Usiamo il fatto che per  $G$  finitamente generato vale che  $\text{hom}(C_n, R) \otimes G \simeq \text{hom}(C_n, G)$ .

Basta allora applicare i risultati del Corollario 8.21. □

## 8.4 Omologia e Co-omologia Relativa

Data la coppia  $(X, A)$  abbiamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow C_n(A) \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\quad \overset{s}{\longleftarrow} \quad} C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

con la sezione  $s : C_n(X, A) \rightarrow C_n(X)$  che esiste in quanto  $C_n(X, A)$  libero.

Possiamo allora fare delle costruzioni analoghe:

- Tensorizzando c'è ancora la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow C_n(A; G) \longrightarrow C_n(X; G) \longrightarrow C_n(X, A; G) \longrightarrow 0$$

dalla quale si ottiene la successione esatta lunga per l'omologia relativa a coefficienti in  $G$ , cioè  $H(\cdot, \cdot; G)$ .

- Applicando il funtore  $\text{hom}$  si ottiene sempre una successione esatta:

$$0 \longleftarrow \begin{array}{ccc} C^m(A; G) & \longleftarrow & C^m(X; G) & \longleftarrow & C^m(X, A; G) & \longleftarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \text{hom}(C_n(A), G) & & \text{hom}(C_n(X), G) & & \text{hom}(C_n(X, A), G) & & \end{array}$$

Quindi anche in co-omologia c'è la successione esatta lunga della coppia ovvero  $H(X, A; G)$  la co-omologia relativa a coefficienti in  $G$ .

Consideriamo ora le catene degli  $\mathcal{U}$ -piccoli. C'è la successione esatta:

$$0 \longrightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C_n(X) \longrightarrow C_n(X)/C_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

che è di gruppi liberi. Ma in omologia vale che  $H_n^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_n(X)$  quindi per esattezza della successione esatta lunga corrispondente,  $C_n(X)/C_n^{\mathcal{U}}(X)$  ha omologia banale.

Applicando il tensore  $\otimes G$  o  $\text{hom}(\cdot, G)$  alla successione, si ottiene che il Teorema di Mayer-Vietoris 4.5 vale anche per l'omologia/co-omologia a coefficienti in  $G$ .

**Teorema 8.23 - Teorema di Mayer-Vietoris a coefficienti in  $G$**

*Nelle ipotesi del Teorema di Mayer-Vietoris, le seguenti successioni lunghe sono esatte:*

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B, G) \rightarrow H_n(A, G) \oplus H_n(B, G) \rightarrow H_n(X, G) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B, G) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow H^n(A \cap B, G) \leftarrow H^n(A, G) \oplus H^n(B, G) \leftarrow H^n(X, G) \leftarrow H^{n-1}(A \cap B, G) \rightarrow \cdots$$

*Dimostrazione.* Segue dalle osservazioni fatte, ripercorrendo la dimostrazione della successione di Mayer-Vietoris.  $\square$

**Esempio 8.4**

Vediamo alcuni esempi notevoli di quanto appena visto.

- Sfera: vale che i gruppi di co-omologia saranno:

$$H^i(S^n; G) = \begin{cases} G & \text{per } i = 0, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Proiettivo: vale che i gruppi di co-omologia del proiettivo complesso saranno:

$$H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; G) = \begin{cases} G & \text{per } i \leq 2n \text{ e } 2|n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mentre per il proiettivo reale:

$$H^i(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{per } i \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

# Prodotto CUP in Co-omologia

Sia  $A$  un anello commutativo. Vogliamo definire una mappa "prodotto" che sia  $A$ -bilinare:

$$\cup : H^i(X; A) \times H^j(X; A) \longrightarrow H^{i+j}(X; A)$$

e renda  $H(X; A) = \bigoplus_i H^i(X; A)$  un anello graduato con prodotto "graded-commutative", cioè tale che per  $a \in H^i(X; A)$  e per  $b \in H^j(X; A)$  denoteremo  $|a| = i$  e  $|b| = j$  e deve valere:

$$a \cup b = (-1)^{|a|+|b|} b \cup a$$

Partiamo dalla definizione di complesso prodotto.

**Definizione 9.1 - Complesso di catene  $C \otimes D$**

Siano  $(C, d_C)$  e  $(D, d_D)$  complessi di catene. Definiamo il complesso di catene  $C \otimes D$  come:

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$$

dove la mappa di bordo sarà:

$$\begin{aligned} d_n : (C \otimes D)_n &\longrightarrow (C \otimes D)_{n-1} \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^p \alpha \otimes d_D(\beta) \end{aligned}$$

**Definizione 9.2 - Complesso Contraibile**

Un complesso  $(C, d)$  si dice contraibile se  $H_i(C) = 0$  e le mappe  $id \sim 0$  sono omotope.

**Proposizione 9.3 - Tensoriale di Contraibile**

*Il prodotto tensoriale di due complessi di cui uno contraibile è contraibile.*

*Dimostrazione.* Siano  $(C, d_C)$  e  $(D, d_D)$  complessi. Dato  $C$  contraibile, esiste l'omotopia  $k : C_n \rightarrow C_{n+1}$  tale che:

$$id_C = d_C \cdot k + k \cdot d_C$$

Definiamo allora l'omotopia:

$$\begin{aligned} \bar{k} : (C \otimes D)_n &\longrightarrow (C \otimes D)_{n+1} \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto k(\alpha) \otimes \beta \end{aligned}$$

## 9. Prodotto CUP in Co-omologia

Prendiamo a questo punto un elemento  $\alpha \in C_p$ . Vediamo che:

$$\begin{cases} d(\bar{k}(\alpha) \otimes \beta) = d_C \cdot k(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{p+1} k(\alpha) \otimes d_D(\beta) \\ \bar{k}(d(\alpha \otimes \beta)) = k(d_C(\alpha)) \otimes \beta + (-1)^p k(\alpha) \otimes d_D \beta \end{cases}$$

Ne segue che sommando le due equazioni troviamo:

$$(\bar{d}\bar{k} + \bar{k}d)(\alpha \otimes \beta) = (d_C(k(\alpha)) + k(d_C(\alpha))) \otimes \beta = \alpha \otimes \beta$$

quindi  $\bar{k}$  è omotopia, quindi  $C \otimes D$  è contraibile.  $\square$

### Corollario 9.4

Seguono i seguenti risultati:

- Se  $X$  è contraibile, allora  $\tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(X)$  è contraibile.
- Se  $X$  o  $Y$  è contraibile, allora anche  $\tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(Y)$  è contraibile.
- Se  $X$  e  $Y$  sono entrambi contraibili, allora  $C(X) \otimes C(Y)$  è aciclico (cioè banale a meno di  $H_0 = \mathbb{Z}$ ).

*Dimostrazione.* Le proposizioni (1) e (2) seguono dalla proposizione precedente. Per la conseguenza (3) bisogna fare delle osservazioni.

Consideriamo la successione:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(-1)} & \tilde{C}(X) \oplus \tilde{C}(Y) & \xrightarrow{f} & \widetilde{C(X) \otimes C(Y)} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & 1 & \longmapsto & (1, -1) & & & & \end{array}$$

dove la mappa descritta da  $(-1)$  ha grado  $-1$ . Vogliamo descrivere  $f$  per ottenere informazioni sui complessi di catene. Espandendo il diagramma sui gradi delle catene, scriviamo in rosso ciò che viene aggiunto per avere l'esattezza:

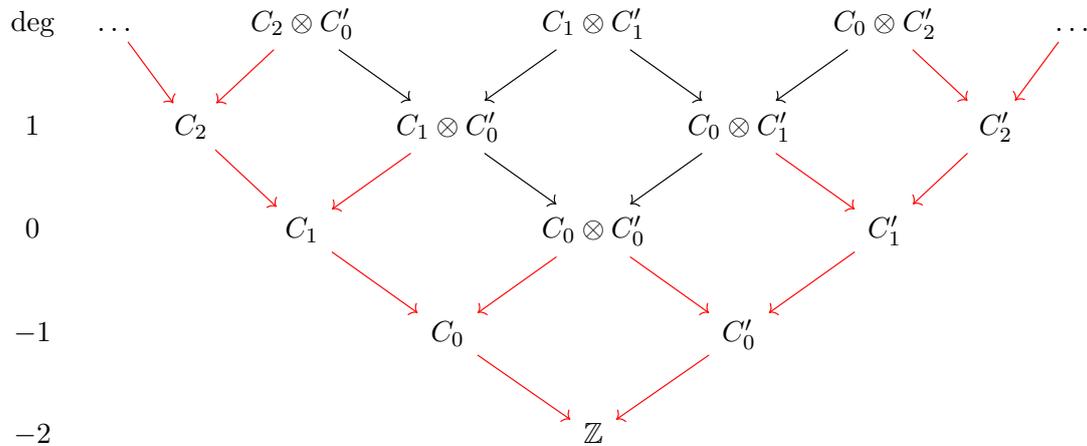
$$\begin{array}{ccccccc} \text{deg} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & & 0 & \xrightarrow{\text{red}} & C_1(X) \oplus C_1(Y) & \longrightarrow & C_1(X) \oplus C_1(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & \xrightarrow{\text{red}} & C_0(X) \oplus C_0(Y) & \longrightarrow & C_0(X) \oplus C_0(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \begin{array}{c} \varepsilon \downarrow \\ \downarrow \varepsilon' \end{array} & & \begin{array}{c} \varepsilon \downarrow \\ \downarrow \varepsilon' \end{array} & & \\ -1 & & 0 & \xrightarrow{\text{red}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Applicando la successione esatta in omologia, si ottiene che l'omomorfismo di connessione è un isomorfismo dato che  $\tilde{C}_i(X) \oplus \tilde{C}_i(Y)$  sono banali. Quindi  $\widetilde{C(X) \otimes C(Y)}$  è aciclico (i suoi gruppi in omologia sono banali tranne  $H_0 = \mathbb{Z}$ ).

Usiamo ora un'altra successione esatta:

$$0 \longrightarrow \widetilde{C(X) \otimes C(Y)} \xrightarrow{[1]} \tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(Y) \longrightarrow C(X) \otimes C(Y) \longrightarrow 0$$

dove la mappa [1] diminuisce il grado di 1. Vediamo che è esatta. Espandendo il tensoriale di  $\tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(Y)$  si ottiene che (denotando per comodità  $C_i = C_i(X)$  e  $C'_j = C_j(Y)$ ):



Notiamo che la parte in rosso corrisponde proprio al complesso  $\widetilde{C(X) \oplus C(Y)}$  mentre la parte restante è proprio  $C(X) \otimes C(Y)$ . Questo dà l'esattezza della successione esatta corta. Dato che  $\tilde{C}(X) \otimes \tilde{C}(Y)$  è contraibile per il punto (2), segue per esattezza della successione che la mappa di connessione è un isomorfismo:

$$H_q(C(X) \otimes C(Y)) = H_q(\widetilde{C(X) \oplus C(Y)}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ovvero la tesi. □

**Teorema 9.5 - Teorema di Eilenberg - Zilber**

Dati  $X$  e  $Y$  spazi topologici, la mappa naturale data da:

$$\begin{aligned} \text{EZ}_0 : C_0(X \times Y) &\longrightarrow C_0(X) \otimes C_0(Y) \\ (p, q) &\longmapsto p \otimes q \end{aligned}$$

si estende ad un omomorfismo di complessi:

$$\text{EZ} : C.(X \times Y) \longrightarrow C.(X) \otimes C.(Y)$$

che induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Osserviamo che i complessi  $C.(X) \otimes C.(Y)$  e  $C.(X \times Y)$  sono funtori:

$$\text{Top} \times \text{Top} \longrightarrow \text{Complessi di Catene}$$

e tramite la mappa  $\text{EZ}_0$  coincidono in grado 0.

Vediamo ora questi funtori con delle loro basi:

- il funtore  $(C(\cdot) \otimes C(\cdot))_n$  con la base data da  $(\Delta^k, \Delta^{n-k})$  con gli elementi  $id \otimes id$ . Questo sarà un funtore libero e aciclico (perchè  $\Delta^k$  contraibile per ogni  $k$ , quindi è applicabile il Corollario 9.4).
- il funtore  $C_n(\cdot, \cdot)$  con la base data da  $\Delta_n \times \Delta_n$  e con l'elemento "mappa diagonale"  $\Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$ . Analogamente, questo funtore è libero e aciclico.

## 9. Prodotto CUP in Co-omologia

Per il Teorema 4.20 esiste il morfismo naturale:

$$EZ : C.(X \times Y) \longrightarrow C.(X) \otimes C.(Y)$$

che estende  $EZ_0$ . Dato che  $EZ_0$  è un isomorfismo, ha un'inversa quindi esiste anche il morfismo naturale:

$$q : C.(X) \otimes C.(Y) \longrightarrow C.(X \times Y)$$

che estende la mappa  $EZ_0^{-1}$ .

Inoltre, le composizioni  $EZ \circ q$  e  $q \circ EZ$  sono anch'essi morfismi naturali che in grado 0 sono omotopi all'identità. Sempre per il Teorema 4.20 entrambe le composizioni sono omotope alle rispettive identità.

Questo conclude, in quanto passando in omologia si ottengono degli isomorfismi.  $\square$

### Teorema 9.6 - Teorema di Eilenberg - Zilber in omologia relativa

Date le trasformazioni naturali (una inversa dell'altra):

$$\begin{aligned} EZ : C.(X \times Y) &\longrightarrow C.(X) \otimes C.(Y) \\ q : C.(X) \otimes C.(Y) &\longrightarrow C.(X \times Y) \end{aligned}$$

e per le coppie di spazi topologici  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  c'è il diagramma con le righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C(A) \otimes C(Y) + C(X) \otimes C(B) & \rightarrow & C(X) \otimes C(Y) & \rightarrow & C(X, A) \otimes C(Y, B) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \downarrow q & & \uparrow \downarrow q & & \uparrow \downarrow q \\ 0 & \longrightarrow & C(A \times Y) + C(X \times B) & \longrightarrow & C(X \times Y) & \longrightarrow & \frac{C(X \times Y)}{C(A \times Y) + C(X \times B)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

*Dimostrazione.* Per naturalità,  $EZ(C.(A) \otimes C.(Y)) \subset C.(A \times Y)$  cioè si restringe bene. La stessa cosa vale per la mappa inversa  $q$ .

Ma allora le mappe a sinistra nel diagramma della tesi sono indotte dalle restrizioni con le mappe  $EZ$  e  $q$ . Analogamente, le mappe a destra sono indotte dai quozienti con le mappe  $EZ$  e  $q$ .

Poichè l'omotopia tra  $EZ \circ q$  e  $id$  mappa l'insieme  $C(A) \otimes C(Y) + C(X) \otimes C(B)$  in sé stesso e l'omotopia  $q \circ EZ$  mappa  $C(A \times Y) + C(X \times B)$  in sé, anche le restrizioni a sinistra sono omotope all'identità. Passando alle omologie si ottiene quindi un isomorfismo.  $\square$

Vediamo ora un Teorema che concretizza i risultati del Teorema di Eilenberg - Zilber.

### Teorema 9.7 - Formula di Kunneth

Sia  $C$  un  $R$ -modulo libero e  $D$  un  $R$ -modulo. Allora c'è una successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \rightarrow H_n(C \otimes D) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} H_i(C) * H_j(D) \rightarrow 0$$

Inoltre, se anche  $D$  è libero, la successione spezza.

*Dimostrazione.* Dato che  $C$  è libero, allora  $Z(C)$  e  $B(C)$  sono liberi per cui tensorizzando il complesso  $D$  si trovano i complessi:

$$(Z(C) \otimes Z(D))_n = \ker(1 \otimes \partial : (Z(C) \otimes D)_n \longrightarrow (Z(C) \otimes D)_{n-1})$$

$$(Z(C) \otimes B(D))_n = \text{Im}(1 \otimes \partial : (Z(C) \otimes D)_n \longrightarrow (Z(C) \otimes D)_{n-1})$$

Per la loro definizione, passando in omologia si trovano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} H.(Z(C) \otimes D) \simeq Z(C) \otimes H.(D) \\ H.(B(C) \otimes D) \simeq B(C) \otimes H.(D) \end{cases} \quad (9.1)$$

dove la seconda equazione si ottiene sostituendo  $B(C)$  a  $Z(C)$ , sempre libero.

Facciamo il tensore di  $H.(D)$  con la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow B(C) \xrightarrow{i} Z(C) \longrightarrow H(C) \longrightarrow 0$$

si ottiene che:

$$0 \rightarrow H.(C) * H.(D) \rightarrow B(C) \otimes H.(D) \xrightarrow{i \otimes id} Z(C) \otimes H.(D) \rightarrow H(C) \otimes H.(D) \rightarrow 0$$

dove inseriamo il Tor per rendere la successione esatta. Usiamo l'equazione (9.1) per sostituire:

$$0 \rightarrow H.(C) * H.(D) \rightarrow H.(B(C) \otimes D) \rightarrow H.(Z(C) \otimes D) \rightarrow H(C) \otimes H.(D) \rightarrow 0 \quad (9.2)$$

D'altra parte, usiamo la successione esatta corta di moduli liberi:

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

Tensorizzando, si ottiene:

$$0 \longrightarrow (Z(C) \otimes D)_n \longrightarrow (C \otimes D)_n \longrightarrow (B(C) \otimes D)_{n-1} \longrightarrow 0$$

Passando in omologia abbiamo la successione esatta lunga data da:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(B(C) \otimes D) & \xrightarrow{\star} & H_n(Z(C) \otimes D) & \longrightarrow & H_n(C \otimes D) \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & H_{n-1}(B(C) \otimes D) & \xrightarrow{\star} & H_{n-1}(Z(C) \otimes D) \longrightarrow \dots \end{array}$$

dove (per esercizio) le mappe segnate  $\star$  sono  $i \otimes id$ . Unendo questo risultato con l'esattezza della successione (9.2) si trova<sup>1</sup>:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{coker}((i \otimes id)_n) & \longrightarrow & H_n(C \otimes D) & \longrightarrow & \ker((i \otimes id)_{n-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & (H.(C) \otimes H.(D))_n & & & & (H.(C) * H.(D))_{n-1} \end{array}$$

Questo conclude la dimostrazione: abbiamo scritto proprio la successione esatta cercata.  $\square$

Vedremo ora che se  $C = C.(X)$  e  $D = C.(Y)$ , con il Teorema di Eilenberg - Zilber si trova che in omologia singolare:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \rightarrow H_n(C \times D) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} H_i(C) * H_j(D) \rightarrow 0$$

Questo diventa molto comodo quando i coefficienti dell'omologia sono in un campo: in tal caso la torsione è banale.

---

<sup>1</sup>Per brevità, indichiamo  $\text{coker}((i \otimes id)_n) = \text{coker}(H_n(B(C) \otimes D) \rightarrow H_n(Z(C) \otimes D))$  mentre  $\ker((i \otimes id)_{n-1}) = \ker(H_{n-1}(B(C) \otimes D) \xrightarrow{i \otimes id} H_{n-1}(Z(C) \otimes D))$

**Teorema 9.8 - Formula di Kunneth in Co-omologia**

Sia  $R$  un PID e supponiamo che uno tra  $H_*(X, A; R)$  e  $H_*(Y, B; R)$  sia finitamente generato in ogni grado.

Se vale Mayer-Vietoris per  $A \cup Y \times X \cup B$ , allora c'è una successione esatta corta naturale:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, A; R) \otimes H^j(Y, B; R) \longrightarrow H^n((X, A) \times (Y, B); R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} H^i(X, A; R) * H^j(Y, B; R) \rightarrow 0$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga al caso precedente. Dobbiamo solo osservare che vorremmo avere:

$$\text{hom}(C, R) \otimes H^q(D; R) \simeq \text{hom}(C, H^q(D; R))$$

ma questo funziona solamente nel caso in cui  $H^q(D, R)$  è finitamente generato. Nelle ipotesi del Teorema questo è richiesto, quindi si può concludere come prima.  $\square$

### 9.1 Approssimazione della Mappa Diagonale

Vedremo ora come ottenere la mappa del prodotto cup. Consideriamo la mappa diagonale:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \times X \\ x &\longmapsto (x, x) \end{aligned}$$

Vogliamo ora descrivere un'approssimazione di questa mappa diagonale, indotta sulle catene:

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \longrightarrow & C(X \times X) \\ & \searrow ? & \downarrow \text{EZ} \\ & & C(X) \otimes C(X) \end{array}$$

osservando che non c'è unicità per tale approssimazione.

**Fatto 9.9**

Il Teorema 4.20 si può applicare con un ragionamento analogo all'argomento di Eilenberg-Zilber per mostrare che per 2 qualsiasi morfismi  $C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$  che in grado 0 sono la mappa diagonale, sono omotope.

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio, basta ripercorrere la dimostrazione del Teorema di Eilenberg-Zilber.  $\square$

Costruiamo esplicitamente una di queste approssimazioni (quella di Alexander-Whitney). Consideriamo innanzitutto le mappe affini:

$$\begin{aligned} a_p : \Delta_p &\longrightarrow \Delta_n \\ e_i &\longmapsto e_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_q : \Delta_q &\longrightarrow \Delta_n \\ e_i &\longmapsto e_{n-q+i} \end{aligned}$$

A questo punto, consideriamo un  $n$ -simpleso singolare  $\sigma \in C_n(X)$ . Denotiamo:

$$\sigma_p^1 = \sigma \circ a_p \qquad \sigma_q^2 = \sigma \circ b_q$$

Allora la nostra mappa di approssimazione sarà data, sui semplici, da:

$$\begin{aligned} \Delta : C.(X) &\longrightarrow C.(X) \otimes C.(X) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{p+q=n} \sigma_p^1 \otimes \sigma_q^2 \end{aligned}$$

quindi basta estenderla per linearità su tutti gli elementi di  $C(X)$ .

