Raccolta Formule - Fisica 2

Alessio Sgubin

December 13, 2022

1 Costanti

- Costante dielettrica nel vuoto: $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
- Costante di permeabilità magnetica nel vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$
- La luce visibile ha lunghezza d'onda nell'ordine di $\lambda \simeq 10^{-6} m$
- La luce solare arriva sulla Terra con intensità $E_0 \simeq 1014 \frac{V}{m}$ e $B_0 \simeq 3.38 \times 10^{-6} T$
- La velocità della luce nel vuoto è $c = 2.99 \times 10^8 \frac{m}{s}$
- La carica e massa dell'elettrone sono $q_e = -1.6 \times 10^{-19} C$ e $m_e = 9.1 \times 10^{-31} kg$

2 Magnetismo

2.1 Magnetostatica

Forza di Lorenz

$$\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right)$$

Forza magnetica su un filo

$$\overrightarrow{F} = \int I \, \overrightarrow{ds} \times \overrightarrow{B}$$

2.2 Campo magnetico e Corrente

Legge di Faraday-Lenz

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Legge di Ampere

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I_{conc}$$

Campo magnetico generato da:

- un filo rettilineo:

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- una spira chiusa, nel centro:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

- formula generale:

$$B(\overrightarrow{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \overrightarrow{J}(\overrightarrow{r'}) \times \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3}$$

2.3 Dipolo magnetico

Per una spira circolare, il **momento di dipolo magnetico** è:

$$\overrightarrow{\mu} \simeq IS\overrightarrow{n}$$

dove $\overrightarrow{n}$ è la normale al piano della spira.
Forza su un dipolo è data da:

$$\overrightarrow{F} = -\Delta U \qquad\qquad U = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B}$$

Il **momento delle forze** su un dipolo sarà:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{B}$$

Il **campo magnetico generato** da un dipolo magnetico sarà:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\overrightarrow{\mu} \cdot \widehat{r})}{r^3}\widehat{r} - \frac{\overrightarrow{\mu}}{r^5}\right]$$

3 Induttori

Si definisce l'**induttanza** L in modo che:

$$\Phi_B = LI$$

Il **campo magnetico** costante nell'induttore ha modulo:

$$B = \mu_0 n I$$

dove n è il numero di spire dell'induttore.
La formula generica per un **circuito LRI** è:

$$\mathcal{E} = RI + Q/C + L\dot{I}$$

Più in generale, nello spazio la **densità di energia elettromagnetica** sarà:

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Vediamo la **mutua induzione** tra 2 circuiti:

$$\begin{cases} -\mathcal{E}_1 = \dot{\Phi}_1 = L_{11}\dot{I}_1 + M\dot{I}_2 \\ -\mathcal{E}_2 = \dot{\Phi}_2 = M\dot{I}_1 + L_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Combinazione di impedenze:

$$\begin{cases} L = L_1 + L_2 + 2M & \text{in serie diritti} \\ L = L_1 + L_2 - 2M & \text{in serie a rovescio} \\ L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} & \text{in parallelo diritti} \\ L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} & \text{in parallelo a rovescio} \end{cases}$$

L'**energia magnetica** immagazzinata dall'induttore sarà:

$$U_B = \frac{LI^2}{2}$$

L'**energia magnetica** immagazzinata da un induttore sarà:

$$U_B = \frac{LI^2}{2}$$

se ci sono n induttori, si ottiene allora:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} L_{ij} I_i I_j$$

Variando la geometria di un circuito in assenza di generatori e resistenze, si calcola la forza data dall'induttanza:

$$\overrightarrow{F} = \frac{I^2}{2}\nabla L$$

4 Magnetismo nella materia

Se siamo in presenza di un materiale, interpretiamo il cambiamento dei campi magnetici come una $\mu \neq \mu_0$. Ci sono 3 tipologie di materiali:

- **diamagnetici** $\mu < \mu_0$: ci sono dipoli magnetici indotti dal campo magnetico, schermano $\overrightarrow{B}$.
- **paramagnetici** $\mu > \mu_0$: ci sono dipoli magnetici propri, aumentano $\overrightarrow{B}$.
- **ferromagnetici** $\mu >> \mu_0$.