Bisogna verificare (per esercizio) che  $\Delta$  è un omomorfismo di complessi, quindi definisce una delle possibili "mappe tratteggiate" cercate a inizio della sezione.

**Definizione 9.10 - Prodotto CUP**

Passando in co-omologia l'approssimazione della diagonale, si definisce per  $R$  PID il prodotto CUP:

$$\begin{aligned} \cup : H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) &\longrightarrow H^{p+q}(X; R) \\ \varphi \otimes \psi &\longmapsto \varphi \cup \psi \end{aligned}$$

dove in particolare<sup>a</sup>:

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = (-1)^{pq} \varphi(\sigma_p^1) \cdot \psi(\sigma_q^2) = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_p]}) \cdot \psi(\sigma|_{[e_p, \dots, e_{p+q}]})$$

<sup>a</sup>Il prodotto  $\cdot$  va inteso come prodotto in  $\mathbb{Z}$ , dato che  $\varphi, \psi$  sono omomorfismi con immagine in  $\mathbb{Z}$ .

**Proposizione 9.11 - Prodotto CUP è mappa di catene**

La mappa  $\cup$  è una mappa di catene, ovvero:

$$\delta(\varphi \cup \psi) = (\delta\varphi) \cup \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \cup (\delta\psi)$$

*Dimostrazione.* Lasciato per esercizio in una consegna. □

**Proposizione 9.12 - Prodotto CUP è graded-commutative**

La mappa  $\cup$  è commutativa a meno del segno.

*Dimostrazione.* Consideriamo la notazione  $\bar{\sigma} = \sigma|_{[e_n, e_{n-1}, \dots, e_1]}$ . Definiamo allora:

$$\begin{aligned} \rho : C_n(X) &\longrightarrow C_n(X) \\ \sigma &\longmapsto (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{\sigma} \end{aligned}$$

La mappa  $\rho$  è naturalmente omotopa all'identità in quanto è un omomorfismo di complessi che corrisponde all'identità in grado 0 quindi si può applicare Eilenberg-Zilber.

Passando in co-omologia, vediamo che  $\rho$  induce una mappa che soddisfa:

$$\rho^* \varphi \cup \rho^* \psi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \rho^*(\varphi \cup \psi) \tag{9.3}$$

Ciò funziona banalmente per ogni coordinata  $e_i$  con  $i \neq p$ . Va solamente visto il segno nella coordinata  $e_p$ . Lavorando sui membri a sinistra e destra:

SX) dato che  $\rho^* \psi$  ha segno  $(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}$  e  $\rho^* \varphi$  ha segno  $(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}$ , il termine a sinistra ha segno complessivo  $(-1)^{\frac{p^2+p+q^2+q}{2}}$ .

DX) il segno è dato da  $(-1)^{\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}} (-1)^{pq} = (-1)^{\frac{p^2+p+q^2+q+4pq}{2}}$

Dato che gli esponenti dei due segni differiscono per un esponente pari, sono uguali. Dato che  $\rho^*$  è omotopa all'identità, la relazione dell'Equazione 9.3 vale anche per l'identità, quindi:

$$\psi \cup \varphi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \varphi \cup \psi$$

ovvero la tesi. □

*Dimostrazione alternativa.* Consideriamo un funzionale che fa "commutare" i termini dell'approssimazione diagonale:

$$\begin{aligned} \tau : C.(X) \otimes C.(X) &\longrightarrow C.(X) \otimes C.(X) \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto (-1)^{|\alpha| \cdot |\beta|} \beta \otimes \alpha \end{aligned}$$

e notiamo che è un morfismo di complessi. Infatti calcolando:

$$\begin{aligned} \tau(d(a \otimes b)) &= \tau(da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db) \\ &= (-1)^{(|a|+1)|b|} b \otimes da + (-1)^{|a|} \cdot (-1)^{|a|(|b|+1)} db \otimes a \\ &= (-1)^{|a| \cdot |b|} (db \otimes a + (-1)^{|b|} b \otimes da) = d(\tau(a \otimes b)) \end{aligned}$$

Inoltre, estende l'identità su  $C_0(X)$  a morfismo di complessi. Componendo questa mappa con la mappa diagonale, si ottiene quindi un'altra approssimazione diagonale  $\Delta'$  omotopa a  $\Delta$  (per argomento di Eilenberg-Zilber). Questo implica proprio la commutatività del segno, perchè indurranno la stessa mappa in co-omologia. □

## 9.2 Caso relativo

In omologia relativa, il diagramma della mappa diagonale si riscrive:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, A) \otimes H^*(X, B) & \longrightarrow & H^*(X \times X, X \times B \cup A \times X) \\ & \searrow \cup & \downarrow \Delta \\ & & H^*(X, A \cup B) \end{array}$$

### Osservazione 9.1

Dati  $A_i \subset X$ , consideriamo una classe  $a_i \in \ker(H^*(X) \xrightarrow{i^*} H^*(A_i))$ . Consideriamo inoltre  $b_i \in H^*(X, A_i)$  tale che  $b_i \mapsto a_i$ . Questo elemento esiste per esattezza della successione:

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow X \longrightarrow (X, A_i) \longrightarrow 0$$

Se succede che  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , allora  $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n = 0$ , quando  $|a_i| > 0$  per ogni  $i$ .

Infatti,  $a_1 \cup \dots \cup a_n$  è immagine dell'elemento  $b_1 \cup \dots \cup b_n \in H^*(X, \cup A_i) = H^*(X, X)$ .

### Esempio 9.2 - Proiettivo Complesso

Sia  $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{k=0}^n V_k$  dove  $V_k$  sono aperti affini omeomorfi a  $\mathbb{C}^n$ .

Allora un qualsiasi prodotto  $a_0 \cup a_1 \cup \dots \cup a_n$  di classi<sup>2</sup> qualsiasi in  $H^{>0}(\mathbb{C}P^n)$  è nullo. Questo perchè passando a qualsiasi carta affine otteniamo:

$$H^{>0}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^{>0}(\mathbb{C}^n) = 0$$

dove  $H^{>0}(\mathbb{C}^n) = 0$  in quanto  $\mathbb{C}^n$  contraibile.

---

<sup>2</sup>Per  $H^{>0}(\mathbb{C}P^n)$  intendiamo elementi di  $H^*(\mathbb{C}P^n)$  di grado  $> 0$ .

**Esempio 9.3 - Sfera**

Dato che  $S^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^n$ , il prodotto di due qualsiasi classi di grado  $> 0$  è nullo. Dato che anche  $\mathbb{R}^n$  è contraibile, possiamo applicare un ragionamento analogo al caso del Proiettivo Complesso.

**Esempio 9.4 - Sospensione**

Vediamo  $\Sigma X = CX \cup CX$ , ovvero la sospensione come incollamento di due coni  $CX$ . Ma per costruzione  $CX$  è contraibile, quindi si applica un ragionamento analogo ai casi precedenti.

**Teorema 9.13 - Proiettivo Complesso**

Vale che:

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x] / \langle x^{n+1} \rangle$$

dove  $x$  è un generatore di  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Anche per il proiettivo infinito, allora:

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$$

*Dimostrazione.* Vedremo la dimostrazione più avanti con la Dualità di Poincaré.  $\square$

**Teorema 9.14 - Proiettivo Reale**

Vale che:

$$H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x] / \langle x^{n+1} \rangle$$

dove  $x$  è un generatore di  $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}$ . Anche per il proiettivo infinito, allora:

$$H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x]$$

*Dimostrazione.* Vedremo la dimostrazione più avanti con la Dualità di Poincaré.  $\square$

**Teorema 9.15 - Teorema di Borsuk - Ulam**

Non esistono mappe  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  continue e dispari<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Una mappa è dispari se  $f(-x) = -f(x)$  per ogni  $x \in S^n$ .

*Dimostrazione.* Possiamo assumere che  $n \geq 3$ . Infatti se esistesse  $f : S^2 \rightarrow S^1$  dispari, ci riconduciamo al caso  $n = 3$  considerando la sospensione (dispari per costruzione):

$$\tilde{\Sigma}f : \Sigma S^2 \simeq S^3 \longrightarrow \Sigma S^1 \simeq S^2$$

dove  $\tilde{\Sigma}f(p, t) = [f(p), -t]$  per  $p \in S^2$  e  $t \in [-1, 1]$ .

Supponiamo quindi che  $n \geq 3$  e che esista  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ . Questa induce al quoziente proiettivo:

$$\bar{f} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$$

e ai gruppi fondamentali diventa:

$$\bar{f}_\# : \mathbb{Z}/2 = \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) = \mathbb{Z}/2$$

Diciamo che  $\bar{f}_\#$  è un isomorfismo di gruppi.

Commentando il diagramma in Figura 9.1, prendiamo  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  generatore tale che il suo sollevamento  $\tilde{\gamma}$  in  $S^n$  (vediamo il quoziente  $S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$  come rivestimento di grado 2)

avrà estremi  $\tilde{x}_0$  e  $-\tilde{x}_0$ . Tramite la mappa  $f$ , il cammino  $\tilde{\gamma}$  va in  $f(\tilde{\gamma})$  cammino tra  $f(\tilde{x}_0)$  e  $-f(\tilde{x}_0)$ , che passato al quoziente in  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  genera il suo gruppo fondamentale. Passiamo allora in omologia, dove per commutatività dovremo ottenere un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \end{array}$$

Usiamo ora il Teorema dei Coefficienti Universali 8.19 per ottenere un isomorfismo:

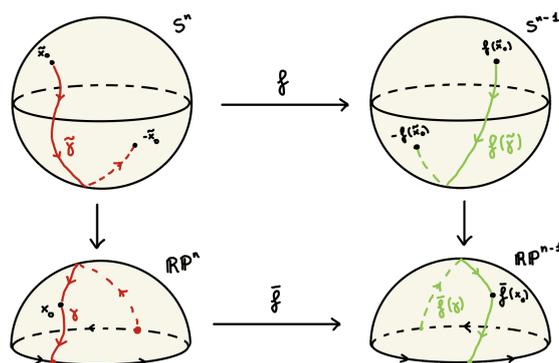


Figura 9.1: Diagramma per mostrare che  $\bar{f}$  è isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \bar{f}^* : H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2) \\ & & x \quad \longmapsto \quad x' \end{array}$$

dove  $x, x'$  sono i rispettivi generatori delle co-omologie. Ma facendo il prodotto CUP si otterrebbe:

$$\begin{cases} x^n = 0 & \text{perchè } H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x] / \langle x^n \rangle \\ (x')^n \neq 0 & \text{perchè } H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x] / \langle x^{n+1} \rangle \end{cases}$$

che porta ad un assurdo con la costruzione del precedente isomorfismo in co-omologia.  $\square$

**Corollario 9.16**

Sia  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa continua tale che  $f(x) = f(-x)$ . Allora esiste  $x \in S^n$  tale che  $f(x) = 0$ .

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema di Borsuk-Ulam: se per assurdo non esistesse tale  $x$ , la mappa  $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$  sarebbe dispari e continua, assurdo.  $\square$

**Corollario 9.17**

Data  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, esiste  $x \in S^n$  tale che  $f(x) = f(-x)$ .

*Dimostrazione.* Se così non fosse,  $f(x) - f(-x)$  sarebbe una mappa dispari non nulla ovunque. Assurdo per il Corollario precedente.  $\square$

# Capitolo 10

## Omologia di Varietà

Consideriamo  $M$  una varietà topologica  $n$ -dimensionale, cioè uno spazio topologico Hausdorff localmente omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

### Esempio 10.1 - Varietà

Alcune varietà note sono: gli aperti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$ ,  $\mathbb{R}P^n$ , unione connessa di tori, prodotti cartesiani di varietà.

#### Fatto 10.1

Ogni varietà  $X$  di dimensione  $n$  ha struttura di CW-complesso di dimensione  $n$ .

*Dimostrazione.* Dimostrazione omessa. □

#### Corollario 10.2

Data una  $n$ -varietà  $X$ , vale che:

$$H_i(X) = 0 \quad \forall i > n$$

Inoltre, se  $X$  è compatto, allora  $H_*(X)$  è finitamente generato.

Definiremo l'orientazione di una varietà, senza passare per la geometria differenziale.

#### Definizione 10.3 - Orientazione

Una orientazione su una  $n$ -varietà  $M$  è una scelta  $\mu$  che ad ogni punto  $x \in M$  associa una classe  $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$  che genera<sup>a</sup> e tale che  $\forall x \in M$  esiste  $N \subset M$  intorno compatto di  $x$  ed una classe  $\mu_N \in H_n(M, M \setminus N)$  tale che  $\forall y \in N$ :

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M \setminus N) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus \{y\}) \\ \mu_N & \longmapsto & \mu_y \end{array}$$

<sup>a</sup>La classe può generare perchè per escissione  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ .

#### Osservazione 10.2

Si può dare analogamente una definizione di orientazione su un modulo  $G$ , usando l'omologia a coefficienti in  $G$  al posto di  $\mathbb{Z}$ .

In particolare, per  $G = \mathbb{Z}/2$  tutte le varietà sono orientabili in quanto non ci sono scelte per i generatori dell'omologia.



Ma allora, per esattezza il punto (1) vale anche per  $H_i(M, M \setminus K)$ , dato che vale per gli altri.

Per il punto (2) vediamo dove viene mandato l'elemento  $u$  tramite la mappa  $\varphi$ . Ma  $\varphi(u)$  va tramite la mappa  $\rho_x$  in 0 sulle componenti per ogni  $x \in K$ . Quindi per il caso (a) applicato a  $K = K_1$  e  $K = K_2$ , si ottiene che  $\varphi(u) = (0, 0)$  ed  $u \in \ker \varphi$ .

Ma  $H_{n+1}(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)) = 0$  quindi  $\varphi$  è iniettiva ed  $u = 0$ , come volevamo.

c)  $M = \mathbb{R}^n$  e  $K = \bigcup_{i=1}^r K_i$ : dove  $K_i$  sono compatti convessi. Ma allora si reitera il punto (b), sapendo che tutte le intersezioni di compatti convessi sono compatte convesse.

d)  $M = \mathbb{R}^n$  e  $K$  compatto qualsiasi: prendiamo  $u \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ . Allora esiste  $N \supset K$  aperto ed una classe  $u' \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N)$  tale che  $u'$  si restringe bene ad  $u$ . Per fare questo, usiamo il fatto che  $u$  è supportato in un compatto, cioè esistono  $(X, A) \subset (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$  compatti ed esiste  $v \in H_i(X, A)$  tale che:

$$\begin{array}{ccc} H_i(X, A) & \longrightarrow & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \\ v & \longmapsto & u \end{array}$$

Osserviamo che  $N := \mathbb{R}^n \setminus A \supset K$  è un aperto per costruzione. Per compattezza di  $K$ , esistono  $\{B_i\}_{i=1}^r$ , con  $B_i \subseteq N$  palle chiuse, che ricoprono  $K$ . Allora possiamo considerare il seguente diagramma commutativo (dato dalle inclusioni ovvie):

$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N) & \xrightarrow{\ell_*} & H_i\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i\right) \\ & \searrow k_* & \downarrow h_* \\ & & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \end{array}$$

Vediamo allora i risultati separatamente:

1. supponiamo  $i > n$ . Allora per il caso (c) segue che  $H_i\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i\right) = 0$ .
2. supponiamo che  $\rho_x(u) = 0$  per ogni  $x \in K$ . Consideriamo  $u' \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N)$  tale che  $k_*(u') = u$  ed  $u'' \in H_n\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i\right)$  tale che  $l_*(u') = u''$ .

Allora ne segue che  $\rho_y(u'') = 0$  per ogni  $y \in \bigcup_{i=1}^r B_i$ , infatti se  $y \in B_j$  per qualche  $j \in \{1, \dots, r\}$ , prendiamo  $x \in B_j \cap K$  e otteniamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i\right) & \xrightarrow{h_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \\ & \searrow \delta & & \nearrow \alpha \sim & \\ \rho_y \downarrow & & & & \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) & \xleftarrow{\beta \sim} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_j) & & \end{array}$$

dove le mappe  $\alpha$  e  $\beta$  sono isomorfismi per escissione. Seguendo il diagramma, per ipotesi  $h_*(u'') = u$ . Ma  $\gamma(u) = 0$ . Allora tramite l'isomorfismo  $\alpha$  segue per commutatività che  $\delta(u'') = 0$ .

Questo conclude, perchè allora  $\rho_y(u'') = 0$ . Ciò vale per ogni  $y \in \bigcup_{i=1}^r B_i$  quindi

## 10. Omologia di Varietà

applicando il Lemma con  $\bigcup_{i=1}^r B_i$  (siamo nel caso (3)), concludiamo che  $u'' = 0$ .  
Quindi  $u = 0$ .

- e)  $M$  qualsiasi e  $K \subset U \simeq \mathbb{R}^n$  aperto: il Lemma segue per escissione dal caso (4), infatti

$$H_i(M, M \setminus K) \simeq H_i(U, U \setminus K) \simeq H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$$

e questo conclude.

- f)  $M$  e  $K$  qualsiasi: possiamo considerare  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$  tali che  $K_i \subset U_i \simeq \mathbb{R}^n$  aperto. Usiamo allora i casi (c) ed (e) per concludere.

Questo termina la dimostrazione.  $\square$

*Dimostrazione Teorema.* L'unicità dell'orientazione segue dal punto (2) del Lemma 10.6: supponiamo esistano  $\mu_K, \mu'_K$  due orientazioni che si restringono a  $\mu_x$  per ogni  $x \in K$ . Allora  $\rho_x(\mu_K - \mu'_K) = 0$  per ogni  $x \in K$  quindi  $\mu_K - \mu'_K = 0$ , coincidono.

L'esistenza dell'orientazione si fa per casi:

- a)  $K \subset U \simeq \mathbb{R}^n$  aperto: allora consideriamo un disco chiuso  $D$  tale che  $K \subset D \subset \mathbb{R}^n$ . Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D) & & \\ \downarrow \simeq \rho_x & \searrow & \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \\ & \swarrow \rho'_x & \end{array}$$

dove per escissione  $\rho_x$  è un isomorfismo. Ma allora per ogni  $\mu_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  esiste un unico elemento  $\mu_D \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D)$  che si restringe bene. Allora passando  $\mu_D$  ad  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$  si trova l'orientazione cercata  $\mu_K$ .

- b)  $K = K_1 \cup K_2$  con  $K_i$  come in (a): usiamo la successione di Mayer-Vietoris relativa:

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus K) \\ & \searrow & \\ & & H_n(M, M \setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2) \longrightarrow H_n(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)) \end{array}$$

dove  $H_{n+1}(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)) = 0$ , quindi vediamo che  $(\mu_{K_1}, \mu_{K_2}) \in H_n(M, M \setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2)$  va in 0 dato che entrambe si restringono a  $\mu_{K_1 \cap K_2}$ . Allora per esattezza esiste  $\mu_K$  che si restringe bene sia su  $K_1$  che  $K_2$  (cioè nel diagramma viene mandato in  $(\mu_{K_1}, \mu_{K_2})$ ).

- c)  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r$ : si può reiterare il ragionamento fatto al punto (b).

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Corollario 10.7**

Data  $M$  una  $n$ -varietà, per ogni  $i > n$  vale che  $H_i(M) = 0$ .

*Dimostrazione.* Se  $M$  è compatta, il risultato segue dal Lemma 10.6 usando  $K = M$ . Altrimenti, sia  $u \in H_i(M)$ : allora  $u$  ha supporto in un compatto  $K$ . Ricopriamo come nella dimostrazione del Lemma  $K \subset \bigcup_{i=1}^r B_i$  dove  $B_i$  sono palle chiuse. Consideriamo le inclusioni  $K \subset \mathbb{R}^n \subset S^n$ ; prendendo  $B = S^n \setminus K$  si ottiene che per  $i > n$ :

$$0 = H_{i+1}(S^n, S^n \setminus K) \longrightarrow H_i(S^n \setminus K) \longrightarrow H_i(S^n) = 0$$

quindi  $H_i(S^n \setminus K) = 0$  per ogni  $i > n$ . Quindi esiste  $u' \in H_i(\bigcup_{i=1}^r B_i)$  tale che:

$$\begin{array}{ccc} H_i\left(\bigcup_{i=1}^r B_i\right) & \longrightarrow & H_i(M) \\ u' & \longmapsto & u \end{array}$$

Per induzione su  $r$ , usando Mayer-Vietoris, si ha che:

$$H_i\left(\bigcup_{i=1}^r B_i\right) = 0$$

Questo conclude. □

**Teorema 10.8**

Sia  $M$  una  $n$ -varietà qualsiasi (anche non orientabile). Per ogni compatto  $K \subset M$  esiste un'unica  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z}/2)$  tale che per ogni  $x \in K$  valga  $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$ . Questo dà l'unica orientazione su  $\mathbb{Z}/2$  di  $M$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga al Teorema precedente, usando l'omologia  $H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z}/2)$ . □

**Esempio 10.4**

Riportiamo alcuni esempi di varietà orientabili:

1.  $S^n$  è orientabile.
2. aperti di varietà orientabili sono orientabili.
3.  $\mathbb{R}P^n$  è orientabile se e solo se  $n$  è dispari.
4.  $\mathbb{C}P^n$  è orientabile.



# Capitolo 11

## Prodotto CAP

Consideriamo il complesso di co-catene  $C^\cdot(X) = \text{hom}(C_\cdot(X), \mathbb{Z})$  da cui si ottiene la co-omologia di  $X$ .

C'è una naturale mappa di valutazione, data dalla definizione di  $C^i(X)$ :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^i(X) \times C_i(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Vogliamo considerare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  come un morfismo di complessi di catene. Per fare questo, "invertiamo" i gradi del complesso di cocatene, cioè definiamo:

$$\bar{C}_i = C^{-i} \quad \bar{d}_i = d^{-i} : \bar{C}_i \rightarrow \bar{C}_{i-1}$$

Con questa convenzione, la mappa  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una mappa:

$$\varepsilon : C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dove in grado 0 c'è la decomposizione  $(C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X))_0 = \bigoplus_i C^i(X) \otimes C_i(X)$  quindi:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \bigoplus_i \langle \cdot, \cdot \rangle & \text{per } i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti, pensando anche al codominio  $\mathbb{Z}$  come al complesso di catene:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

vale il seguente risultato.

**Lemma 11.1**

*La mappa  $\varepsilon$  è un morfismo di catene.*

*Dimostrazione.* Data la struttura di complesso di catene di  $\mathbb{Z}$ , è sufficiente vedere che  $\varepsilon$  commuta con il differenziale solo in grado 0, cioè commuta il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_i C^i \otimes C_{i+1} & \xrightarrow{\varepsilon_1} & 0 & \text{grado 1} \\ \downarrow d & & \downarrow 0 & \\ \bigoplus_i C^i \otimes C_i & \xrightarrow{\varepsilon_0} & \mathbb{Z} & \text{grado 0} \end{array}$$

Preso  $f \in C^i(X)$  ed  $\alpha \in C_{i+1}(X)$ , per definizione:

$$d(f \otimes \alpha) = df \otimes \alpha + (-1)^i f \otimes d\alpha$$

quindi valutando:

$$\varepsilon_0(d(f \otimes \alpha)) = \langle df, \alpha \rangle + (-1)^i \langle f, d\alpha \rangle = (-1)^{i+1} f(d\alpha) + (-1)^i f(d\alpha) = 0$$

e questo conclude.  $\square$

### Osservazione 11.1

In realtà avevamo già usato la mappa  $\varepsilon_0$ : nel Teorema dei Coefficienti Universali 8.19 si otteneva la mappa:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C, G) \longrightarrow \text{hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

ovvero mette in relazione catene e co-omologia.

Consideriamo allora la composizione di mappe:

$$C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X) \xrightarrow{id \otimes \tilde{\Delta}} C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X) \otimes C_\cdot(X) \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} \mathbb{Z} \otimes C_\cdot(X) \simeq C_\cdot(X)$$

dove ricordiamo che  $\tilde{\Delta} = EZ \circ \Delta$ . Quello che si ottiene è ancora un morfismo di complessi che in omologia induce una mappa che chiameremo prodotto CAP:

$$\begin{aligned} H^i(X) \otimes H_n(X) &\longrightarrow H_{n-i}(C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X)) \longrightarrow H_{n-i}(X) \\ (a, b) &\longmapsto \longrightarrow a \cap b \end{aligned}$$

### Osservazione 11.2

Il prodotto CAP è ben definito in quanto non dipende dalla scelta di EZ (ogni possibile scelta è omotopa alle altre, quindi in omologia induce la stessa mappa).

Possiamo considerare l'approssimazione di Alexander-Whitney per dare una formula esplicita del prodotto CAP. Dati  $\varphi \in C^p(X)$  e  $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$  vale che:

$$\varphi \cap \sigma = (-1)^{pq} \varphi(\sigma|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]}) \cdot \sigma|_{[e_0, \dots, e_q]} \in C_q(X)$$

#### Proposizione 11.2 - Relazione tra $\cup$ e $\cap$

Siano  $\alpha \in H^{n-i}(X)$ ,  $\beta \in H^i(X)$  e  $\gamma \in H_n(X)$ . Allora:

$$\langle \alpha, \beta \cap \gamma \rangle = \langle \alpha \cup \beta, \gamma \rangle$$

*Dimostrazione.* Lasciato per esercizio, basta applicare le formule esplicite per  $\cup$  e  $\cap$ .  $\square$

## 11.1 Caso relativo

Possiamo definire il prodotto CAP anche nel caso relativo, come una mappa:

$$\cap : H^i(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \longrightarrow H_{n-i}(X, B)$$

perchè in questo caso stiamo usando l'approssimazione diagonale:

$$\tilde{\Delta} : C.(X, A \cup B) \longrightarrow C.(X, A) \otimes C.(X, B)$$

Partendo dalla successione esatta:

$$0 \longrightarrow C.(A) \longrightarrow C.(X) \longrightarrow C.(X, A) \longrightarrow 0$$

si può tensorizzare e si ottiene il seguente diagramma<sup>1</sup> che commuta dato che le mappe EZ e  $\Delta$  sono naturali:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C.(A) \otimes C.(X, B) & \rightarrow & C.(X) \otimes C.(X, B) & \rightarrow & C.(X, A) \otimes C.(X, B) \rightarrow 0 \\ & & \text{EZ} \uparrow & & \text{EZ} \uparrow & & \text{EZ} \uparrow \\ 0 & \rightarrow & C.(A \times (X, B)) & \longrightarrow & C.(X \times (X, B)) & \longrightarrow & C.((X, A) \times (X, B)) \rightarrow 0 \\ & & \Delta \uparrow & & \Delta \uparrow & & \Delta \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & C.(A) & \longrightarrow & C.(X \times B) & \longrightarrow & C.(X, A \cup B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

---

<sup>1</sup>Indicheremo  $X \times (X, B) := (X, \emptyset) \times (X, B)$ .



# Capitolo 12

## Co-omologia a Supporto Compatto

Data la coppia  $(X, A)$ , sappiamo dalla successione esatta della coppia che:

$$C^n(X, A; G) = \ker (C^n(X; G) \rightarrow C^n(A; G))$$

Alla luce di questo, definiamo:

### Definizione 12.1 - Supporto Compatto

Un elemento  $u \in C^n(X; G)$  ha supporto compatto se esiste  $K \subset X$  compatto tale che:

$$u \in \ker (C^n(X; G) \rightarrow C^n(X \setminus K; G))$$

ovvero  $u \in C^n(X, X \setminus K; G)$ .

### Definizione 12.2 - Complesso di Catene a Supporto Compatto

Indicheremo con  $C_C^n(X; G)$  l'insieme delle  $n$ -cocatene a supporto compatto.

### Osservazione 12.1

L'insieme  $C_C(X; G)$  ha una struttura di complesso di co-catene. Infatti se  $u \in C_C^n(X; G)$  allora tramite il differenziale di  $C^n(X; G)$  si ottiene un elemento  $\delta u \in C_C^{n+1}(X; G)$  ancora a supporto compatto. Basta seguire il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} C^n(X; G) & \longrightarrow & C^n(X \setminus K; G) & & u & \longmapsto & 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \\ C^{n+1}(X; G) & \longrightarrow & C^{n+1}(X \setminus K; G) & & \delta u & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Questo dice che  $C_C(X; G) = (C_C^n(X; G), \delta)_n$  è un complesso di co-catene.

### Definizione 12.3 - Co-omologia a Supporto Compatto

Dato il complesso di co-catene  $C_C(X; G)$  possiamo definire  $H_C(X; G)$  la sua co-omologia.

### Osservazione 12.2

Se  $X$  è compatto, allora le definizioni coincidono con quelle passate:  $C(X; G) = C_C(X; G)$  e  $H(X; G) = H_C(X; G)$ .

**Osservazione 12.3**

Si osservi che la co-omologia a supporto compatto non è in generale un invariante omotopico, in quanto le omotopie non conservano la compattezza.  $H_C$  è però un invariante topologico (invariante per omeomorfismi).

Troviamo ora una definizione alternativa, che permetterà di ottenere alcune proprietà della co-omologia a supporto compatto.

**Definizione 12.4 - Insieme Diretto**

Un poset  $(\Lambda, \leq)$  è un insieme diretto se  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$  vale che:

$$\exists \gamma \in \Lambda \quad \text{tale che} \quad \gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta$$

**Definizione 12.5 - Sistema Diretto**

Un sistema diretto di gruppi abeliani, indicizzato su  $\Lambda$  insieme diretto, è dato da una famiglia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  di gruppi abeliani con  $\{\varphi_{\alpha\beta} : A_\alpha \rightarrow A_\beta\}_{\alpha \leq \beta}$  famiglia di morfismi. In particolare deve valere che:

- $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta}$  per  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$
- $\varphi_{\alpha\alpha} = id_{A_\alpha}$

**Definizione 12.6 - Limite Diretto**

Il limite diretto del sistema diretto di gruppi abeliani  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  è:

$$\varinjlim A_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha / \langle a_\alpha - \varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha) \rangle_{\alpha \leq \beta}$$

cioè la somma diretta dei gruppi, dove si identificano elementi che vengono mappati da  $\{\varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \leq \beta}$ .

**Osservazione 12.4**

Il fatto che  $\Lambda$  sia un insieme diretto implica che per ogni elemento di  $\varinjlim A_\alpha$  ha un rappresentante in  $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$  dato da un certo  $a_\gamma \in A_\gamma$ .

Infatti dato un generico elemento  $\sum_{i=1}^n a_{\alpha_i} \in \varinjlim A_\alpha$  esiste  $\gamma \geq \alpha_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Ma allora l'elemento del limite diretto sarà equivalente a  $\sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i\gamma}(a_{\alpha_i}) \in A_\gamma$ .

**Lemma 12.7**

Siano  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, \{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  e  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  sistemi diretti di gruppi abeliani. Se  $\forall \alpha \in \Lambda$  esiste la successione esatta:

$$0 \longrightarrow A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{s_\alpha} C_\alpha \longrightarrow 0$$

e per ogni  $\beta \geq \alpha$  il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & B_\alpha & \xrightarrow{s_\alpha} & C_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_{\alpha\beta}^A & & \downarrow \varphi_{\alpha\beta}^B & & \downarrow \varphi_{\alpha\beta}^C & & \\ 0 & \longrightarrow & A_\beta & \xrightarrow{i_\beta} & B_\beta & \xrightarrow{s_\beta} & C_\beta & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

allora l'esattezza passa al limite diretto, cioè è esatta la successione:

$$0 \longrightarrow \varinjlim A_\alpha \longrightarrow \varinjlim B_\alpha \longrightarrow \varinjlim C_\alpha \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

**Corollario 12.8**

Il limite diretto di successioni esatte lunghe è ancora esatto.

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta lunga:

$$\dots \longrightarrow A_{n-1,\alpha} \xrightarrow{t_{n-1,\alpha}} A_{n,\alpha} \xrightarrow{t_{n,\alpha}} A_{n+1,\alpha} \longrightarrow \dots$$

Allora ad ogni passo possiamo associare la successione esatta corta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker t_{n,\alpha} & \longrightarrow & A_{n,\alpha} & \longrightarrow & \operatorname{coker} t_{n,\alpha} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & & \operatorname{coker} t_{n-1,\alpha} & & & & \ker t_{n+1,\alpha} & & \end{array}$$

Ci siamo ridotti a successioni esatte corte, sulle quali possiamo applicare il Lemma precedente. Otteniamo così l'esattezza della successione lunga al limite. □

Questo strumento si può applicare naturalmente nel caso della co-omologia a supporto compatto. Infatti  $\Lambda = \{K \subseteq X \text{ compatto}\}$  è un insieme diretto, con la relazione data dall'inclusione. Infatti l'unione di compatti è ancora un compatto.

Affermiamo che  $C^i(X, X \setminus K; G)$  è un sistema diretto indicizzato su  $\Lambda$ .

Dati  $K < L$  ci sono gli omomorfismi:

- $C^i(X \setminus K) \rightarrow C^i(X \setminus L)$  surgettiva.
- $C^i(X, X \setminus K) \rightarrow C^i(X, X \setminus L)$  iniettiva.

Ma allora:

$$C_C^i(X; G) = \bigcup_{K \text{ compatto}} C^i(X, X \setminus K; G) = \varinjlim C^i(X, X \setminus K)$$

e questa costruzione è compatibile con i differenziali, dato che:

**Proposizione 12.9**

Il funtore  $H(\cdot)$  commuta con il limite diretto.

*Dimostrazione.* Il risultato segue dal Lemma 12.7 e dal suo Corollario applicati alla successione esatta corta<sup>1</sup>:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d_\alpha^{i-1} \longrightarrow \ker d_\alpha^i \longrightarrow H_\alpha^i \longrightarrow 0$$

---

<sup>1</sup>Come a lezione, usiamo un abuso di notazione omettendo volutamente lo spazio su cui stiamo facendo l'omologia  $H_\alpha^i$ .

## 12. Co-omologia a Supporto Compatto

---

Dal Lemma segue che è esatta la successione:

$$0 \longrightarrow \varinjlim \operatorname{Im} d_\alpha^{i-1} \longrightarrow \varinjlim \operatorname{ker} d_\alpha^i \longrightarrow \varinjlim H_\alpha^i \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \operatorname{Im} d^{i-1} \quad \quad \quad \operatorname{ker} d^i$$

Quindi per esattezza vale che  $\varinjlim H_\alpha^i = H^i(\varinjlim C)$ . Questo conclude.  $\square$

Ne segue che in omologia a supporto compatto:

$$H_C^i(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$$

Possiamo enunciare Mayer-Vietoris a supporto compatto.

### **Teorema 12.10 - Successione di Mayer-Vietoris a Supporto Compatto**

Siano  $U, V$  aperti di  $X$  tali che  $X = U \cup V$ . Allora vale la successione esatta:

$$\dots \rightarrow H_C^i(U \cap V) \rightarrow H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) \rightarrow H_C^i(X) \rightarrow H_C^{i+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

*Dimostrazione.* Siano  $K, L$  compatti con  $K \subset U$  ed  $L \subset V$ . Allora:

$$\dots \rightarrow H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \rightarrow H^i(X, X \setminus K) \oplus H^i(X, X \setminus L) \rightarrow H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \rightarrow \dots$$

Notiamo che questo si può fare per qualsiasi compatto  $K \subset U$  ed  $L \subset V$ . Fissiamo allora un certo  $K \subset U$  e facciamo il limite diretto per  $L \subset V$ :

$$\varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \rightarrow H^i(X, X \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L) \rightarrow \varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cup L))$$

Si continua ad ottenere una successione esatta lunga. Ora facciamo il limite diretto per  $K \subset U$  compatto:

$$\dots \longrightarrow \varinjlim_{L, K} H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \varinjlim_K H^i(X, X \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L)$$

$$\quad \quad \quad \searrow$$

$$\varinjlim_{L, K} H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \longrightarrow \dots$$

Per escissione si ottiene equivalentemente che:

$$\dots \longrightarrow \varinjlim_{L, K} H^i(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \varinjlim_K H^i(U, U \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(V, V \setminus L)$$

$$\quad \quad \quad \searrow$$

$$\varinjlim_{L, K} H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \longrightarrow \dots$$

Ma in questo modo per  $K \cap L \subset U \cap V$ , il limite  $\varinjlim_{L, K}$  equivale a  $\varinjlim_M$  dove  $M \subset U \cap V$  compatto. Analogamente per gli altri termini e si ottiene:

$$\dots \longrightarrow H_C^i(U \cap V) \longrightarrow H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) \longrightarrow H_C^i(U \cup V) \longrightarrow \dots$$

e questo conclude.  $\square$

**Osservazione 12.5 - Prodotto CAP e Classi Fondamentali**

Ricordiamo che se  $X$  è una varietà orientata, per ogni insieme  $K \subset X$  compatto l'elemento  $\mu_K \in H_n(X, X \setminus K)$  è la classe fondamentale che dà l'orientazione.

Inoltre, se  $K \subset L$  compatti allora  $\mu_L \mapsto \mu_K$  si restringe bene.

Il prodotto CAP, assieme alla classe fondamentale  $\mu_K$  induce un omomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \rho_K : H^i(X, X \setminus K) & \longrightarrow & H_{n-i}(X) \\ f & \longmapsto & f \cap \mu_K \end{array}$$

Dato che per  $K \subset L$  compatti la classe fondamentale si restringe bene, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, X \setminus K) & & \\ \downarrow & \searrow \rho_K & \\ & & H_{n-i}(X) \\ & \nearrow \rho_L & \\ H^i(X, X \setminus L) & & \end{array}$$

Prendendo allora il limite diretto (ben definito) si ottiene una mappa:

$$\rho_X : H_C^i(X) \longrightarrow H_{n-i}(X)$$

che "moralmente" è il prodotto CAP con la classe fondamentale.

**Teorema 12.11 - Dualità di Poincaré**

Sia  $M$  una  $n$ -varietà orientata. L'omomorfismo:

$$\rho_M : H_C^q(M; G) \longrightarrow H_{n-q}(M; G)$$

è un isomorfismo  $\forall q$ .

*Dimostrazione.* Facciamo una dimostrazione per passi.

a)  $M = \mathbb{R}^n$ : prendiamo una palla chiusa  $B_k \subseteq \mathbb{R}^n$  di raggio  $k \in \mathbb{N}$ . Ma allora:

$$H_C^q(\mathbb{R}^n; G) = \varinjlim_K H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) \stackrel{(\star)}{=} \lim_{m \rightarrow +\infty} H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m; G)$$

dove in  $(\star)$  usiamo il fatto che  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è un insieme cofinale cioè ogni compatto  $K$  è contenuto in qualche palla  $B_k$ .

A questo punto, notiamo che l'omomorfismo:

$$H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m; G) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_{m+1}; G)$$

è un isomorfismo (in quanto il secondo è retratto per deformazione del primo).

Per escissione, calcoliamo inoltre che:

$$H_C^q(\mathbb{R}^n; G) = \begin{cases} G & \text{per } q = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi abbiamo effettivamente che  $H_C^q(\mathbb{R}^n; G) \simeq H_{n-q}(\mathbb{R}^n; G) \forall q$ .

Resta quindi da vedere che l'isomorfismo è dato proprio dalla mappa  $\rho_{\mathbb{R}^n}$ . Basta verificare sul grado  $q = n$ :

$$\rho_M : H_C^n(\mathbb{R}^n; G) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n; G)$$

## 12. Co-omologia a Supporto Compatto

Sia  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto tale che  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; G) \simeq H_C^n(\mathbb{R}^n; G)$ . Allora per costruzione di  $\rho_{\mathbb{R}^n}$ , l'orientazione  $\mu_B$  data dal Teorema 10.5 permette di riscrivere  $\rho_{\mathbb{R}^n} = \cap \mu_B$ . Vogliamo vedere che  $\cap \mu_B$  manda il generatore di  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; G)$  nel generatore di  $H_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; G)$ .

Prendiamo a tal fine  $\mu_B^* \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; G)$ , sapendo che  $\mu_B^*(\mu_B) = 1$  per proprietà della classe  $\mu_B$  orientazione. La tesi, ovvero  $\rho_{\mathbb{R}^n}(\mu_B^*) = \mu_B^* \cap \mu_B$  genera  $H_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; G)$ , equivale a dire che  $\alpha(\mu_B^* \cap \mu_B) = 1$  dove  $\alpha$  genera il gruppo  $H^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; G)$ . Applicando le proprietà dei prodotti CUP e CAP:

$$\alpha(\mu_B^* \cap \mu_B) = \langle \alpha, \mu_B^* \cap \mu_B \rangle = \langle \alpha \cup \mu_B^*, \mu_B \rangle = \langle \mu_B^*, \mu_B \rangle = 1$$

che è esattamente la relazione cercata.

- b)  $M = U \cup V$ : supponiamo che  $U, V$  e  $U \cap V$  siano aperti per cui vale la Dualità di Poincaré. Consideriamo allora la successione di Mayer-Vietoris in omologia e comologia a supporto compatto. Abbiamo:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_C^{q-1}(M) & \longrightarrow & H_C^q(U \cap V) & \longrightarrow & H_C^q(U) \oplus H_C^q(V) & \longrightarrow & H_C^q(M) \rightarrow \\ & & \downarrow \rho_{U \cap V} & & \rho_U \downarrow \downarrow \rho_V & & \downarrow \rho_M \\ \rightarrow H_{n-q+1}(M) & \longrightarrow & H_{n-q}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V) & \longrightarrow & H_{n-q}(M) \rightarrow \end{array}$$

dove i quadrati commutano. Non è banale che il quadrato in rosso commuti ma la dimostrazione di questo fatto viene omessa.

A questo punto, è possibile applicare il Lemma dei 5 per ottenere che  $\rho_M$  è isomorfismo, dato che lo sono le altre mappe verticali.