L'effetto è del tutto analogo al caso dielettrico. Facendo una tabella di confronto:

Campo elettrico	**Campo magnetico**
$\rho = \rho_{free} + \rho_{pol}$	$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{J}_{free} + \overrightarrow{J}_{mag}$
$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \overrightarrow{P}$	$\overrightarrow{J}_{mag} = \nabla \times M$
$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_{free}$	$\nabla \cdot H = \overrightarrow{J}_{free}$
$\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P} = \varepsilon \overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu}$
$\overrightarrow{P} \simeq \chi_e \varepsilon_0 \overrightarrow{E}$	$M \simeq \chi_m \overrightarrow{H}$

Condizioni di raccordo per diversi μ sono dati da:

$$\Delta B_\perp = 0 \qquad \Delta H_\| = 0$$

In particolare, quando ci sono **correnti parassite**:

$$\overrightarrow{J} = \sigma \overrightarrow{E} \qquad W_J = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{J}$$

4.1 Trasformatore

Il rapporto tra le fem di circuiti collegati con un trasformatore è:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

dove N_i è il numero di spire di ogni circuito.

5 Equazioni di Maxwell

Si raccolgono tutti gli effetti elettromagnetici nelle seguenti 5 equazioni:

1. $\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
2. $\nabla \times E = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$
3. $\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$
4. $\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$
5. $\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right)$

dove $\overrightarrow{J}_S = \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$.

6 Onde elettromagnetiche

Dalla 2 e 4 equazioni di Maxwell, si possono descrivere le onde elettromagnetiche nel vuoto ($\overrightarrow{J} = 0$) con:

$$\Box^2 \overrightarrow{E} \qquad\qquad \nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0$$

ed analogamente:

$$\Box^2 \overrightarrow{B} \qquad\qquad \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

dove l'**operatore d'Alambertiano** è definito:

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Segue che i campi elettrico/magnetico sono onde piane. La prima/terza equazione implicano che $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$ sono perpendicolari alla direzione dell'onda $\overrightarrow{n}$. La seconda/quarta implicano che $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{B}$ dove in modulo $E = cB$.

6.1 Onde piane

Le onde piane possono essere descritte dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 \cos\left(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x} - \omega t\right) \\ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_0 \cos\left(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x} - \omega t\right) \end{cases}$$

dove definiamo il **vettore d'onda** $\overrightarrow{k}$ come un vettore nella direzione di propagazione dell'onda, di modulo: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. In questo modo:

$$\begin{cases} \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{E} = 0 \\ \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \overrightarrow{E} = c\overrightarrow{B} \times \widehat{k} \\ c\overrightarrow{B} = \widehat{k} \times \overrightarrow{E} \end{cases}$$

Si definiscono **frequenza** ν e **lunghezza d'onda** λ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \omega = 2\pi\nu \qquad c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$$

6.2 Polarizzazione

Si considera la polarizzazione come il piano descritto da $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{k}$ di un'onda.
I **polarizzatori** fanno passare soltanto luce con una certa polarizzazione, soltanto la componente $\overrightarrow{E}_{\parallel}$:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_{\parallel} + \overrightarrow{E}_{\perp}$$

Quindi l'intensità viene riscalata di un fattore $\cos(\theta_{onda} - \theta_{polarizz})$.

6.3 Vettore di Poynting

Definiamo il **vettore di Poynting** (nel caso generale) come:

$$\overrightarrow{S} = \frac{\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}}{\mu}$$

Permette di calcolare la variazione di **densità di energia**:

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \overrightarrow{S} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{J}$$

6.4 Ricezione di Onde

Si possono usare 2 equazioni analoghe per calcolare la fem indotta in un circuito da un'onda elettromagnetica:

$$\mathcal{E} = \oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{ds} = -\dot{\Phi}_B$$

6.5 Onde in dielettrico

Se l'onda si propaga in un dielettrico si ottengono degli effetti descritti dall'**indice di rifrazione**:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

dove v è il modulo della velocità dell'onda nel mezzo e $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ e $\mu = \mu_0 \mu_r$.