- c)  $M = \bigcup_i U_i$ : supponiamo che  $\{U_i\}_i$  sia una famiglia crescente di aperti per i quali vale la Dualità di Poincaré. Abbiamo allora dei sistemi diretti:

$$\begin{array}{ccccccc} H_C^q(U_1) & \longrightarrow & H_C^q(U_2) & \longrightarrow & H_C^q(U_3) & \longrightarrow & \dots \\ \simeq \downarrow \rho_{U_1} & & \simeq \downarrow \rho_{U_2} & & \simeq \downarrow \rho_{U_3} & & \\ H_{n-q}(U_1) & \longrightarrow & H_{n-q}(U_2) & \longrightarrow & H_{n-q}(U_3) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

che formano un diagramma commutativo (anche in questo caso è delicato vedere la commutatività, viene omessa).

Dato che  $M = \bigcup_i U_i$  crescenti, allora i limiti diretti:

$$\varinjlim_i H_{n-q}(U_i) \stackrel{(a)}{\cong} H_{n-q}(M) \qquad \varinjlim_i H_C^q(U_i) \stackrel{(b)}{\cong} H_C^q(M)$$

dove in (a) e (b) usiamo il fatto che ogni elemento di  $H_{n-q}(U_i)$  è a supporto compatto e sappiamo che ogni compatto è interamente contenuto in qualche  $U_i$  per  $i$  abbastanza grande.

Passando quindi al limite, si trova l'isomorfismo:

$$\rho_M : H_C^q(M) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M)$$

- d)  $M$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ : se  $M$  è convesso, allora è omeomorfo ad  $\mathbb{R}^n$  quindi basta applicare il caso (a). Se  $M$  non fosse convesso, è unione numerabile di palle aperte  $M =$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ . Notiamo che  $M_j = \bigcup_{i=1}^j B_i$  è unione finita di aperti convessi, quindi si possono applicare i casi (a) e (b). Ora, dato che vale la Dualità di Poincaré su  $M_j$ , vale anche sull'unione crescente  $M$  per il caso (c). Questo conclude.

- e)  $M$  varietà qualsiasi: consideriamo l'insieme di tutti gli aperti  $U \subseteq M$  per cui vale la Dualità. Per il lemma di Zorn, vi è un elemento massimale per inclusione per cui vale la dualità: supponiamo esso sia  $V \subseteq M$ . Se  $V = M$  avremmo finito. Supponiamo per assurdo che  $V$  non sia tutta la varietà, allora prendiamo una palla  $B \subset M$  (omeomorfa ad  $\mathbb{R}^n$ ) tale che  $B \not\subseteq V$ . Ma allora la Dualità vale sia per  $V$ , per  $B$  (per il caso (a)) e per  $V \cap B$  aperto. Ma allora la Dualità vale per  $V \cup B$  che contraddice la massimalità di  $V$ . Quindi  $V = M$ .

Questo conclude la dimostrazione del Teorema. □

**Teorema 12.12 - Dualità di Poincaré mod 2**

Sia  $M$  una  $n$ -varietà qualsiasi. L'unica orientazione mod 2 permette di definire l'isomorfismo:

$$\rho_2 : H_C^q(M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M; \mathbb{Z}/2)$$

*Dimostrazione.* Identica alla dimostrazione precedente, usando  $G = \mathbb{Z}/2$ . □

A questo punto, per ogni varietà  $M$  compatta vale che:

$$\begin{aligned} H_C^q(M) \otimes H_{n-q}(M) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \langle \rho_M(\alpha), \beta \rangle \end{aligned}$$

perchè  $\mu_M \in H_n(M)$  è la classe fondamentale che dà l'orientazione globale. Ma allora:

$$\langle \rho_M(\alpha), \beta \rangle = \begin{cases} \beta(\alpha \cap \mu_M) \\ \langle \alpha \cap \mu_M, \beta \rangle = \langle \mu_M, \alpha \cap \beta \rangle = (\alpha \cup \beta)(\mu_M) \end{cases}$$

ovvero c'è una dualità.

**Definizione 12.13 - Dualità**

Siano  $A, B$  degli  $R$ -moduli. Un omomorfismo  $A \otimes B \longrightarrow R$  è una dualità se induce un isomorfismo:

$$\begin{cases} A \longrightarrow \text{hom}_R(B, R) \\ B \longrightarrow \text{hom}_R(A, R) \end{cases}$$

**Proposizione 12.14**

Sia  $M$  una  $n$ -varietà compatta, orientata (a meno di passare in  $R = \mathbb{Z}/2$ ) e connessa. Allora il prodotto CUP è una dualità:

$$H^q(M; R) \otimes H^{n-q}(M; R) \longrightarrow R$$

per  $R$  campo oppure per  $R = \mathbb{Z}$  modulo la torsione di  $H^*(M; \mathbb{Z})$ .

## 12. Co-omologia a Supporto Compatto

---

*Dimostrazione.* Dato che  $R$  è un campo o  $\mathbb{Z}$ , applicando il Teorema dei Coefficienti Universali 8.19 non c'è torsione, quindi:

$$h : H^{n-q}(M; R) \xrightarrow{\sim} \text{hom}(H_{n-q}(M; R), R)$$

è un isomorfismo. Per Dualità di Poincaré, componiamo:

$$H^{n-q}(M; R) \xrightarrow{h} \text{hom}(H_{n-q}(M; R), R) \xrightarrow{D} \text{hom}(H_C^q(M; R), R) = \text{hom}(H^q(M; R), R)$$

dove  $D$  è la mappa indotta al duale dall'isomorfismo  $\rho_M : H_C^q(M; R) \rightarrow H_{n-q}(M; R)$ . Consideriamo ora  $\psi \in H^{n-q}(M; R)$ :

$$D \circ h(\psi) : \begin{array}{ccccc} H^q(M; R) & \longrightarrow & H_{n-q}(M; R) & \longrightarrow & R \\ \phi & \longmapsto & \phi \cap \mu_B & \longmapsto & \psi(\mu_M \cap \phi) = (\phi \cup \psi)(\mu_M) \end{array}$$

Per le ipotesi su  $R$ ,  $D$  ed  $h$  sono isomorfismi e dato che il prodotto  $\cup$  è commutativo a meno del segno:

$$\phi \longmapsto \psi(\mu_M \cap \phi) = (\phi \cup \psi)(\mu_M)$$

è un isomorfismo. La definizione di dualità è soddisfatta.  $\square$

Vediamo come da questo seguono delle proprietà della co-omologia, in particolare sfruttando il fatto che:

$$H^q \xleftrightarrow{\text{dualità}} H^{n-q}$$

Facciamo dei calcoli.

### Teorema 12.15 - Proiettivo Complesso

Vale che:

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$$

dove  $x$  è generatore di  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ .

*Dimostrazione.* Dato che  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è compatto, abbiamo che  $H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq H_C^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ . Accoppiamo con il prodotto CUP:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \otimes H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\cup} & H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \\ \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

in modo da esplicitare la struttura di  $\mathbb{Z}$ -modulo di  $H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

Prendiamo  $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$  generatore. Vogliamo vedere che  $\forall i \leq n$  l'elemento  $x^i = x \cup \dots \cup x$  genera  $H^{2i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ . Questo concluderebbe, dato che conosciamo la struttura di gruppo di  $H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

Vediamolo per induzione su  $n$ :

- $n = 1$ : già vero, nulla da dimostrare.
- $n > 1$ : usiamo la struttura di CW-complesso, dove per ogni  $i = 0, \dots, n$  si incolla una  $2i$ -cella. Allora in particolare:

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \cup (2n+2)\text{-cella}$$

Prendiamo l'inclusione  $i : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$ . Questa induce un omomorfismo:

$$i^* : H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \longrightarrow H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$$

che è isomorfismo per  $q \leq 2n$ , dato che nella successione della coppia  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ :

$$\dots \rightarrow H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \rightarrow H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow H^{q+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow \dots$$

i gruppi agli estremi sono nulli per  $q \leq 2n$ , quindi la mappa centrale è isomorfismo per esattezza. Questo ci dice che:

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \\ x & \longmapsto & i^*(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x^k & \longmapsto & (i^*(x))^k = i^*(x^k) \end{array}$$

Questo isomorfismo implica che  $x^k$  genera  $H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})$  per ipotesi induttiva,  $\forall k \leq n$ . Resta da vedere  $H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})$ . Usiamo la dualità data dal prodotto CUP:

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \otimes H^{2n+2-i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \simeq H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \\ \alpha \otimes \beta & \longmapsto & \alpha \cup \beta \end{array}$$

Questo implica che  $x \cup x^n = x^{n+1}$  è il generatore di  $H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})$ .

□

**Corollario 12.16**

Per  $x$  generatore di  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ :

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$$

**Teorema 12.17 - Proiettivo Reale**

Vale che:

$$H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1}) \qquad H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x]$$

dove  $x$  è generatore di  $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2)$ .

*Dimostrazione.* Analoga al caso complesso.

□



# Capitolo 13

## Gruppi di Omotopia

Sia  $\text{Top}^\circ$  la categoria degli spazi puntati, assumendo che gli spazi siano Hausdorff. A volte scriveremo  $X$  sottintendendo il punto base  $x_0$ .

### Definizione 13.1 - Classe di Omotopia

Indichiamo con  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$  le classi di omotopia di mappe puntate  $X \rightarrow Y$ .

### Definizione 13.2 - Sospensione Ridotta

Indichiamo con  $SX$  la sospensione ridotta di  $X$ , ovvero:

$$SX = X \times I / X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I$$

Come omotopie, lo spazio  $SX$  è equivalente a  $\Sigma X$  dato che sto solamente collassando ad un punto  $\{x_0\} \times I$  che è contraibile per uno spazio  $X$  ragionevole (ad esempio per un CW-complesso).

### Definizione 13.3 - Gruppi di Omotopia

Definiamo:

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)]$$

come l' $n$ -esimo gruppo di omotopia.

### Osservazione 13.1

Nei casi più piccoli:

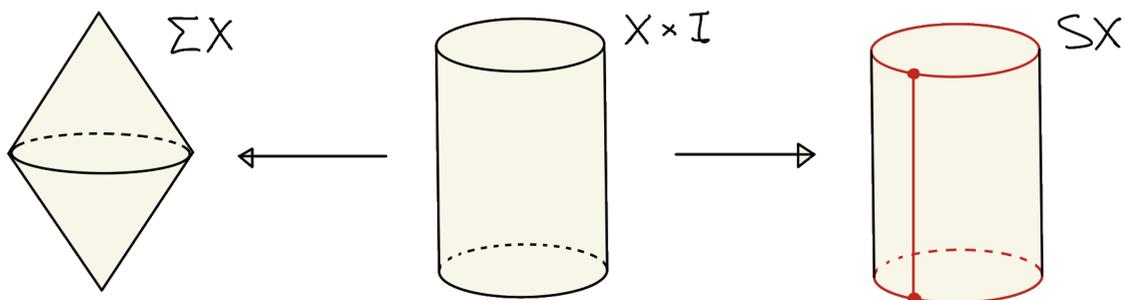


Figura 13.1: Cono ridotto, cono e sospensione ridotta

### 13. Gruppi di Omotopia

- se  $n = 0$ :  $\pi_0(X, x_0)$  è l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$ .
- se  $n = 1$ : si ottiene il gruppo fondamentale.

Dobbiamo ora definire la struttura di gruppo per  $\pi_n(X, x_0)$ .

Sia  $I^n$  il cubo standard. Considero allora lo spazio  $I^n/\partial I^n$  lo spazio puntato con punto base  $[\partial I^n]$ .

**Lemma 13.4**

Vale che  $I^n/\partial I^n \simeq S^n$ .

*Dimostrazione.* Definiamo il "prodotto smash" su  $\text{Top}^\circ$ . Dati  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  spazi puntati, il prodotto smash è:

$$X \wedge Y = (X \times Y) / (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)$$

con punto base  $[X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y]$ .

Osserviamo che date  $f : X \rightarrow X'$  e  $g : Y \rightarrow Y'$  mappe puntate, queste inducono una ben definita:

$$\begin{aligned} f \wedge g : X \wedge Y &\longrightarrow X' \wedge Y' \\ [(x, y)] &\longmapsto [(f(x), g(x))] \end{aligned}$$

Vediamo allora che:

- $n = 1$ : banalmente  $I/\partial I \simeq S^1$
- $n = 2$ : facciamo il prodotto smash  $(I/\partial I) \wedge (I/\partial I) \simeq I^2/\partial I^2$ . Equivale proprio a dimostrare che  $S^1 \wedge S^1 \simeq S^2$ .
- $n \geq 2$ : iterando lo stesso ragionamento, basta vedere che  $I^n/\partial I^n \simeq (I/\partial I)^{\wedge n}$ , ovvero equivalentemente  $(S^1)^{\wedge n} \simeq S^n$ .

Questo conclude. □

**Corollario 13.5**

Possiamo trattare i gruppi di omotopia come:

$$\pi_n(X, x_0) = [(I^n/\partial I^n), (X, x_0)] \simeq [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$$

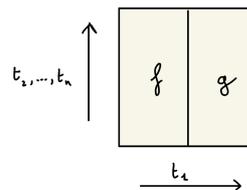
dove con la notazione di coppia di spazi si intendono le funzioni costanti su  $\partial I^n$  in questo caso.

**Definizione 13.6 - Operazione di Gruppo**

Date  $[f], [g] \in [(I^n/\partial I^n), (X, x_0)]$  allora:

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{per } t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{per } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

che è ben definita perchè  $f, g$  costanti sul bordo  $\partial I^n$ . Graficamente, possiamo rappresentarlo come in figura.



**Proposizione 13.7**

Questa operazione rende  $\pi_n(X, x_0)$  un gruppo, commutativo per  $n \geq 2$ .

*Dimostrazione.* Vediamo le proprietà di gruppo:

- Inversa di  $[f]$ : rappresentiamo la classe di  $-[f]$  con la mappa:

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Il fatto che questa sia inversa di  $[f]$  si vede graficamente in Figura 13.2.

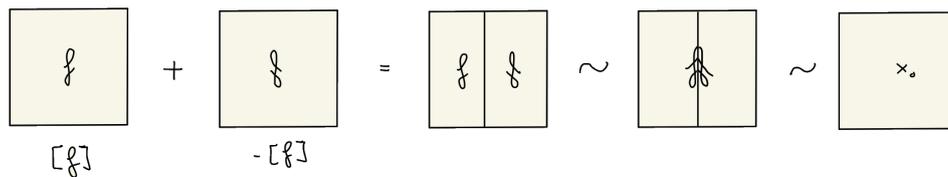


Figura 13.2: Diagramma che prova la proprietà di inverso

- Associatività: si vede nella Figura 13.3 come ottenere l'omotopia cercata.

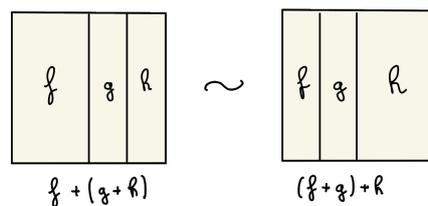


Figura 13.3: Diagramma che prova l'associatività

- Commutatività: dato che  $n > 1$ , lavoriamo solo nelle prime 2 coordinate di  $I^n$  cioè  $t_1, t_2$ . Su questa "faccia" operiamo la trasformazione rappresentata in Figura 13.4.

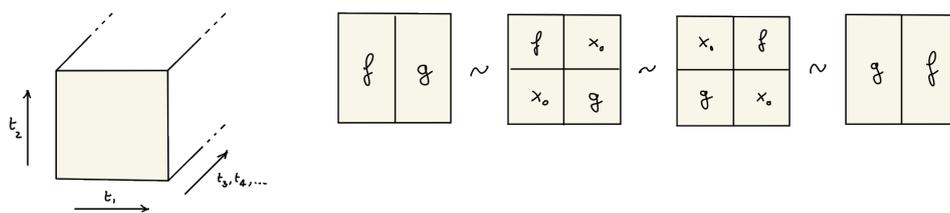


Figura 13.4: Diagramma che prova la commutatività

Questo conclude la dimostrazione. □

**Osservazione 13.2**

Lo stesso ragionamento ci dice che:

$$[(S^n \wedge X, x_0), (Y, y_0)]$$

è un gruppo, abeliano per  $n \geq 2$ .

### 13. Gruppi di Omotopia

---

#### Notazione 13.3

Indicheremo d'ora in poi:

- $\text{hom}(X, Y)$  in  $\text{Top}$  come lo spazio delle mappe continue da  $X$  in  $Y$ .
- $\text{hom}(X, Y)^\circ$  in  $\text{Top}^\circ$  come lo spazio delle mappe continue puntate da  $X$  in  $Y$ .

#### Proposizione 13.8

Siano  $X, Y, Z$  spazi puntati, con  $Y$  localmente compatto. Esiste una bigezione:

$$\text{hom}(X \wedge Y, Z)^\circ \xrightarrow{\sim} \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)^\circ)^\circ$$

che è omeomorfismo.

*Dimostrazione.* E' un fatto di topologia generale, si dimostra con le nozioni fatte le prime lezioni.  $\square$

#### Definizione 13.9 - Spazio dei Loop

Sia  $(X, x_0)$  spazio puntato. Lo spazio dei loop di  $X$  è:

$$\Omega X = \text{hom}(S^1, X)^\circ$$

con punto base dato dalla mappa costante  $S^1 \rightarrow \{x_0\}$ .

Consideriamo i funtori  $X \mapsto SX$  ed  $X \mapsto \Omega X$  in  $\text{Top}^\circ$ . Dall'ultima proposizione segue:

#### Corollario 13.10 - Isomorfismo Aggiunto in Omotopia

C'è un omeomorfismo:

$$[SX, Y]^\circ \simeq [X, \Omega Y]^\circ$$

#### Corollario 13.11

C'è un isomorfismo:

$$\pi_{n+1}(X, x_0) \simeq \pi_n(\Omega X, x_0)$$

Nello spazio dei loop  $\Omega X$  possiamo definire un prodotto: dati

$$f : I/\partial I \rightarrow X \quad \text{e} \quad g : I/\partial I \rightarrow X$$

definiamo:

$$f * g : I/\partial I \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \begin{cases} f(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

#### Proposizione 13.12

La funzione

$$m : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

$$(f, g) \longmapsto f * g$$

ha le proprietà:

1.  $m$  è continua.
2.  $f \mapsto f * x_0$  ed  $f \mapsto x_0 * f$  sono omotope (come mappe puntate) ad  $\text{id}_{\Omega X}$ .

3.  $m(id \times m)$  ed  $m(m \times id)$  sono omotope come mappe puntate in  $(\Omega X)^3 \rightarrow \Omega X$ .  
 4.  $f \mapsto f * f^-$  ed  $f \mapsto f^- * f$  dove  $f^-(t) = f(1-t)$  sono omotope (come mappe puntate) alla mappa costante.

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

**Corollario 13.13**

L'insieme  $[X, \Omega Y]^\circ$  è un gruppo.

**Osservazione 13.4 - Dipendenza dal punto base e azione di  $\pi_1$**

Supponiamo che  $\pi_0(X) = 1$  ed  $x_0, x_1 \in X$ . Consideriamo  $\Omega_{x_0} X$  ed  $\Omega_{x_1} X$  spazi di loop con punti base rispettivamente  $x_0$  ed  $x_1$ .

Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  cammino tale che  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ . Allora possiamo prendere:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{x_1} X & \longrightarrow & \Omega_{x_0} X \\ f & \longmapsto & \gamma * f * \gamma^- \end{array}$$

e questa mappa induce:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(\Omega_{x_1} X, x_1) & \longrightarrow & \pi_i(\Omega_{x_0} X, x_0) \\ \parallel & & \parallel \\ \pi_{i+1}(X, x_1) & \xrightarrow{\gamma_*} & \pi_{i+1}(X, x_0) \end{array}$$

In particolare  $\gamma_*$  è una bigezione (con inversa  $\gamma_*^-$ ).

Se  $x_0 = x_1$ , dà un'azione  $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_n(X, x_0)$  per ogni  $n \geq 1$ , graficamente le omotopie: Se l'azione di  $\pi_1(X, x_0)$  è banale, allora diciamo che  $\pi_n(X, x_0)$  non dipende dal punto base.

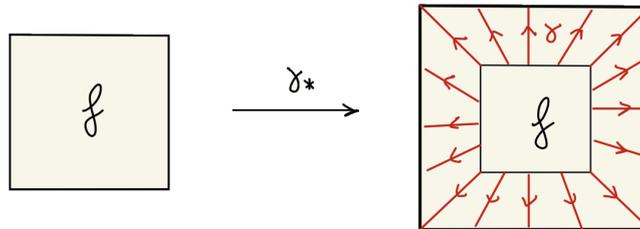


Figura 13.5: Rappresentazione dell'azione di  $\gamma_*$  sulla classe di  $f$

Tra punti base diversi  $x_0, x_1$  l'isomorfismo tra  $\pi_n(X, x_0)$  e  $\pi_n(X, x_1)$  a priori dipende dalla scelta di  $\gamma_*$ . Ma dato che possiamo giungere questo cammino con altri cammini per ottenere qualsiasi altra scelta  $\gamma'_*$  per l'isomorfismo, allora non vi è in realtà nessuna scelta.

**Definizione 13.14 - Fibrazione di Hurewicz**

Una mappa  $p : E \rightarrow B$  si dice fibrazione di Hurewicz se ha la proprietà del sollevamento dell'omotopia (HLP) per qualsiasi spazio topologico  $X$ .

Per HLP si intende che  $X$  spazio topologico, per ogni coppia di mappe:

$$h : X \times I \longrightarrow B \quad \text{ed} \quad a : X \longrightarrow E$$

tali che  $p \circ a(x) = h(x, 0) \forall x \in X$  esiste  $H : X \rightarrow I \rightarrow E$  tale che:

$$p \circ H = h \quad H(x, 0) = a(x) \quad \forall x \in X$$

In altre parole, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & E \\ i_X^0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Chiameremo  $H$  sollevamento di  $h$  con condizione iniziale  $a$  e chiameremo  $p^{-1}(x_0) = F$  la fibra di  $p$ .

**Definizione 13.15 - Fibrato di Serre**

Una mappa  $p : E \rightarrow B$  si dice fibrazione di Serre se vale HLP per gli spazi  $X = I^n \forall n$ .

**Esercizio 13.5**

Valgono le seguenti proprietà:

1. Se  $p : E \rightarrow B$  è fibrazione di Hurewicz, le fibre  $p^{-1}(x)$  e  $p^{-1}(x')$  sono omotopicamente equivalenti se  $B$  è connesso per archi.
2. Se  $p : E \rightarrow B$  è una fibrazione di Serre e  $B$  connesso per archi, allora:

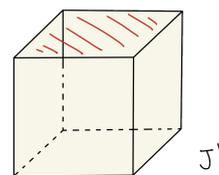
$$\pi_n(p^{-1}(x)) \simeq \pi_n(p^{-1}(x')) \quad \forall n$$

**13.1 Gruppi di Omotopia Relativa**

**Notazione 13.6**

Definiamo un sottoinsieme di  $\partial I^{n+1}$  dato da:

$$J^n = \begin{cases} (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{0\}) & \text{per } n \geq 1 \\ \{0\} & \text{per } n = 0 \end{cases}$$



ovvero intuitivamente tutto  $\partial I^{n-1}$  senza la faccia superiore.

*faccia eliminata*

**Definizione 13.16 - Gruppi di Omotopia Relativa**

Definiamo i gruppi di omotopia relativa come:

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) = [(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, x_0)]$$

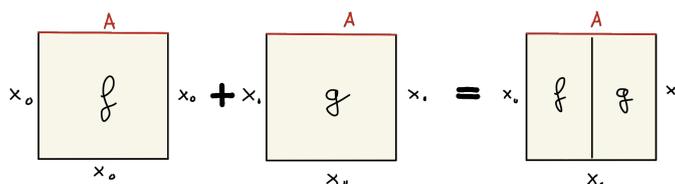


Figura 13.6: Operazione per l'omotopia relativa

**Osservazione 13.7 - Struttura di  $\pi_{n+1}$  relativo**

Per  $n = 0$  non abbiamo un gruppo.

Per  $n \geq 1$  abbiamo un'analogia struttura di gruppo, abeliano per  $n \geq 2$ . Si può definire l'operazione come in Figura 13.6.

**Osservazione 13.8 - Omotopia Relativa come Funtore**

Consideriamo una mappa:

$$f : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$$

in omotopia relativa induce una mappa:

$$f_* : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

che è omomorfismo di gruppi per  $n \geq 2$ .

Se  $A = \{x_0\}$  allora  $f$  induce un omomorfismo per  $n \geq 1$  che identifica  $\pi_n(X, A, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ .

Vediamo ora alcune mappe rilevanti per la nostra discussione.

Si può costruire l'omomorfismo:

$$j_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \quad (13.1)$$

Data una mappa:

$$h : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

essa si può restringere ad  $I^n \simeq I^n \times \{0\}$  ottenendo così:

$$\partial h : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (A, x_0)$$

che induce in omotopia:

$$\partial : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \quad (13.2)$$

che per  $n \geq 1$  è omomorfismo e per  $n = 0$  manda  $\partial([h]) = [h(1)]$ .

Un'altra mappa naturale indotta dall'inclusione è:

$$i_* : \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \quad (13.3)$$

Unendo queste mappe, i seguenti:

**Lemma 13.17 - Isomorfismo Aggiunto Relativo in Omotopia**

*Esiste un isomorfismo canonico:*

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \simeq \pi_n(\Omega X, \Omega A, x_0)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che possiamo identificare:

$$[(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, x_0)] \simeq [(I^{n+1}/J^n, \partial I^{n+1}/J^n, *), (X, A, x_0)]$$

Ora,  $J^n$  è contraibile, quindi quotizzando:

$$\begin{cases} I^{n+1}/J^n \simeq D^{n+1} \\ \partial I^{n+1}/J^n \simeq S^n \end{cases}$$

in entrambi i casi con punto base  $(1, 0, \dots, 0)$ . Facendo la sospensione:

$$S(I^{n+1}/J^n) = I^{n+1}/J^n \wedge I/\partial I = I^{n+2}/(J^n \times I \cup I^{n+1} \times \partial I) = I^{n+2}/J^{n+1} = D^{n+2}$$

Quindi come classi di omotopia:

$$\begin{aligned}\pi_n(\Omega X, \Omega A, x_0) &\simeq [(D^n, S^{n-1}, *), (\Omega X, \Omega A, x_0)] \simeq [(S(D^n), S(S^{n-1}), *), (X, A, x_0)] \\ &= [(D^{n+1}, S^n, *), (X, A, x_0)] = \pi_{n+1}(X, A, x_0)\end{aligned}$$

Chiamiamo questo isomorfismo che abbiamo ottenuto l'isomorfismo aggiunto relativo.  $\square$

**Proposizione 13.18 - Successione esatta di Coppia in Omotopia**

La successione data da:

$$\begin{aligned}\dots &\longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots \\ &\dots \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)\end{aligned}$$

è esatta. La identificheremo come la successione esatta lunga della coppia  $(X, A)$ .

*Dimostrazione.* Alla luce del Lemma precedente, basta dimostrare l'esattezza soltanto nei seguenti punti:

$$\begin{aligned}\dots &\longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, A) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X) \\ &\qquad\qquad\qquad (3) \qquad\qquad\qquad (2) \qquad\qquad\qquad (1)\end{aligned}$$

infatti poi si può usare l'isomorfismo aggiunto e la successione  $(\Omega^n X, \Omega^n A, x_0)$  per ottenere l'esattezza su tutti i gradi. Vediamo l'esattezza nei 3 punti indicati sopra:

1. sia  $a \in A$  tale che  $a \in \text{CCPA}_X(x_0)$ . Allora  $\exists \gamma : I \rightarrow X$  tale che  $\gamma(1) = a$  ed  $\gamma(0) = x_0$ : ciò implica che:

$$[\gamma] \in \pi_1(X, A) \quad \text{e} \quad \partial[\gamma] = [a]$$

ovvero proprio l'esattezza di  $\pi_1(X, A) \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$ .

2. consideriamo la composizione  $\pi_1(X) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A)$ . E' facile vedere che  $\partial \circ j_* = 0$ . Bisogna quindi dimostrare l'inclusione  $\ker \partial \subseteq \text{Im } j_*$ . Consideriamo ora una mappa  $\omega : I \rightarrow X$  tale che  $[\omega] \in \ker \partial$ , ovvero  $\partial[\omega] = 0$ . Questo implica che  $\exists u : I \rightarrow A$  tale che  $u(0) = \omega(1)$  e  $u(1) = x_0$ . Vediamo che  $\omega * u$  è un loop in  $\pi_1(X)$ , quindi costruiamo un'omotopia relativa in  $(X, A)$  con  $\omega$  (come nell'immagine a sinistra in Figura 13.7):

$$H_t(s) = \begin{cases} \omega\left(\frac{2s}{1+t}\right) & s \leq \frac{1+t}{2} \\ u(2s - 1 - t) & s \geq \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

Questo implica che  $[\omega * u] = [\omega] \in \pi_1(X, A)$ , ovvero  $[\omega] \in \text{Im } j_*$ .

3. consideriamo la composizione  $\pi_1(A) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A)$ . Sia  $\gamma \in \pi_1(A)$  e vediamo che  $j_* \circ i_*(\gamma) = 0$  costruendo un'omotopia con il cammino costante a  $x_0$ . La rappresentiamo nella Figura 13.7 a destra. Questo conclude che  $\ker j_* \supseteq \text{Im } i_*$ . Vediamo l'altra inclusione: sia  $\gamma : I \rightarrow X$  e supponiamo che  $\gamma|_{\partial I} \equiv x_0$  (cioè è un loop di  $\pi_1(X)$ ). Se supponiamo che  $j_*(\gamma) = 0$ , allora c'è un'omotopia  $H$  tra  $\gamma$  e il cammino  $x_0$ . Evidenziando i lati del bordo di  $H$ , possiamo deformatli per ottenere un'omotopia  $\tilde{H}$  tra  $\gamma$  e  $\sigma : I \rightarrow A$ . Quindi  $[\gamma] = i_*([\sigma])$ .

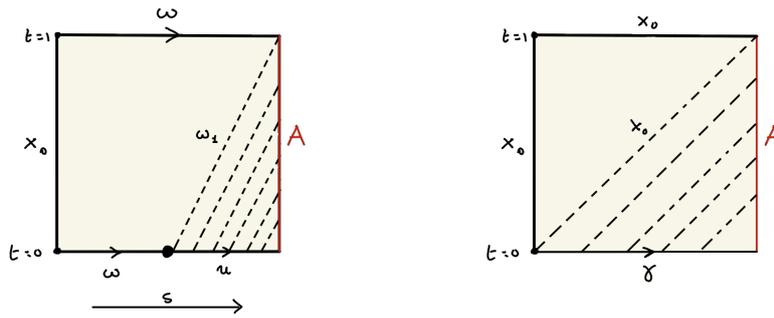


Figura 13.7: Le omotopie del punto (2) e (3) rispettivamente

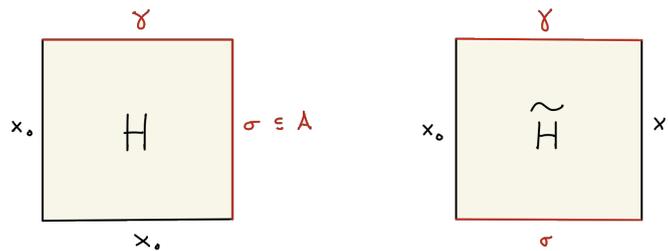


Figura 13.8: Le omotopie  $H$  ed  $\tilde{H}$

Questo conclude la dimostrazione. □

**Osservazione 13.9 - Senso geometrico dell'Omotopia Relativa**

Consideriamo l'inclusione  $\iota : A \hookrightarrow X$ . Si può considerare la "fibra omotopica":

$$F(\iota) = \{(a, \gamma) \in A \times PX \mid \gamma(1) = \iota(a)\}$$

dove  $PX = \{\alpha : I \rightarrow X \mid \alpha(0) = x_0\}$  vengono chiamati "cammini liberi".

Si vede subito che:

$$F(\iota) \overset{\text{omeo}}{\simeq} F(X, A) := \{\gamma \in PX \mid \gamma(1) \in A\}$$

cioè la "fibra relativa". Si può inoltre considerare l'inclusione in composizione con  $\iota^1 : \gamma \mapsto \gamma(1)$ :

$$\Omega X \xrightarrow{i(\iota)} F(X, A) \xrightarrow{\iota^1} A$$

Quindi per  $n \geq 1$  associo alla mappa:

$$f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

la mappa che valutata in ogni  $t \in I$ :

$$f^\wedge : \begin{matrix} I^n & \longrightarrow & F(X, A) \\ (t_1, t_2, \dots, t_n) & \longmapsto & f^\wedge(t_1, t_2, \dots, t_n)(t) = f(t_1, \dots, t_n, t) \end{matrix}$$

Questa mappa manda  $\partial I^n$  al cammino costante quindi induce una mappa:

$$\bar{f} : I^n / \partial I^n \longrightarrow F(X, A)$$

che dà una bigezione tra  $\pi_{n+1}(X, A, x_0) \simeq \pi_n(F(X, A), *)$ . Questo è anche un omomorfismo per la struttura di gruppo.

**Osservazione 13.10**

Se ho una mappa:  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  allora  $f_*$  commuta con la mappa  $\partial$ .

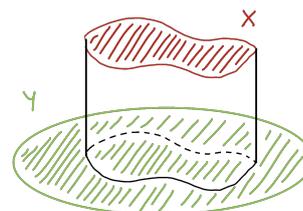
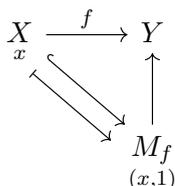
**Osservazione 13.11 - Mapping Cylinder come inclusione**

Tramite il mapping cylinder possiamo considerare (a meno di inclusione omotopica) ogni mappa come se fosse un'inclusione.

Prendiamo una mappa  $f : X \rightarrow Y$  con la quale definiamo il mapping cylinder come:

$$M_f = (Y \sqcup X \times I) / (x, 0) \sim f(x)$$

Abbiamo il diagramma che include  $X$  in  $M_f$  come se fosse  $Y$ :



Supponiamo allora che ci sia l'inclusione  $i : X \hookrightarrow Y$ . Possiamo sostituire  $X$  con lo spazio dei cammini liberi  $P_X Y = \{\gamma : I \rightarrow Y \mid \gamma(1) \in X\}$  che si retrae su  $X$  per deformazione. Allora:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{i} : P_X Y & \longrightarrow & Y \\
 \gamma & \longmapsto & \gamma(1)
 \end{array}$$

è una fibrazione di Serre, con fibra  $F(i) = \{(x, \gamma) \in X \times P_X Y \mid \gamma(1) = x\}$ .

**Teorema 13.19**

Sia  $p : E \rightarrow B$  una fibrazione di Serre con  $B_0 \subseteq B$  ed  $E_0 = p^{-1}(B_0) \subseteq E$  con rispettivi punti base dati da  $b_0 \in B$  ed  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ . Allora  $p$  induce una bigezione:

$$p_* : \pi_n(E, E_0, e_0) \rightarrow \pi_n(B, B_0, b_0)$$

che è isomorfismo per  $n > 1$ .

*Dimostrazione.* Vediamo iniettività e surgettività separatamente.

- $p_*$  surgettiva: dato  $x \in \pi_n(B, B_0, b_0)$ , prendiamo un rappresentante

$$h : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (B, B_0, b_0)$$

che possiamo sollevare ad una mappa:

$$H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, E_0, e_0)$$

dove per costruzione  $H(J^{n-1}) \equiv e_0$  e vale  $p \circ H = h$ . Quindi  $H(\partial I^n) \subseteq E_0$  dato che è il sollevamento di  $h(\partial I^n) \subseteq B_0$ .

Questo è sufficiente per avere la surgettività, dato che  $(I^n, J^{n-1}) \overset{\text{omeo}}{\simeq} (I^n, I^{n-1})$  quindi si può applicare la HLP per fibrati di Serre.

- $p_*$  iniettiva: siano  $x_0, x_1 \in \pi_n(E, E_0, e_0)$  elementi rappresentati rispettivamente da  $f_0, f_1$ . Supponendo che  $p_*(x_0) = p_*(x_1)$ , allora esiste un'omotopia

$$\phi_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (B, B_0, b_0)$$

tale che  $\phi_0 = p \circ f_0$  e  $\phi_1 = p \circ f_1$ . Dato che  $\phi_t(J^{n-1}) = \{b_0\}$  possiamo sollevare quest'omotopia sullo spazio  $T = I^n \times \{0, 1\} \cup J^{n-1} \times I$  come:

$$G: \quad T \quad \longrightarrow \quad E$$

$$(u, t) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} f_t(u) & \text{se } t = 0, 1 \\ e_0 & \text{se } t \neq 0, 1 \end{cases}$$

ottenendo così il diagramma a lato.

Vediamo che  $T \subseteq \partial I^{n+1}$  che è contraibile, quindi si può sollevare ad  $H$ .

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{\phi} & B \end{array}$$

Per il modo in cui  $H$  è stato definito su  $T$ , allora è l'omotopia cercata tra  $f_0$  ed  $f_1$ , quindi  $x_0 = x_1$ . □

**Corollario 13.20**

Data  $p : E \rightarrow B$  fibrazione di Serre, definiamo  $F = p^{-1}(b_0)$ . Allora:

$$\pi_n(E, F, e_0) = \pi_n(B, \{b_0\}, b_0) = \pi_n(B, b_0)$$

quindi c'è una successione esatta lunga per la fibrazione di Serre, tale che:

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \dots$$

**Osservazione 13.12 - Sollevamenti di fibrati localmente banali**

Sia  $p : E \rightarrow B$  è un fibrato localmente banale, ovvero tale che  $\forall b \in B$  esiste  $U \in I(b)$  tale che:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\simeq} & U \times p^{-1}(b) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

Allora si solleva il prodotto:

$$\begin{array}{ccc} I^n & \longrightarrow & E \\ \downarrow i_0 & & \downarrow p \\ I^n \times I & \longrightarrow & B \end{array}$$

Infatti, è ben definita la faccia  $\{x_{n+1} \subset I^n \times I\}$  e con intorni localmente banali questa si solleva ad  $I^n \times [0, \varepsilon]$ .

Reiterando il ragionamento con un intorno localmente banale di  $I^n \times [0, \varepsilon]$ , si solleva eventualmente tutto  $I^n \times I$ .

**Teorema 13.21 - Escissione in Omotopia**

Sia  $Y$  unione di due aperti:  $Y = Y_1 \cup Y_2$  e sia  $Y_0 = Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ .

Supponiamo che esistano  $p, q \geq 1$  tali che:

$$\begin{cases} \pi_i(Y_1, Y_0, *) = 0 & \forall 0 < i < p \\ \pi_i(Y_2, Y_0, *) = 0 & \forall 0 < i < q \end{cases}$$

Allora per qualsiasi scelta di  $*$  in  $Y_0$ , la mappa di escissione indotta da  $(Y_2, Y_0) \hookrightarrow (Y, Y_1)$  induce:

$$\iota : \pi_n(Y_2, Y_0, *) \longrightarrow \pi_n(Y, Y_1, *)$$

che è surgettiva per  $1 \leq n \leq p + q - 2$  ed è bigettiva per  $1 \leq n < p + q - 2$ .

*Dimostrazione.* Omessa. □

### 13.1.1 Applicazioni: Omotopia delle Sfere

Consideriamo la decomposizione della sfera in:

$$S^n = E_+^n \cup E_-^n = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\} \cup \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$$

ricordando che  $E_+^n \simeq S^n \setminus \{S\}$  e  $E_-^n \simeq S^n \setminus \{N\}$  e che intersecando  $E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}$ .

#### Teorema 13.22

Valgono i seguenti fatti:

1.  $\pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(E_+^{n+1}, S^n)$  per  $i \geq 0, n \geq 0$
2.  $\pi_i(S^n) = \pi_i(S^n, E_-^n)$  per  $i \geq 0, n \geq 0$
3.  $\pi_i(S^n) = 0$  per  $0 < i < n$

*Dimostrazione.* Vediamo separatamente i punti:

1. Segue dalla successione esatta lunga della coppia  $(E_+^{n+1}, S^n)$ , dato che:

$$0 = \pi_{i+1}(E_+^{n+1}) \longrightarrow \pi_{i+1}(E_+^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\sim} \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_i(E_+^{n+1}) = 0$$

2. Analogamente al caso precedente:

$$0 = \pi_i(E_-^n) \longrightarrow \pi_i(S^n) \xrightarrow{\sim} \pi_i(S^n, E_-^n) \longrightarrow \pi_{i-1}(E_-^n) = 0$$

3. Vediamo per induzione su  $n$  che  $\pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(S^{n+1}) = 0$ . Infatti:

- $n = 1$ : non c'è nulla da dimostrare perchè  $\pi_0(S^1) = \pi_1(S^2) = 0$ .
- $n > 1$ : usando i punti precedenti:

$$\begin{cases} \pi_i(E_+^{n+1}, S^n) = \pi_{i-1}(S^n) = 0 & \text{per } i \leq n \\ \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) = \pi_{i-1}(S^n) = 0 & \text{per } i \leq n \end{cases}$$

quindi per il Teorema di Escissione in Omotopia si ottiene che:

$$\pi_{i-1}(S^n) = \pi_i(E_+^{n+1}, S^n) \longrightarrow \pi_i(S^{n+1}, E_-^{n+1}) = \pi_i(S^{n+1})$$

è un'isomorfismo per  $1 \leq i \leq 2n$  e per  $i = 2n$  è surgettivo. Ma dato che per  $n \geq 2$  abbiamo  $2n > n$ , segue che  $\pi_i(S^{n+1}) = \pi_{i-1}(S^n) = 0$  per ogni  $i < n$ .

Abbiamo dimostrato ciò che volevamo. □

**Definizione 13.23 - Mappa di Sospensione**

Sia  $(X, x_0)$  uno spazio puntato. Allora c'è una mappa di sospensione:

$$\Sigma : \pi_i(X, x_0) \longrightarrow \pi_{i+1}(SX, x_0)$$

definita tramite l'isomorfismo aggiunto:

$$S_f : (S^1 \wedge S^i, *) \longrightarrow (SX, *)$$

indotto da una mappa  $f : (S^i, *) \rightarrow (X, x_0)$ .

**Lemma 13.24**

La mappa  $\Sigma$  è un omomorfismo.