6.6 Onde in conduttore

Si calcola che a causa delle correnti parassite il campo elettrico diminuisce come:

$$\begin{cases} E \propto e^{ikx} \\ B = \frac{kE}{\omega} \end{cases} \qquad k^2 = \widehat{\varepsilon}\mu\omega^2 = \varepsilon\mu\left(\omega^2 + \frac{i\omega\sigma}{\varepsilon}\right)$$

6.7 Propagazione in plasma

Quando sono presenti degli ioni (plasma) con densità per m^3 pari a n_e, si ottiene che l'**indice di rifrazione** del materiale sarà:

$$n^2 = 1 - \frac{n_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

dove definiamo la **frequenza di plasma** come:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$$

7 Ottica

Nell'ottica matriciale, consideriamo il piano xz e le funzioni $x(z)$ e $\dot{x}(z)$. Allora è possibile descrivere la posizione x dell'onda tramite matrici.

- Se l'onda si propaga nel vuoto non perturbata per una distanza ℓ:

$$\begin{pmatrix} x(\ell) \\ \dot{x}(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = M(\ell) \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}$$

- Se l'onda passa traverso una lente focale f allora:

$$\begin{pmatrix} x_f \\ \dot{x}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{pmatrix}$$

7.1 Risoluzione angolare

Quando la luce passa traverso un buco/ostacolo, la direzione di propagazione va distorta di un fattore angolare:

$$\theta \simeq \frac{\lambda}{d}$$

dove λ è la lunghezza d'onda e d è lo spessore del buco.
Questa risulta essere la risoluzione angolare di una lente/occhio che osserva (angolo minimo che viene distinto).

Quando la luce passa attraverso un foro circolare di raggio a, si ottiene una diffrazione di:

$$\theta \simeq 1.22\frac{\lambda}{a}$$

8 Invarianza di Gauge

Le equazioni di Maxwell contengono delle simmetrie. Per poter descrivere queste simmetrie, definiamo il **potenziale vettore** $\vec{A}$ come un vettore il cui rotore mi dà il campo d'interesse (in questo caso $\vec{B}$):

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Allora le equazioni di Maxwell quando non ci sono sorgenti sono riassunte da:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad\qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Questo potenziale vettore non è unico. Ma lo è a meno di una **trasformazione di Gauge**:

$$\vec{A} \to \vec{A} - \nabla\omega \qquad\qquad \varphi \to \varphi + \frac{\partial\omega}{\partial t}$$

dove $\omega(x, y, z, t)$ è una generica funzione[1].

1. **Gauge di Coulomb** pone $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Questa equazione descrive bene l'elettrostatica.
2. **Gauge di Lorentz** pone $G = 0$ dove:

$$G = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

   Questa scelta porta ad avere le equazioni:

$$\begin{cases} \Box^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Box^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \end{cases}$$

9 Invarianza Relativistica

Le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni $SO(3)$.

Lo spazio di Minkowski ha simmetria $SO(3,1)$. Consideriamo:

- il **quadrivettore controvariante** $\mathbb{X}^\mu = (x, y, z, ct)$
- il **quadrivettore covariante** $\mathbb{X}_\mu = (x, y, z, -ct)$