*Dimostrazione.* Partendo dal cono di  $X$ :

$$CX = I \times X / I \times \{x_0\} \cup \{0\} \times X$$

riconosciamo che  $CX / i(X) \simeq SX$  tramite l'inclusione:

$$\begin{aligned} i : X &\hookrightarrow CX \\ x &\longmapsto [(1, x)] \end{aligned}$$

Allora il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(X, x_0) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{i+1}(SX, *) \\ \partial \uparrow \simeq & & \parallel \\ \pi_{i+1}(CX, X) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(CX/X, *) \end{array}$$

commuta, quindi  $\Sigma$  è omomorfismo. □

**Teorema 13.25 - Isomorfismo di Freudenthal**

La mappa  $\Sigma : \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$  è isomorfismo per  $i \leq 2n - 2$  ed è surgettivo per  $i = 2n - 1$ .

*Dimostrazione.* Identifichiamo  $\Sigma$  come composizione di mappe nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma & & \\ & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \\ \pi_i(S^n) & \xleftarrow{(a)} & \pi_{i+1}(E_-^{n+1}, S^n) & \cdots \cdots \cdots \rightarrow & \pi_{i+1}(E_-^{n+1}/S^n) \xlongequal{\hspace{1em}} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \\ & & \downarrow (b) & & \simeq \uparrow \\ & & \pi_{i+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) & \xrightarrow{(c)} & \pi_{i+1}(S^{n+1}/E_+^{n+1}) \end{array}$$

nel quale vediamo che le mappe:

- (a) è un isomorfismo per il precedente Teorema 13.22.
- (b) ricordando che  $E_+^{n+1} \cup E_-^{n+1} = S^{n+1}$  e  $E_+^{n+1} \cap E_-^{n+1} = S^n$  usiamo il Teorema di Escissione e vediamo che la mappa (b) sarà isomorfismo per  $i+1 < 2n$ , cioè  $i \leq 2n-2$  e sarà surgettiva per  $i+1 = 2n$  ovvero  $i = 2n-1$ .
- (c) è isomorfismo dato che stiamo quotientando per  $E_+^{n+1}$  contraibile.

Questo conclude la dimostrazione. □

**Corollario 13.26**

Vale che  $\forall n$ :

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Vediamo che  $\pi_n(S^n) \simeq \pi_{n+1}(S^{n+1})$  tramite l'isomorfismo di Freudenthal  $\Sigma$ . In particolare va studiato il caso base  $n = 1$ . Infatti per il Teorema precedente sappiamo soltanto che:

$$\mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \xrightarrow{\Sigma} \pi_2(S^2)$$

è surgettiva, in quanto  $i = 2n - 1 = 1$ . Quindi basta mostrare che  $\pi_2(S^2)$  è un gruppo infinito.

Ci basta ricordare la teoria del grado. Associamo ad ogni elemento di  $[S^2, S^2]^\circ$  un elemento di  $\text{hom}(H_2(S^2), H_2(S^2)) \simeq \text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . La mappa così ottenuta:

$$[S^2, S^2]^\circ \longrightarrow \text{hom}(H_2(S^2), H_2(S^2)) \simeq \mathbb{Z}$$

è surgettiva. Infatti nell'identificazione<sup>1</sup> di  $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  le mappe  $f_n(\mathbb{Z}) = z^n$  hanno ognuna grado  $n$ , quindi  $[f_n] \mapsto n$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

La surgettività di questa mappa implica che  $\pi_2(S^2) = [S^2, S^2]^\circ$  è infinito.  $\square$

---

<sup>1</sup>Basti pensare a  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  con la compattificazione di Alexandroff.

# Omotopia di CW-Complessi

**Definizione 14.1 - Proprietà dell'Estensione dell'Omotopia (HEP)**

Sia  $i : A \rightarrow X$  una mappa. Ha la proprietà dell'estensione dell'omotopia (HEP) per uno spazio  $Y$  se date:

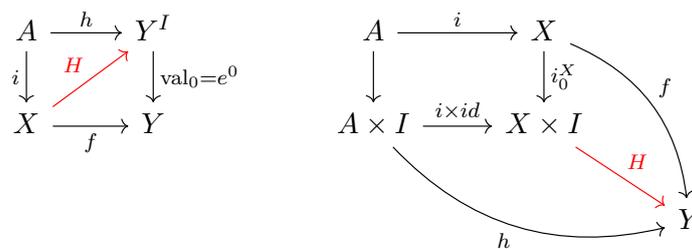
$$\begin{cases} h : A \times I \rightarrow Y \\ f : X \rightarrow Y \end{cases} \quad \text{tali che} \quad f \circ i(a) = h(a, 0) \quad \forall a \in A$$

allora  $\exists H : X \times I \rightarrow Y$  tale che:

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x) & \text{per ogni } x \in X \\ H(i(a), t) = h(a, t) & \text{per ogni } (a, t) \in A \times I \end{cases}$$

Chiamiamo  $H$  l'estensione di  $h$  con condizione iniziale  $f$ .

In altre parole, ci sono i seguenti diagrammi commutativi:



**Definizione 14.2 - Cofibrazione**

Una mappa  $i : A \rightarrow X$  si dice cofibrazione se ha la HEP per ogni spazio  $Y$ .

Nella pratica, non serve dimostrare la HEP per ogni spazio  $Y$ . Si può infatti testare la proprietà sul mapping cylinder di  $i : A \rightarrow X$ , cioè  $M_i$ :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ i_0^A \downarrow & & \downarrow b \\ A \times I & \xrightarrow{k} & M_i \end{array}$$

## 14. Omotopia di CW-Complessi

Date  $f : X \rightarrow Y$  ed  $h : A \times I \rightarrow Y$  tali che  $h \circ i_0^A = f \circ i$ , si può costruire la mappa  $\sigma : M_i \rightarrow Y$  che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 i_0^A \downarrow & & \downarrow b \\
 A \times I & \xrightarrow{k} & M_i \\
 & \searrow h & \downarrow f \\
 & & Y
 \end{array}$$

(A red arrow labeled  $\sigma$  points from  $M_i$  to  $Y$ .)

Infatti, dato che le mappe  $f$  ed  $h$  si "incollano bene" su  $M_i$  (grazie alla commutatività  $h \circ i_0^A = f \circ i$ ) la mappa  $\sigma$  è univocamente determinata in modo da commutare.

Allo stesso tempo, supponiamo che esista  $i : A \rightarrow X$  che ha la HEP per il mapping cylinder  $M_i$ . Allora possiamo aggiungere al diagramma la mappa  $H : X \times I \rightarrow M_i$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & & \swarrow & & \downarrow b \\
 & & X \times I & \xrightarrow{H} & M_i \\
 A \times I & \xrightarrow{k} & & & \\
 & \searrow h & & & \downarrow f \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

(A red arrow labeled  $\sigma$  points from  $M_i$  to  $Y$ .)

Componendo queste mappe, si ottiene  $\sigma \circ H : X \times I \rightarrow Y$  che verifica la HEP per lo spazio  $Y$ , come volevamo.

Viceversa, se  $i : A \rightarrow X$  è una cofibrazione, allora ha la HEP per lo spazio  $M_i$ . Applicando lo stesso ragionamento con  $Y = X \times I$ , se esiste  $r : X \times I \rightarrow M_i$ , si ottiene il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & & \swarrow & & \downarrow b \\
 & & X \times I & \xrightarrow{r} & M_i \\
 A \times I & \xrightarrow{k} & & & \\
 & \searrow i \times id & & & \downarrow i_0^X \\
 & & & & X \times I
 \end{array}$$

(A red arrow labeled  $s$  points from  $M_i$  to  $X \times I$ .)

dove per commutatività deve valere che  $r \circ s = id_{M_i}$ , cioè  $s$  è un'inclusione ed  $r$  una retrazione (omeomorfismo con l'immagine).

Se  $s : M_i \rightarrow X \times I$  ha una retrazione  $r : X \times I \rightarrow M_i$ , allora vale la HEP per il mapping cylinder  $M_i$ .

Riassumendo tutto quanto:

**Teorema 14.3 - Equivalenze con Cofibrazione**

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1.  $i : A \rightarrow X$  è una cofibrazione.
2.  $i : A \rightarrow X$  ha la HEP per il mapping cylinder  $M_i$ .
3.  $s : M_i \rightarrow X \times I$  ha una retrazione.

**Fatto 14.4**

Data  $i : A \rightarrow X$  cofibrazione. Se la mappa  $i$  è un embedding ed  $X$  è Hausdorff, allora  $i(A)$  è chiuso in  $X$ .

*Dimostrazione.* Lasciata per esercizio. □

D'ora in poi assumeremo sempre che le cofibrazioni siano chiuse (ovvero  $i(A)$  chiuso in  $X$ ).

**Definizione 14.5 - Spazio Ben Puntato**

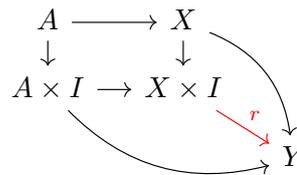
Se  $\{x\} \subset X$  è una cofibrazione chiusa, allora diciamo che  $(X, x)$  è uno spazio ben puntato ed  $x$  è punto base non degenere.

**Proposizione 14.6**

Sia  $i : A \rightarrow X$  un'inclusione chiusa. Allora  $i$  è una cofibrazione se e solo se  $X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  ha una retrazione.

*Dimostrazione.* Vediamo le due implicazioni.

$\Rightarrow$ ) usiamo la HEP con  $Y = X \times \{0\} \cup A \times I$ . Per il Teorema 14.3, abbiamo la retrazione cercata:



$\Leftarrow$ ) date due mappe  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : A \times I \rightarrow Y$  che si incollano bene, consideriamo la mappa continua:

$$\begin{array}{ccc}
 g : X \times \{0\} \cup A \times I & \longrightarrow & Y \\
 (x, 0) & \longmapsto & f(x) \\
 (a, t) & \longmapsto & h(a, t)
 \end{array}$$

Allora tramite la retrazione  $r$  otteniamo  $H : X \times I \rightarrow Y$  come:

$$H : X \times I \xrightarrow{r} X \times \{0\} \cup A \times I \xrightarrow{g} Y$$

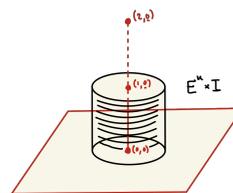
Questo conclude. □

**Esempio 14.1 -  $S^n \hookrightarrow E^{n+1}$  cofibrazione**

L'inclusione  $S^{n-1} \hookrightarrow E^n$  è una cofibrazione.

## 14. Omotopia di CW-Complessi

Consideriamo il cilindro  $E^n \times I$ . Proiettiamo tramite  $E^n \times I \rightarrow S^{n-1} \times I \cup E^n \times \{0\}$  in modo analogo alla proiezione stereografica (cioè prendendo il punto  $(2, 0)$  sull'asse del cilindro ad altezza 2 e tirando da esso semirette passanti per  $E^n \times I$  ed intersecanti il codominio).



Si ottiene così la retrazione del Teorema precedente.

### Lemma 14.7

Data  $i : A \hookrightarrow X$  cofibrazione e  $g : A \rightarrow Y$ , sia  $Z = (X \cup Y)/a \sim g(a)$ , costruiamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ g \downarrow & & \downarrow j \\ Y & \xrightarrow{F} & Z \end{array}$$

Allora anche la mappa  $F : Y \rightarrow Z$  è una cofibrazione.

*Dimostrazione.* Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{i \times id} & X \times I \\ g \times id \downarrow & & \downarrow j \times id \\ Y \times I & \xrightarrow{F \times id} & Z \times I \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{H} \\ \xrightarrow{H'} \\ \xrightarrow{h} \end{array} W$$

Date le mappe  $h : Y \times I \rightarrow W$  ed  $f : Z \rightarrow W$  tali che  $h(y, 0) = f \circ F(y)$  (ovvero si incollano bene) e la mappa composta  $h \circ (g \times id)$ , si può estendere  $f \circ j : X \rightarrow W$  con una mappa  $H : X \times I \rightarrow W$  dato che  $i$  è cofibrazione.

Ma allora  $h$  ed  $H$  si incollano bene: esiste una mappa  $H' : Z \times I \rightarrow W$  che verifica la HEP per  $f$ .  $\square$

### Corollario 14.8

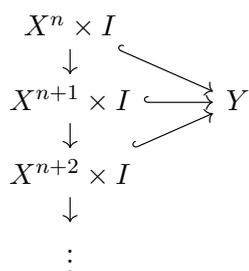
Se  $X$  è un CW-complesso, allora  $X^n \hookrightarrow X$  è una cofibrazione.

*Dimostrazione.* Usiamo il fatto che  $S^n \hookrightarrow E^{n+1}$  è cofibrazione per ottenere il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \sqcup S^n & \hookrightarrow & \sqcup E^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \hookrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

Per il Lemma precedente si conclude che l'inclusione  $X^n \hookrightarrow X^{n+1}$  è una cofibrazione.

Dato che la composizione di cofibrazioni è cofibrazione, si ha che  $X^n \hookrightarrow X^m$  è una cofibrazione per  $m > n$ .



Ma allora, estendendo l'omotopia uno scheletro alla volta, si ottiene che anche  $X^n \hookrightarrow X$  è una cofibrazione. Infatti dato  $Y$  spazio topologico, abbiamo il diagramma a sinistra.

Dato che questa estensione è coerente per l'inclusione degli  $n$ -scheletri, definisce la mappa  $X \times I \rightarrow Y$  che cercavamo.

□

**Definizione 14.9 - Coppia CW**

Sia  $X$  un CW-complesso con un CW-sottocomplesso  $A \subseteq X$ .

Allora definiamo  $(X, A)$  coppia CW.

**Osservazione 14.2**

Ripetendo la dimostrazione del Corollario precedente, si ottiene che  $i : A \rightarrow X$  è una cofibrazione.

**Definizione 14.10 - Coppia  $n$ -connessa**

Una coppia di spazi connessi per archi  $(X, A)$  è  $n$ -connessa se  $\forall x_0 \in A$  e  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ :

$$\pi_i(X, A, x_0) = 0$$

**Osservazione 14.3**

Se  $(X, A)$  è una coppia  $n$ -connessa, la successione esatta lunga dà:

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(X, A) \longrightarrow \pi_i(A) \xrightarrow{f_i} \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(X, A) \longrightarrow \dots$$

dove  $f_i$  è isomorfismo per  $i < n$  ed  $f_n$  è surgettiva per esattezza.

**Lemma 14.11**

La mappa  $f : (E^i, S^{i-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$  è banale in  $\pi_i(X, A, x_0)$  se e solo se  $f$  è omotopa (relativamente ad  $S^{i-1}$ ) ad una mappa  $f' : E^i \rightarrow A$ .

*Dimostrazione.* Vediamo le implicazioni separatamente.

$\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $f \sim f'$  relativamente ad  $S^{i-1}$  e per ipotesi  $f'(E^i) \subset A$ . Sia  $h$  l'omotopia tra  $f$  ed  $f'$ , consideriamo:

$$H : (E^i \times I, S^{i-1} \times I, * \times I) \rightarrow (X, A, *)$$

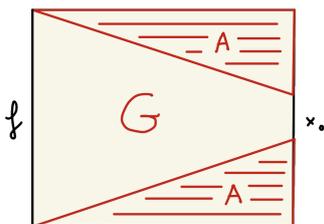
definita come:

$$H(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f'((2-2t)x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Possiamo rappresentare  $H$  come un'omotopia progressiva tra  $f \sim f' \sim x_0$ , dove nella seconda parte usiamo il fatto che  $f'$  è contraibile (essendolo il dominio  $E^i$ ).

$\Rightarrow$ ) Sia  $G$  omotopia tra  $f$  e la mappa costante  $E^i \rightarrow x_0$ . Definiamo un'omotopia  $H : E^i \times I \rightarrow X$  in modo che:

$$H(x, t) = \begin{cases} G\left(\frac{2-t}{2}x, t\right) & \text{se } 0 \leq \|x\| \leq \frac{2-t}{2} \\ G\left(\frac{x}{\|x\|}, 2-2\|x\|\right) & \text{se } \frac{2-t}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$



L'idea è di "riscaldare"  $G$  come in figura:

dove sul tratteggio in rosso, la mappa resta costante a valori in  $A$ . Segue per costruzione che  $H(x, 0) = G(x, 0) = f(x)$  e che  $H(x, 1) \in A$  per ogni  $x \in E^i$ , dato che:

$$G(\cdot, 1) \subset A \quad \text{ed} \quad G(S^{n-1}, *) \subset A$$

e per  $\|x\| = 1$  si ha che  $H(x, t) = G(x, 0) = H(x, 0)$ , cioè  $H$  è costante su  $S^{i-1}$ .

Abbiamo quindi costruito un'omotopia relativa ad  $S^{i-1}$  come richiesto.

Questo conclude la dimostrazione. □

**Corollario 14.12**

*Valgono i seguenti fatti.*

1. La coppia  $(X, A)$  è  $n$ -connessa se e solo se  $\forall i \leq n$  ogni mappa  $f : (E^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$  è omotopa relativamente ad  $S^{i-1}$  alla mappa  $g : E^i \rightarrow A$ .
2. Dati  $X \supset A_1 \supset A_2$ , se  $(X, A_1)$  ed  $(A_1, A_2)$  sono  $n$ -connessi, allora  $(X, A_2)$  è  $n$ -connessa.

*Dimostrazione.* Vediamo che il punto (1) segue dal precedente Lemma, mentre il punto (2) segue dal punto (1). □

**Esempio 14.4**

La coppia  $(E^n, S^{n-1})$  è  $(n - 1)$ -connessa.

*Dimostrazione.* Dalla successione della coppia:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = \pi_{i+1}(E^n) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(E^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & \pi_i(S^{n-1}) & \longrightarrow & \pi_i(E^n) = 0 \\
 & & \uparrow \text{dotted} & & \uparrow \text{dotted} & & \\
 & & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \text{ se } i = n - 1 \\ 0 \text{ se } i < n - 1 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \text{ se } i = n - 1 \\ 0 \text{ se } i < n - 1 \end{array} \right. & & 
 \end{array}$$

segue direttamente la tesi. □

**Proposizione 14.13**

*Se  $X$  è un CW-complesso, allora la coppia  $(X, X^n)$  è  $n$ -connessa.*

*Dimostrazione.* Usiamo il Teorema di Escissione in Omotopia. Consideriamo quindi due aperti di  $X^{n+1}$ :

- $U_1$  unione di dischi aperti, ognuno contenente una  $(n + 1)$ -cella di  $X^{n+1}$ .

- $U_2$  ingrossamento dello scheletro  $X^n$  in  $X^{n+1}$  (ad esempio togliendo i centri da ogni  $(n + 1)$ -cella).

Per costruzione,  $U_1 \cup U_2 = X^{n+1}$  mentre la coppia  $(U_1, U_1 \cap U_2)$  è omotopa a  $\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha^{n+1}, S_\alpha^n)$

dove  $\Lambda$  un insieme che indicizza le  $(n + 1)$ -celle.

Sappiamo già che  $\pi_i(U_1, U_1 \cap U_2) = 0$  per ogni  $i < n + 1$  e applicando il Teorema di Escissione con  $p = n + 1$  e  $q = 1$  si trova:

$$\pi_i(X^{n+1}, U_2) = \pi_i(X^{n+1}, X^n) \leftarrow \pi_i(U_1, U_1 \cap U_2)$$

per  $i \leq n = p + q - 2$ . Ma allora segue immediatamente che  $\pi_i(X^{n+1}, X^n) = 0$  per ogni  $i \leq n$ .

Avevamo visto che se  $(X, A_1)$  ed  $(A_1, A_2)$  sono  $n$ -connessi, allora  $(X, A_2)$  è  $n$ -connessa. Reiterando questo fatto con le coppie  $(X^{k+1}, X^k)$  otteniamo che:

$$(X^{n+k}, X^n) \text{ è } n\text{-connessa per } k > 0$$

Resta da vedere che questo vale passando all'unione  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ . Ma presa una mappa  $f : E^i \rightarrow X$ , essa ha immagine compatta, quindi è contenuta in un numero finito di celle. Esiste quindi  $k > n$  tale che  $\text{Im } f \subseteq X^k$  e dato che  $[f] = 0$  in  $\pi_i(X^k, X^n)$ , seguirà che  $[f] = 0$  anche in  $\pi_i(X, X^n)$  come volevamo.  $\square$

## 14.1 Approssimazione Cellulare

### Definizione 14.14 - Mappa Cellulare

Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra CW-complessi è una mappa cellulare se sugli scheletri  $f(X^k) \subseteq Y^k$  per ogni  $k$ .

### Teorema 14.15 - Approssimazione Cellulare

Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra CW-complessi è sempre omotopa ad una mappa cellulare.

*Dimostrazione.* Mostriamo per induzione che ci sono omotopie  $H^n : X \times I \rightarrow Y$  tali che:

- $H_0^0 = f$
- $H_1^{n-1} = H_0^n$  vale  $\forall n \geq 1$
- $H_1^n(X^i) \subset Y^i$  vale  $\forall n$  e  $\forall i \leq n$
- $H^n$  è costante sull' $(n - 1)$ -scheletro

Se  $X = X^n$  per qualche  $n$ , trovo l'omotopia cercata "incollando" le omotopie  $H^k$  con  $K = 1, \dots, n$ .

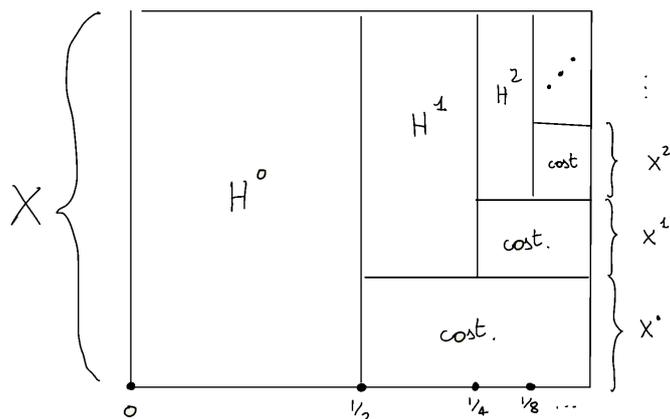
Altrimenti, definiamo un'omotopia:

$$H(x, t) = \begin{cases} H^i(x, 2^{i+1}(t - 1 - 2^{-i})) & \text{se } 1 - 2^{-i} \leq t \leq 1 - 2^{-i-1} \\ H^i(x, t) & \text{se } x \in X^i \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

che graficamente possiamo rappresentare come in figura.

Si vede che per costruzione  $H$  è continua (verificandolo sui compatti).

Resta da costruire la singola omotopia  $H^n$  con le proprietà elencate sopra. Per induzione su  $n$ :



- $n = 0$ :  $\forall x \in X^0$  scelgo un cammino tra  $f(x)$  ed un certo  $y \in Y^0$  che sta nella stessa componente connessa per archi di  $f(x)$ . Questo dà un'omotopia di  $f|_{X^0}$  con una mappa che manda  $X^0 \rightarrow Y^0$ .  
Usando il fatto che  $X^0 \hookrightarrow X$  è una cofibrazione, si può estendere quest'omotopia a tutto  $X$  in modo che mandi  $f$  in  $\bar{f}$  dove  $\bar{f}(X^0) \subset Y^0$ .
- $n > 0$ : assumiamo che  $f(X^i) \subset Y^i$  per ogni  $i < n$ . Denotiamo:

$$\Phi_\alpha : (E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \longrightarrow (X, X^{n-1})$$

la mappa di incollamento della  $\alpha$ -esima  $n$ -cella. Componendo con  $f$ :

$$f \circ \Phi_\alpha : (E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \longrightarrow (Y, Y^{n-1}) \subset (Y, Y^n)$$

Però sappiamo che  $(Y, Y^n)$  è  $n$ -connesso, in particolare  $\pi_n(Y, Y^n) = 0$ . Segue che la mappa  $f \circ \Phi_\alpha$  è omotopa relativamente ad una mappa  $(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \longrightarrow (Y^n, Y^{n-1})$ . Dato che questo si può fare per tutte le  $n$ -celle, otteniamo un'omotopia  $H^n$  tra  $f|_{X^n}$  ed una mappa  $\bar{f}$  tale che  $\bar{f}(X^n) \subset Y^n$ .  
Come prima, dato che  $X^n \hookrightarrow X$  è una cofibrazione, si può estendere quest'omotopia  $H^n$  in modo da ottenere  $\bar{H}^n$  omotopia tra  $f$  ed  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  dove  $\bar{H}^n \subset Y^n$  e l'omotopia è costante su tutto  $X^{n-1}$ .

Questo conclude la dimostrazione. □

Si può adattare la dimostrazione del precedente Teorema per dire:

**Proposizione 14.16**

Sia  $X$  un CW-complesso,  $f : X \rightarrow Y$  continua e  $T \subset Y$  tale che  $\pi_i(X, T) = 0$  per ogni  $i$ . Allora  $f$  è omotopa ad una mappa  $g : X \rightarrow T$ .  
Sia  $X' \subset X$  sottocomplesso CW, tale che  $f(X') \subset T$ . Posso scegliere un'omotopia che è pure costante su  $X'$ .

**Teorema 14.17 - Teorema di Whitehead**

Sia  $f : X \rightarrow Y$  una mappa tra CW-complessi e supponiamo che  $f$  induce  $\forall i$  degli isomorfismi  $\pi_i(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y, y_0)$ . Allora  $f$  è equivalenza omotopica.

**Osservazione 14.5**

Non basta l'isomorfismo tra i gruppi di omotopia: la richiesta di esistenza della mappa  $f$  è fondamentale.

Un esempio è quello di  $S^2 \times \mathbb{R}P^3$  ed  $S^3 \times \mathbb{R}P^2$ . Questi spazi hanno lo stesso rivestimento universale  $S^2 \times S^3$  quindi hanno gli stessi gruppi di omotopia, ma l'omologia li distingue.

**Lemma 14.18**

Sia  $f : X \rightarrow Y$  mappa cellulare tra CW-complessi. Allora  $M_f$  è un CW-complesso ed  $X \hookrightarrow M_f$  è un suo sottocomplesso.

*Dimostrazione Lemma.* Osserviamo che  $X \times I \sqcup Y$  è un CW-complesso. Infatti le sue celle saranno della forma  $e^i \times \{0\}$ ,  $e^i \times \{1\}$  ed  $e^i \times (0, 1)$  dove  $e^i$  è una  $i$ -cella di  $X$  oppure celle di  $Y$ .

Vediamo che si può definire la struttura cellulare di  $M_f$  per induzione sugli  $n$ -scheletri:

- $n = 0$ : è un caso banale, si prendono le 0-celle elencate sopra.
- $n > 0$ : supponiamo di aver costruito l' $(n - 1)$ -scheletro, cioè  $(M_f)^{n-1}$ . Allora si procede ad incollare  $n$ -celle come segue:
  - le celle  $e^{n-1} \times (0, 1)$ , dove  $e^{n-1}$  è una  $(n - 1)$ -cella di  $X$ , hanno bordo contenuto nell' $(n - 1)$ -scheletro di  $X \times I$  e consiste di celle in  $e^{n-2} \times (0, 1)$ ,  $(X \times \{0\})^{n-1}$  e  $(X \times \{1\})^{n-1}$ .  
Dato che  $f$  è cellulare,  $f(X^{n-1}) \subset Y^{n-1}$ . Quindi nel mapping cylinder il bordo della cella  $e^{n-1} \times (0, 1)$  si incolla bene grazie al quoziente  $(X \times \{1\})^{n-1} \rightarrow Y^{n-1} \subset M_f$ .
  - le celle  $e^n \times \{0\}$  e  $e^n \times \{1\}$  si incollano bene nel mapping cylinder in modo analogo.
  - le  $n$ -celle di  $Y$  si incollano bene perchè hanno sempre bordo in  $(M_f)^{n-1}$ .

Queto conclude la dimostrazione, perchè ogni  $n$ -cella descritta ha bordo nell' $(n - 1)$ -scheletro di  $M_f$ . □

*Dimostrazione Teorema.* Il Lemma appena dimostrato implica che l'inclusione  $i : X \hookrightarrow M_f$  è una mappa cellulare. A meno di passare al mapping cylinder, supponiamo che la mappa  $f : X \rightarrow Y$  sia un'inclusione (ovvero  $X$  sottocomplesso di  $Y$ ). Per il Teorema di Approssimazione Cellulare si può supporre che  $f$  sia mappa cellulare. Allora guardando alla successione esatta della coppia  $(Y, X)$  si ottiene:

$$\pi_i(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y, y_0) \longrightarrow \pi_i(Y, X, x_0) \longrightarrow \pi_{i-1}(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_{i-1}(Y, y_0)$$

Per esattezza della successione, allora  $\pi_i(Y, X, x_0) = 0$ .

In particolare per il Lemma 14.11, la mappa  $id_Y : Y \rightarrow Y$  sarà omotopa da una mappa  $Y \rightarrow X$  tramite un'omotopia costante su  $X$  (dato che l'omotopia relativa è banale):  $X$  è retratto per deformazione di  $Y$ . □

**Teorema 14.19 - Approssimazione CW**

Sia  $A$  un CW-complesso e sia  $k \geq -1$ . Sia  $Y$  uno spazio topologico con una mappa  $f : A \rightarrow Y$  tale che:

$$f_* : \pi_i(A, *) \longrightarrow \pi_i(Y, *)$$

è isomorfismo per  $i < k$  ed è surgettiva per  $i = k$ .

Allora  $\forall n > k$  (o pure  $n = \infty$ ) esiste  $X$  CW-complesso tale che:

- $A \subset X$  è suo CW-sottocomplesso.
- $\exists F : X \rightarrow Y$  che estende  $f : A \rightarrow Y$  ed è tale che:

$$F_* : \pi_i(X, *) \rightarrow \pi_i(Y, *)$$

è isomorfismo per  $i < n$  ed è surgettiva per  $i = n$ .

Inoltre,  $X$  è ottenuto attaccando ad  $A$  delle celle di dimensioni  $d$  con  $k \leq d \leq n$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che se un CW-complesso  $X$  si ottiene da  $A$  incollando celle di dimensione  $k$ , per  $i < k$  vale  $\pi_i(X, *) = \pi_i(A, *)$ . Infatti per il Teorema di Approssimazione Cellulare, ogni mappa  $f : S^i \rightarrow X$  si può approssimare ad una mappa cellulare omotopa  $f' : S^i \rightarrow A$ .

Lo stesso risultato continua a valere per omotopie tra mappe: sia  $H$  un'omotopia tra due mappe  $f, f' : S^i \rightarrow X$  dove  $i < k$ . Allora  $H$  è omotopa ad  $H'$  omotopia a valori in  $A$ :

$$\begin{array}{ccc} H : S^i \times I & \longrightarrow & X \\ \wr & & \\ H' : S^i \times I & \longrightarrow & X^k \subset A \end{array}$$

Alla luce di questo fatto, dimostriamo la tesi per induzione su  $n$ :

- $n = 0$ : consideriamo la mappa  $f_* : \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$ . Se questa è surgettiva abbiamo concluso. Se non lo fosse, aggiungiamo 0-celle (quindi punti) ad  $A$  in modo da associare ad ogni punto una componente connessa per archi di  $Y$  che non è raggiunta da  $f_*$ .

Estendendo ora la mappa  $f_*$  come in Figura 14.1 con le frecce rosse, si trova la mappa  $F : X \rightarrow Y$  cercata.

- $n = 1$ : per ipotesi  $f_* : \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$  è surgettiva. Vogliamo renderla anche iniettiva: se due punti dello scheletro  $A^0$  vengono mandati nella stessa componente connessa per archi di  $Y$  (cioè nello stesso elemento di  $\pi_0(Y)$ ) basta aggiungere una 1-cella ad  $A$  che abbia come estremi i due punti.

Resta la surgettività di  $f_* : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(Y)$ . Basterà scegliere un punto base di  $Y$  e per ogni loop che non è raggiunto da  $f_*(\pi_1(A))$  incollare una 1-cella allo 0-scheletro di  $A$ . Portiamo un esempio in Figura 14.1.

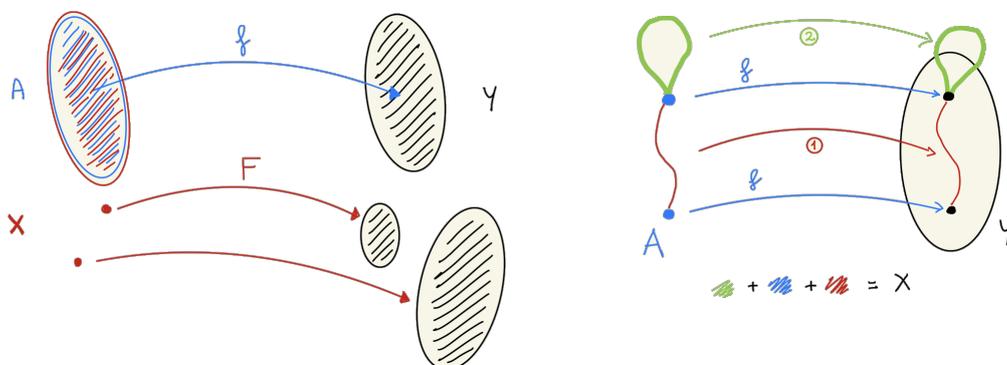


Figura 14.1: Rappresentazione grafica delle celle aggiunte ad  $A$  nei casi  $n = 0$  ed  $n = 1$

- $n \geq 1$ : supponiamo che  $f : A \rightarrow Y$  sia  $(n - 1)$ -connessa. A meno di considerare  $M_f$  al posto di  $Y$ , possiamo vedere  $f$  come un'inclusione. Scegliamo allora dei generatori di  $\pi_n(Y, A, *)$  visto come  $\pi_1(A)$ -modulo<sup>1</sup>:

$$(\Phi_j, \varphi_j) : (E^n, S^{n-1}) \longrightarrow (Y, A, *)$$

Vogliamo aggiungere ad  $A$  delle  $n$ -celle. Considerando come mappe di incollamento al bordo  $\varphi_j : S^{n-1} \rightarrow A$ , possiamo usare  $\Phi_j : E^n \rightarrow Y$  per estendere  $f : A \rightarrow Y$  ad una mappa  $F : X \rightarrow Y$ .

Vediamo che la mappa  $F : X \rightarrow Y$  così costruita verifica le proprietà richieste dal Teorema. Le  $n$ -celle incollate tramite  $(\Phi_j, \varphi_j)$  rappresentano le classi  $x_j \in \pi_n(X, A, *)$  dove  $\forall j$ :

$$F_*(x_j) = y_j = [(\Phi_j, \varphi_j)] \in \pi_n(Y, A, *)$$

Possiamo considerare il seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X, A) & = & 0 \\ \parallel & & \downarrow (1) F_* & & \downarrow F_* & & \parallel & & \downarrow (2) F_* & & \downarrow F_* & & \\ \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(Y) & \longrightarrow & \pi_n(Y, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(Y, A) & = & 0 \end{array}$$

Per costruzione segue che  $F_* : \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_n(Y, A)$  è surgettiva. Si conclude usando il Lemma dei Cinque per ottenere che:

- (1) è una mappa surgettiva: diagram chasing sulle prime 4 colonne.
- (2) è una mappa iniettiva: si seguono le ultime 4 colonne del diagramma.

I dettagli sono stati lasciati per esercizio.

Questo conclude la dimostrazione. □

**Definizione 14.20 - Equivalenza Omotopica Debole**

Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  è detta equivalenza omotopica debole se induce un isomorfismo  $\pi_i(X) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y)$  per ogni  $i > 0$ .

**Corollario 14.21**

Se  $Y$  è spazio topologico connesso per archi, esistono  $X$  un CW-complesso ed una mappa  $F : X \rightarrow Y$  che è equivalenza omotopica debole.

*Dimostrazione.* Usiamo il Teorema con  $k = -1$  ed  $A = \{*\}$  un punto. □

**Proposizione 14.22**

Un'approssimazione CW è unica a meno di equivalenza omotopica. Quindi la mappa che ad  $Y$  associa un'approssimazione CW-complesso dà un funtore:

$$\{\text{Top connessi per archi}\} \xleftarrow{\sim} \{\text{CW-complessi a meno di omotopia}\}$$

<sup>1</sup>Si rimanda alla discussione sulla dipendenza dal punto base dei gruppi di omotopia, cioè l'Osservazione 13.4.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $X_1 \rightarrow Y_1$  ed  $X_2 \rightarrow Y_2$  siano due approssimazioni CW. Sia  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$  una mappa continua. Vogliamo costruire una mappa  $f : X_1 \rightarrow X_2$  che faccia commutare il seguente diagramma a meno di omotopia:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

Nel caso  $Y_1 = Y_2$  con la mappa  $g = id$  si ottiene la prima affermazione, ovvero  $X_1$  ed  $X_2$  sono omotopicamente equivalenti quando approssimano lo stesso spazio  $Y_1 = Y_2$ . Per la seconda affermazione possiamo supporre che  $X_2 \hookrightarrow Y_2$ , a meno di passare al mapping cylinder. Dato che  $\pi_i(X_2) = \pi_i(Y_2)$  segue che  $(Y_2, X_2)$  è una coppia  $i$ -connessa  $\forall i$ . Ora, la Proposizione 14.16 ci dice che la mappa composta  $h$ :

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\quad} & Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ & & & & X_2 \end{array}$$

*(Note: The diagram shows a curved arrow labeled 'h' from X1 to Y2, and a dotted arrow labeled 'f' from X1 to X2.)*

è omotopa ad una mappa  $f : X_1 \rightarrow X_2 \subseteq Y_2$ . Si vede per esercizio che due mappe  $f, f'$  che verificano queste ipotesi sono sempre omotope. □

**Proposizione 14.23**

Sia  $f : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica debole. Allora:

$$f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$$

è isomorfismo  $\forall i$ .

*Dimostrazione (idea).* Supponiamo che  $f : X \rightarrow Y$  sia un'inclusione, a meno di passare al mapping cylinder.

Per  $n \geq 0$  definiamo il sottocomplesso di catene di Eilenberg  $C^{(n,A)}(X) \subset C.(X)$  tale che  $C_i^{(n,A)}(X)$  è il sottocomplesso di  $C.(X)$  generato dai semplici  $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$  dove tutte le facce di  $\Delta^i$  di dimensione  $< n$  vengono mandate in  $A \subset X$ .

Si omette la dimostrazione che  $C^{(n,A)}(X)$  è effettivamente un sottocomplesso di  $C.(X)$ . Inoltre, vale il seguente fatto:

**Fatto 14.24**

Se  $(X, A)$  è una coppia  $(n - 1)$ -connessa allora  $C^{(n,A)}(X) \hookrightarrow C.(X)$  è un'equivalenza omotopica di catene<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>La dimostrazione si ottiene costruendo esplicitamente l'omotopia di catene.

Dato che  $f$  è inclusione ed equivalenza omotopica per ipotesi, segue che la coppia  $(Y, X)$  è  $n$ -connessa  $\forall n$  quindi:

$$H_i(Y) = H_i(C^{(n,X)}(Y))$$

e ne segue per costruzione che:

$$C_i^{(n,X)}(Y) = C_i(X) \Rightarrow H_i(X) \simeq H_i(Y) \forall i$$

che completa la dimostrazione. □

L'idea di base dietro all'approssimazione CW è che per calcolare l'omologia di uno spazio topologico  $X$  possiamo calcolare l'omologia di un CW-complesso debolmente omotopicamente equivalente.

Vediamo un caso particolare di approssimazione CW.

**Teorema 14.25**

Sia  $Y$  un CW-complesso tale che  $\forall i \leq n$  valga  $\pi_i(Y) = 0$ . Allora  $Y$  è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso con  $X^n = \{*\}$ .

*Dimostrazione.* Basta applicare direttamente il Teorema di Approssimazione CW. □

**Teorema 14.26 - Teorema di Hurewicz**

Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi.  $C'$  è un isomorfismo funtoriale:

$$\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{h_n} H_n(X)$$

Se  $X$  è  $(n - 1)$ -connesso, allora:

- per  $n = 1$  l'omomorfismo  $h_1$  è l'abelianizzazione.
- per  $n > 1$  l'omomorfismo  $h_n$  è isomorfismo e  $\tilde{H}_i(X) = 0$  per ogni  $i < n$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione su  $n$ .

- $n = 1$ : già visto con il Teorema 4.14.
- $n > 1$ : dato che equivalenze omotopiche deboli inducono isomorfismi in omologia, possiamo sostituire lo spazio  $X$  con un'approssimazione CW. Supponiamo quindi che  $X$  sia un CW-complesso.

Per il Teorema precedente, supponiamo che  $X^{n-1} = \{*\}$ . Per  $X$  CW-complesso sappiamo che  $(X, X^{n+1})$  è  $(n + 1)$ -connessa, quindi l'inclusione  $X^{n+1} \subset X$  induce in omotopia un'isomorfismo:

$$\pi_n(X^{n+1}) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X)$$

e in omologia sappiamo  $H_n(X) \simeq H_n(X^{n+1})$ . Supponiamo quindi che  $X = X^{n+1}$ . Costruiamo una mappa tra bouquet di  $S^n$  (identificato con lo spazio  $A$ ) e le  $n$ -celle di  $B = X^n$  (dato che  $X^{n-1} = \{*\}$ ,  $X^n$  è proprio bouquet delle  $S^n_\alpha$ ):

$$\varphi : A = \bigvee_j S_j^n \longrightarrow B = \bigvee_\alpha S_\alpha^n$$

Vedremo (dopo il Lemma) che  $X^{n+1}$  è omotopicamente equivalente al mapping cone di  $\varphi$ , dove le  $(n + 1)$ -celle di  $X^{n+1}$  corrispondono ai mapping cone delle singole  $n$ -celle identificate da  $\varphi$ , come mostrato in Figura 14.2.

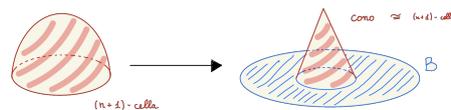


Figura 14.2: Identificazione della  $(n + 1)$ -cella nel mapping cone

Prima di fare questo, facciamo due osservazioni preliminari.

Il Teorema di Hurewicz è già stato dimostrato nel caso in cui  $X = S^n$  (cioè il bouquet di una sola sfera). Conosciamo infatti  $H_n(S^n)$  e  $\pi_n(S^n)$ : preso  $a$  generatore di  $H_n(S^n)$ , l'isomorfismo  $h_n$  è dato dal grado della mappa  $f \in \pi_n(X)$ :

$$h_n : \begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \longrightarrow & H_n(X) \\ [f : S^n \rightarrow X] & \longmapsto & f_*(a) \end{array}$$

Per bouquet di sfere  $S^n$  è necessario il prossimo Lemma: poi per additività dell'omologia e naturalità si riesce a concludere.