Nello spazio di Minkowski, $SO(3,1)$ conserva la norma[2]:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{X} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \mathbb{X}^T\eta_{\mu\nu}\mathbb{X} = \mathbb{X}_\mu\mathbb{X}^\mu$$

dove $\eta_{\mu\nu} = diag(1, 1, 1, -1)$. Definendo i **differenziali**:

$$\Box_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad\qquad \Box^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

si riottiene il d'Alambertiano:

$$\Box^2 = \Box \cdot \Box = \Box^\mu\Box_\mu$$

Le invarianze di Gauge che si scrivevano:

$$\begin{cases} \Box^2\varphi + \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Box^2\vec{A} - \nabla G = -\mu_0\vec{J} \end{cases} \qquad\qquad G = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

sono quindi riscritte tramite i quadrivettori:

$$\mathbb{A}^\mu = \left(A_1, A_2, A_3, \frac{\varphi}{c}\right) \qquad\qquad \mathbb{J}^\mu = (J_1, J_2, J_3, c\rho)$$

nella forma:

$$\Box^2\mathbb{A}^\mu - \Box^\mu G = -\mu_0\mathbb{J}^\mu \qquad\qquad G = \Box \cdot \mathbb{A}$$

[1] Questo è vero perchè un campo nullo $\vec{E} = \vec{B} = 0$ è descritto dal potenziale vettore $\vec{A} = -\nabla\omega$ e $\varphi = \frac{\partial\omega}{\partial t}$.

[2] Con il simbolo $\cdot$ indichiamo la norma di Minkowski, senza $\cdot$ la **norma vettoriale** di $\mathbb{R}^4$.

9.1 Trasformazioni di Lorentz

Possiamo riscrivere le trasformazioni di $SO(3,1)$ nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh a & -\sinh a \\ -\sinh a & \cosh a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

dove $a = i\theta$ è la variazione angolare del sistema. In termini di $\tanh a = \frac{v}{c}$, definiamo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ e si ottengono:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - xv/c^2) \end{cases}$$

10 Irraggiamento

Riscriviamo il campo elettromagnetico con la Gauge di Lorenz:

$$\begin{cases} \Box^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Box^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \vec{E} = -\Delta\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

Da queste formule si ottengono i seguenti risultati.

10.1 Radiazione da carica in moto

La potenza totale irraggiata per una particella in moto $\vec{v}$:

$$W = \frac{\mu_0 q^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi c} = \frac{q^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}$$

ed i campi di radiazione ottenuti saranno:

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \dot{\vec{v}}\right)}{c^2 R} \qquad \vec{B}_{rad} = \frac{\vec{n}}{c} \times \vec{E}_{rad}$$

dove $\vec{R} = \vec{r} - \overrightarrow{r_q(t')}$ ed $\vec{n} = \widehat{R}$ è il vettore del moto relativo all'osservatore.

10.2 Radiazione da dipolo elettrico/magnetico

Nel caso del dipolo elettrico $\vec{q}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{B}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \widehat{r} \times \ddot{\vec{p}} \\ \vec{E}_p = c\vec{B} \times \widehat{r} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad W_{el} = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}^{\,2}}{6\pi c}$$

e con un dipolo magnetico μ, i campi irraggiati saranno $\vec{E}_\mu \sim \vec{B}_p$ e $\vec{B}_\mu \sim \vec{E}_p$ quindi:

$$W_{mag} = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{\mu}}^{\,2}}{6\pi c^3}$$

10.3 Radiazione da antenne

Le antenne si possono sintetizzare tramite condensatori e bacchette conduttrici. In entrambi i casi, usiamo un'approssimazione di dipolo:

- per il condensatore, $p = Qd$ ed $\dot{p} = Id$. Allora:

$$W_{el} = R_{rad} I^2 \qquad R_{rad} = \frac{\mu_0 \omega^2 d^2}{6\pi c}$$

- per delle bacchette conduttrici di lunghezze $\pm\ell/2 << \lambda$, se la corrente che le percorre è:

$$I(z,t) \simeq I_0 e^{-i\omega t}\left(1 - \frac{2|z|}{\ell}\right) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{iI_0 \ell e^{i\omega t}}{2\omega}$$

In particolare useremo la seguente terminologia:

- emissione **isotropa**: l'antenna eroga la stessa potenza in tutte le direzioni.
- emissione **non isotropa**: l'antenna eroga potenza disomogenea.

Parlando di effetto Doppler, abbiamo che:

$$f_\pm = f_0\left(1 \pm \frac{v_z}{c}\right)$$