**Lemma 14.27**

Sia  $n > 1$ . Vale che:

$$\pi_n \left( \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \right) = \bigoplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n)$$

ed il gruppo fondamentale del bouquet è generato dalle inclusioni  $S_{\alpha}^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ .

*Dimostrazione.* Cominciamo dimostrando il caso di bouquet finiti.

In questo caso basta guardare all'inclusione  $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \subset \prod_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Sappiamo che il bouquet è un CW-complesso di dimensione  $n$  mentre il prodotto di sfere è un CW complesso con celle di dimensioni  $kn$  dove  $k \in \mathbb{N}$ . Dato che  $n > 1$ , la coppia  $\left( \prod_{\alpha} S_{\alpha}^n, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \right)$  è  $(2n - 1)$ -connessa (non ha celle di dimensione compresa tra  $n$  e  $2n$ ) quindi l'inclusione induce un isomorfismo in  $\pi_n$ :

$$\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \hookrightarrow \prod_{\alpha} S_{\alpha}^n \quad \Rightarrow \quad \pi_n \left( \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \right) \xrightarrow{\sim} \pi_n \left( \prod_{\alpha} S_{\alpha}^n \right)$$

Per concludere il caso finito, ricordiamo che  $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ .

Supponiamo che il bouquet non sia finito. Allora vediamo che la seguente mappa indotta dalle inclusioni  $S_{\alpha}^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$  è isomorfismo:

$$\Phi : \bigoplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n) \longrightarrow \pi_n \left( \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \right)$$

- $\Phi$  è surgettiva. Data una mappa  $f : S^n \rightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ , questa ha immagine compatta quindi in particolare ha immagine in un sottobouquet finito.
- $\Phi$  è iniettiva. Supponiamo che ci sia una mappa  $f$  tale che  $\Phi(f) = 0$ . Allora c'è un'omotopia di  $f$  con la mappa banale. Sempre per argomento di compattezza, tale omotopia ha immagine compatta, contenuta quindi in un sottobouquet di sfere.

Per argomento di compattezza, il caso di bouquet infiniti si riconduce al caso finito.  $\square$

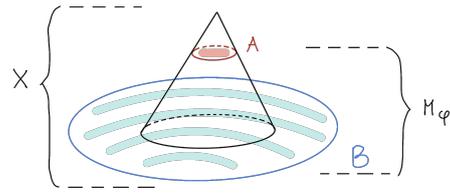
*Dimostrazione Teorema (continuazione).* Il Lemma dimostra che il Teorema di Hurewicz vale per  $X$  bouquet di sfere  $S^n$ . Questo ci servirà per costruire l'isomorfismo tra  $X$  generico e il mapping cone  $C_{\varphi}$  di  $\varphi$ . Scriviamo il diagramma commutativo della coppia  $(B, A)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_n(B, A) & \longrightarrow & 0 \\ (1) \downarrow \simeq & & (2) \downarrow \simeq & & (3) \downarrow & & \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(B, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove gli isomorfismi (1) e (2) seguono dal Lemma ed assieme all'esattezza delle righe questo implica che (3) dev'essere isomorfismo.

Si conclude osservando che per Escissione:

$$(B, A) \stackrel{\text{escissione}}{\sim} (X, CA) \sim (X, *)$$



come si può vedere in Figura 14.3.

Figura 14.3: Mapping cone, cylinder

L'isomorfismo  $\pi_n(B, A) \xrightarrow{\sim} H_n(B, A)$  dà l'isomorfismo  $\pi_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X)$  voluto.  $\square$

**Corollario 14.28**

Sia  $X$  semplicemente connesso ed  $\tilde{H}_i(X) = 0 \forall i < n$ . Allora:

- $\pi_i(X) = 0$  per ogni  $i < n$
- $\pi_n(X) \simeq H_n(X)$

*Dimostrazione.* Si applica induttivamente sul grado  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  il Teorema di Hurewicz.  $\square$

**Teorema 14.29 - Hurewicz Relativo**

Sia  $(X, A)$  una coppia di CW-complessi semplicemente connessi tali che  $H_i(X, A) = 0$  per  $i < n$  ed  $n \geq 2$ . Allora:

- $\pi_i(X, A) = 0$  per ogni  $i < n$ .
- $h'_n : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Dimostriamo un risultato preliminare. Fissato  $j \leq n$ , se  $\pi_i(X, A) = 0$  per ogni  $1 \leq i < j$  allora possiamo costruire:

$$\pi_j(X, A) \xrightarrow{\alpha_j} \pi_j(X \cup CA, CA) \xrightarrow{\sim_\beta} \pi_j\left(\frac{X \cup CA}{CA}, \frac{CA}{CA}\right) \simeq \pi_j(X/A)$$

dove la mappa  $\beta$  è un isomorfismo dato che si quozienta  $CA$  contraibile.

Applichiamo il Teorema di Escissione in omotopia con  $Y_1 = X$  ed  $Y_2 = CA$ . Sapendo che  $Y_0 = Y_1 \cap Y_2 = A$ , per ipotesi vale che:

$$\begin{cases} \pi_i(Y_1, Y_0) = \pi_i(X, A) = 0 & \forall 0 < i < j \\ \pi_i(Y_2, Y_0) = \pi_i(CA, A) = 0 & \forall 0 < i < 2 \end{cases}$$

quindi  $\pi_i(X \cup CA, CA) \rightarrow \pi_i(X, A)$  è un isomorfismo per  $i \leq j + 2 - 2 = j$  e segue che  $\alpha_j$  è un isomorfismo.

L'idea della dimostrazione è ricondurci al caso non relativo tramite il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \pi_j(X, A) & \xrightarrow{\alpha_j} & \pi_j(X/A) \\ \downarrow h'_j & & \downarrow h_j \\ H_j(X, A) & \xrightarrow{\sim_b} & \tilde{H}_j(X/A) \end{array}$$

dove la mappa  $b$  è isomorfismo per escissione della buona coppia  $(X, A)$  di CW complessi. Lavoriamo ricorsivamente su  $j = 1, 2, \dots, n$ :

- $j = 1$ : la tesi segue direttamente dal fatto che  $X$  ed  $A$  sono semplicemente connessi, quindi  $\pi_1(X, A) = 0$  ed  $H_1(X, A) = 0$  per cui l'isomorfismo è banale.
- $1 < j \leq n$ : supponiamo che la tesi sia vera fino all'indice  $j - 1$ .  
Dato che  $h'_{j-1} : \pi_{j-1}(X, A) \xrightarrow{\sim} H_{j-1}(X, A)$  è un isomorfismo e  $H_{j-1}(X, A) = 0$  per ipotesi, segue che  $\pi_{j-1}(X, A) = 0$ . Applichiamo allora il risultato preliminare per ottenere che  $a_j = \beta \circ \alpha_j$  è un isomorfismo. Dal Corollario precedente, abbiamo anche che  $h_j$  è un isomorfismo, quindi per commutatività del diagramma  $h'_j$  è un isomorfismo.

Reiterando il ragionamento fino a  $j = n$ , si ottiene  $\pi_j(X, A) = 0$  per ogni  $j < n$  e che c'è l'isomorfismo  $h'_n : \pi_n(X, A) \simeq H_n(X, A)$ . Ovvero la tesi.  $\square$

# Capitolo 15

## Invariante di Hopf

### 15.1 Introduzione all'invariante

Si è visto che:

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \pi_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n \\ 0 & \text{per } i < n \end{cases}$$

Vedremo che esiste una mappa  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  che rappresenta un elemento non banale di ordine infinito in  $\pi_{2n-1}(S^n)$  per  $n$  pari.

#### **Teorema 15.1 - Teorema di Serre**

Vale che:

$$\pi_m(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } m < n \\ \mathbb{Z} & \text{se } m = n \\ \mathbb{Z} \oplus A & \text{se } m = 2n - 1 \\ B_m & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $A, B_m$  gruppi abeliani finiti.

Ma allora, trovando la mappa  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  otteniamo la parte infinita dei  $\pi_i(S^n)$ .

La costruzione passa per un invariante:

$$H : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$$

che ha immagine infinita se  $n$  è pari.

#### **Definizione 15.2 - Mapping Cone**

Sia  $f : X \rightarrow Y$ . Il mapping cone è:

$$C_f = CX \sqcup Y / (x, 1) \sim f(x)$$

Inoltre, definiamo l'inclusione  $j : Y \hookrightarrow C_f$ .

In particolare osserviamo che se  $X = S^n$  ed  $Y$  è un CW-complesso con  $f : S^n \rightarrow Y$  mappa cellulare, allora  $C_f$  si ottiene come incollamento di una  $(n+1)$ -cella  $E^{n+1}$  in  $Y$  tramite la mappa  $f : \partial E^{n+1} \simeq S^n \rightarrow Y$ .

**Proposizione 15.3**

Le mappe  $f : X \rightarrow Y$  ed  $j : Y \rightarrow C_f$  inducono una successione esatta lunga in co-omologia:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(Y) & \longrightarrow & H^0(X) & \longrightarrow & H^1(C_f) & \longrightarrow & H^1(Y) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & H^{i-1}(X) & \longrightarrow & H^i(C_f) & \xrightarrow{j^*} & H^i(Y) \xrightarrow{f^*} H^i(X) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Inoltre, due mappe  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  omotope inducono successioni isomorfe.

*Dimostrazione.* Usiamo il mapping cylinder di  $f$ , con il quale si ottiene:

$$X \xrightarrow{\sim} X \times \{0\} \hookrightarrow M_f \xleftarrow{\cong} Y$$

dove l'inclusione a destra è equivalenza omotopica per costruzione di  $M_f$ . Possiamo quindi scrivere la successione esatta in co-omologia della coppia  $(M_f, X)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H^{i-1}(X) & \longrightarrow & H^i(M_f, X) & \longrightarrow & H^i(M_f) & \longrightarrow & H^i(X) \rightarrow \dots \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & H^i(Y) & & \end{array}$$

L'inclusione  $M_f \hookrightarrow C_f$  induce una mappa:

$$\tilde{H}^i(C_f) = H^i(C_f, *) \xrightarrow{p^*} H^i(M_f, X)$$

dove  $p^*$  è un isomorfismo per Escissione<sup>1</sup>.

Inoltre, siano  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  omotope. Usando la loro omotopia  $h : X \times I \rightarrow Y$ , si ottiene il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I & \xleftarrow{i_1^X} & X \\ \downarrow f_0 & & \downarrow h & & \downarrow f_1 \\ Y & \xlongequal{id} & Y & \xlongequal{id} & Y \end{array}$$

che induce morfismi di successioni esatte, poiché  $i_0^X$  ed  $i_1^X$  sono equivalenze omotopiche. Questo conclude. □

## 15.2 Costruzione di $H(f)$

Consideriamo una mappa  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ .

Fissiamo due generatori  $x \in H^{2n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})$  ed  $y \in H^n(S^n; \mathbb{Z})$ . Vediamo cosa succede a questi generatori nella successione esatta della Proposizione precedente:

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(S^{2n-1}) \longrightarrow H^n(C_f) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow H^n(S^{2n-1}) \rightarrow \dots$$

$$\alpha := (j^*)^{-1}(y) \longleftarrow y$$

Al contempo, nella stessa successione:

$$\dots \rightarrow H^{2n-1}(S^n) \longrightarrow H^{2n-1}(S^{2n-1}) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^{2n}(C_f) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow H^{2n}(S^n) \rightarrow \dots$$

$$x \longmapsto \beta := \partial(x)$$

---

<sup>1</sup>Si rimanda agli appunti dell'anno precedente per il passaggio esplicito.

Ma allora, scriviamo la relazione tra questi elementi generatori  $\alpha \in H^n(C_f)$  e  $\beta \in H^{2n}(C_f)$ . Per  $n$  pari, esisterà un coefficiente  $H(f) \in \mathbb{Z}$  tale che:

$$\alpha \cup \alpha = H(f)\beta$$

Dato che  $H(f)$  è costruito a partire dal diagramma: se  $f, g : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  sono omotope allora i diagrammi indotti sono omotopi ed  $H(f) = H(g)$ .

Abbiamo ottenuto un invariante per omotopia:

**Definizione 15.4 - Invariante di Hopf**

Data  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  con  $n$  pari, si definisce l'invariante di Hopf  $H(f)$  per la classe  $[f]$  con la costruzione sopra.

**Fatto 15.5**

Siano  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  e  $g : S^n \rightarrow S^n$  con  $g$  mappa di grado  $m$ . Allora:

$$H(g \circ f) = m^2 \cdot H(f)$$

Siano  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  e  $g : S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  con  $g$  mappa di grado  $m$ . Allora:

$$H(f \circ g) = m \cdot H(f)$$

Se  $n$  è dispari, allora  $H(f) = 0$ .

*Dimostrazione.* Le proprietà seguono applicando la costruzione dell'invariante di Hopf.  $\square$

**Proposizione 15.6**

Se  $n$  è pari allora esiste  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  tale che  $H(f) = \pm 2$ .

*Dimostrazione (idea).* Identifichiamo  $S^n \vee S^n = (S^n \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S^n) \subset S^n \times S^n$ . Vedendo la struttura di CW complesso, si trova che:

$$S^n \times S^n = S^n \vee S^n + \left( \begin{array}{c} 2n\text{-cella con mappa di incollamento} \\ g : S^{2n-1} \rightarrow S^n \vee S^n \end{array} \right)$$

Infine, pensiamo alla mappa che manda le sfere del bouquet in  $S^n$ . Indicando con  $*$  il punto di contatto:

$$h : S^n \vee S^n \rightarrow S^n \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} h(x, *) = x \\ h(*, x) = x \end{cases}$$

Si dimostra (omesso) che  $f = h \circ g$  è la mappa cercata tale che  $[f] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ .  $\square$

**Corollario 15.7**

Se  $n$  è pari allora  $\pi_{2n-1}(S^n)$  è infinito.

**Fatto 15.8 - Fibrazione (Hatcher, pag.377)**

Data  $p : E \rightarrow B$  fibrazione,  $\forall x \in B$  esiste un intorno  $U \subseteq B$  tale che ci sia un

omeomorfismo  $h$ :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \\ & & U \end{array}$$

dove  $F = p^{-1}(x_0)$ . Allora per esplicitare la fibra  $F$  si può scrivere una composizione (come fosse una "successione esatta corta" di spazi topologici):

$$F \longrightarrow E \longrightarrow B$$

### Esempio 15.1 - Fibrazione di Hopf

Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xleftarrow{p} & S^3 & \xleftarrow{\quad} & S^1 \\ & \downarrow & \swarrow \phi & & \\ S^2 \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & & & & \end{array}$$

dove la mappa  $\phi$  è una fibrazione.

In questo caso risulta che l'invariante di Hopf è  $H(\phi) = 1$ .

Questo dimostra che la mappa  $\phi$  non è omotopa all'identità e genera il sottogruppo libero di  $\pi_3(S^2)$ .

Si può generalizzare questo esempio per  $\psi : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  con  $n = 2^k$ .

# Indice analitico

- R*-modulo, 11
- n*-cella, 53
- n*-scheletro, 53
  
- Albero massimale, 50
- Approssimazione cellulare, 129
- Approssimazione della mappa diagonale, 84
- Approssimazione di Alexander-Whitney, 84, 96
  
- Bordo, 12
- Bottiglia di Klein, 51
- Buona coppia, 40
  
- Campo tangente, 28
- Caratteristica di Eulero, 49, 60, 62
- Categoria, 7
- Categoria piccola, 7
- Catena, 12
- Catena singolare, 15
- Cicli omologhi, 12
- Ciclo, 12
- Classe di omotopia, 109
- Classe fondamentale, 90, 103
- Co-bordo, 12
- Co-catena, 12
- Co-omologia a coefficienti in  $G$ , 69
- Co-omologia a supporto compatto, 99
- Co-omologia di co-catene, 13
- Co-omologia relativa, 77
- Cofibrazione, 123
- Complesso contraibile, 79
- Complesso CW, 53
- Complesso delle catene cellulari, 57
- Complesso di catene, 11
- Complesso di catene a supporto compatto, 99
  
- Complesso di catene relative, 16
- Complesso di catene singolari, 16
- Complesso di co-catene, 12
  
- Cono, 41
- Contrazione, 14
- Coppia *n*-connessa, 127
- Coppia compatta, 42
- Coppia CW, 127
  
- Diametro del simpleso, 35
- Dualità, 105
- Dualità di Poincaré mod 2, 105
  
- Elemento a supporto compatto, 99
- Equivalenza, 8
- Equivalenza omotopica debole, 133
  
- Fibra omotopica, 117
- Fibra relativa, 117
- Fibrazione, 141
- Fibrazione di Hopf, 142
- Fibrazione di Hurewicz, 113
- Fibrazione di Serre, 114, 118, 119
- Formula di Kunneth, 82
- Funtore, 8
- Funtore Ext, 70, 73
- Funtore Tor, 70
- Funtore Tor', 72
- Funtore aciclico, 34
- Funtore controvariante, 8
- Funtore covariante, 8
- Funtore libero, 33
  
- Grado, 27
- Grafo regolare finito, 47
- Gruppi di omotopia, 109, 110
- Gruppi di omotopia relativa, 114
- Gruppo abelianizzato, 30
- Gruppo fondamentale, 29
  
- Insieme diretto, 100
- Invariante di Hopf, 141
- Isomorfismo aggiunto in omotopia, 112

- Isomorfismo aggiunto relativo in omotopia, 115  
 Isomorfismo di Freudenthal, 121  
 Lemma dei 5, 37  
 Lemma del serpente, 13  
 Limite diretto, 100  
 Mappa antipodale, 27  
 Mappa caratteristica, 53  
 Mappa cellulare, 56, 129  
 Mappa di bordo, 11  
 Mappa di sospensione, 121  
 Mapping cone, 139  
 Mapping cylinder, 118  
 Morfismo di co-catene, 12  
 Morfismo di complessi di catene, 11  
 Numero di incidenza, 63  
 Omologia a coefficienti in  $G$ , 67  
 Omologia di catene, 12  
 Omologia relativa, 16, 77  
 Omologia ridotta, 18  
 Omologia ridotta di  $S^n$ , 25  
 Omologia singolare, 15  
 Omotopia, 21  
 Omotopia di CW-complessi, 123  
 Omotopia di morfismi, 14  
 Omotopia di sfere, 120  
 Orientazione, 89  
 Paracompattezza, 55  
 Partizione dell'unità, 55  
 Piano proiettivo, 50  
 Poset, 7  
 Prodotto CAP, 95, 96, 103  
 Prodotto CAP relativo, 96  
 Prodotto CUP, 79, 85  
 Prodotto CUP relativo, 86  
 Prodotto graded-commutative, 79  
 Prodotto smash, 110  
 Prodotto tensoriale, 67  
 Proiettivo complesso, 78, 86, 87, 106  
 Proiettivo reale, 64, 78, 87, 107  
 Proprietà del sollevamento dell'omotopia, 113  
 Proprietà dell'estensione dell'omotopia, 123  
 Rango di gruppo, 60  
 Riflessione, 27  
 Risoluzione libera, 70  
 Risoluzione standard, 70  
 Semplesso  $\mathcal{U}$ -piccolo, 35  
 Semplesso affine, 32  
 Semplesso singolare, 15  
 Semplesso standard, 15  
 Sistema diretto, 100  
 Sollevamento di fibrati, 119  
 Sospensione, 27  
 Sospensione ridotta, 109  
 Sottocategoria, 8  
 Sottocategoria piena, 8  
 Sottocomplesso, 56  
 Sottocomplesso di catene di Eilenberg, 134  
 Spazio ben puntato, 125  
 Spazio contraibile, 21, 26  
 Spazio dei loop, 112  
 Successione di Mayer-Vietoris, 24, 25, 78  
 Successione di Mayer-Vietoris a supporto compatto, 102  
 Successione esatta, 13  
 Successione esatta di catene, 13  
 Suddivisione baricentrica, 32  
 Superficie compatta, 52  
 Tensore di complessi, 79  
 Tensoriale di contraibile, 79  
 Teorema dei coefficienti universali in co-omologia, 75  
 Teorema dei coefficienti universali in omologia, 74  
 Teorema del punto fisso di Brower, 27  
 Teorema della classe fondamentale, 90  
 Teorema di approssimazione cellulare, 129  
 Teorema di approssimazione CW, 131  
 Teorema di Borsuk-Ulam, 87  
 Teorema di Eilenberg-Zilber, 81  
 Teorema di Eilenberg-Zilber relativo, 82  
 Teorema di escissione, 40  
 Teorema di escissione in omotopia, 119  
 Teorema di Hurewicz, 135  
 Teorema di Hurewicz relativo, 137  
 Teorema di Jordan-Brower, 45  
 Teorema di non-pettinabilità, 28  
 Teorema di Schoenflies, 46  
 Teorema di separazione di Jordan-Brower, 42  
 Teorema di Serre, 139  
 Teorema di Whitehead, 56, 130  
 Teorema Jolly, 34

Topologia compattamente generata, 9

Topologia compatto-aperto, 9

Topologia debole, 9

Toro, 50

Trasformazione naturale, 8

Varietà, 89

Varietà orientabile, 90