Fisica 3 - Formulario

Andrea Rocca e Alessio Sgubin

20 maggio 2023

1 Costanti Fisiche

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$	Costante di Boltzmann (termodinamica)
$R = 8.31 \frac{J}{K \text{ mol}}$	Costante dei Gas Ideali
$0\ K = 273.15\ °C$	Zero Assoluto
$\begin{cases} p = 100\ kPa \\ T = 0\ °C \end{cases}$	Condizioni Standard Temperatura-Pressione
$1 \text{ cal} = 4.186\ J$	Conversione calorie/Joule
$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 K^4}$	Costante di Boltzmann (corpo nero)
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ Js$	Costante di Planck
$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$	Velocità della luce

2 Compendio Matematico

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z\right)^{-1} \qquad \text{"Inversione di Derivazione"}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y = -1 \qquad \text{"Regola Ciclica"}$$

Definiamo la *trasformazione di Legendre* per una funzione $F(x, y)$:

$$G(u, y) = F - ux$$

$$dG = v \cdot \mathrm{d}y - x \cdot \mathrm{d}u$$

3 Termodinamica

3.1 Definizioni e Formule Generali

3.1.1 Trasferimento del Calore

- **Conduzione**:

$$\frac{1}{A}\frac{\delta Q}{\Delta t} = -K\frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \text{"Formula del Flusso di Calore"}$$

$$\overrightarrow{J}_Q = -K \cdot \overrightarrow{\nabla} T \qquad \text{Legge di Fourier}$$

$$\delta Q = c\ m\ \delta T \qquad \text{"Formula del Calore Specifico"}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\nabla^2 T \qquad \text{Legge di Propagazione del Calore}$$

- **Convezione**:

$$\frac{1}{A}\frac{\delta Q}{\Delta t} = h\ \Delta T \qquad \text{"Legge della Convezione"}$$

- **Irraggiamento**:

$$\frac{1}{A}\frac{\delta Q}{\Delta t} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4) \qquad \text{"Formula dell'Irraggiamento"}$$

3.1.2 Sistemi Idrostatici

$$\mathrm{d}V = \alpha V \mathrm{d}T - \beta V \mathrm{d}p$$

dove si definiscono le proprietà del materiale:

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\Big|_p \qquad \text{Coefficiente di Espansione Volumetrica}$$

$$\beta_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T \qquad \text{Coefficiente di Compressibilità Isoterma}$$

dove indichiamo con ρ la densità volumetrica del materiale.
Il **lavoro** (infinitesimale) viene in generale descritto da:

$$dW = -pdV \qquad W = -\int_{V_i}^{V_f} pdV$$

$$c_p = \frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_p = T\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_p \qquad \text{Coefficiente di Espansione Termica a } p \text{ costante}$$

$$c_V = \frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_V = T\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V \qquad \text{Coefficiente di Espansione Termica a } V \text{ costante}$$

3.1.3 Entropia

Si definisce il differenziale esatto:

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}_{\mathrm{rev}} \qquad \text{Entropia}$$

3.2 Potenziali Termodinamici

Le seguenti grandezze sono i *potenziali termodinamici*.

Nome	Definizione	Differenziale	Relazione (1)	Relazione (2)
Energia interna	$\Delta U = Q + W$	$\mathrm{d}U(S,V) = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$	$T = \frac{\partial U}{\partial S}\big\|_V$	$p = -\frac{\partial U}{\partial V}\big\|_S$
Entalpia	$H = U + pV$	$\mathrm{d}H(S,p) = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$	$T = \frac{\partial H}{\partial S}\big\|_p$	$V = \frac{\partial H}{\partial p}\big\|_S$
Helmholtz	$F = U - TS$	$\mathrm{d}F(T,V) = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V$	$S = -\frac{\partial F}{\partial T}\big\|_V$	$p = -\frac{\partial F}{\partial p}\big\|_T$
Gibbs	$G = U + pv - TS$	$\mathrm{d}G(T,s) = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p$	$S = -\frac{\partial G}{\partial T}\big\|_p$	$V = \frac{\partial G}{\partial p}\big\|_T$

Nome	Differenziale	Relazione di Maxwell
Energia interna	$\mathrm{d}U(S,V) = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$	$\frac{\partial T}{\partial V}\big\|_S = -\frac{\partial p}{\partial S}\big\|_V$
Entalpia	$\mathrm{d}H(S,p) = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$	$\frac{\partial T}{\partial p}\big\|_S = \frac{\partial V}{\partial S}\big\|_p$
Helmholtz	$\mathrm{d}F(T,V) = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V$	$\frac{\partial S}{\partial V}\big\|_T = \frac{\partial p}{\partial T}\big\|_V$
Gibbs	$\mathrm{d}G(T,s) = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p$	$\frac{\partial S}{\partial p}\big\|_T = -\frac{\partial V}{\partial T}\big\|_p$

3.3 Potenziale Chimico

In presenza di scambio di materia, si riscrive:

$$U = TS - pV + \mu n \qquad \text{Energia Interna}$$

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}n \qquad \text{Differenziale Energia Interna}$$

dove si definisce:

$$\mu = \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{S,V} \qquad \text{Potenziale Chimico}$$

$$S\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p + n\mathrm{d}\mu = 0 \qquad \text{Relazione di Gibbs-Duhen}$$

3.4 Macchine Termiche

Definiamo l'efficienza di una macchina termica come:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} \qquad \text{Efficienza}$$

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \qquad \text{Efficienza di Carnot}$$

4 Formule non Generali

4.1 Formule per i Gas Ideali

$$pV = nRT \qquad \text{Legge dei Gas Ideali}$$

$$c_V := \frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V \qquad \text{Calore specifico a } V \text{ costante}$$

$$c_p := c_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T + p\right) V\alpha \qquad \text{Calore specifico a } p \text{ costante}$$

Ci sono delle formule che legano tra loro i calori specifici:

$$C = c\ n \qquad \text{Capacità Termica}$$

$$c_p - c_V = R \qquad \text{Relazione di Mayer}$$

$$c_V = \frac{\nu}{2} R \qquad \text{Calore Specifico per Gas Ideale}$$

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} \qquad \text{Coefficiente Adiabatico}$$

$$dU = n\ c_V\ dT \qquad \text{Correlazione } U \text{ con } T$$

dove ν indica i gradi di libertà: $\nu = 3$ per i gas monoatomici e $\nu = 5$ per i gas biatomici.

$$\Delta S = nc_p \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right) \qquad \text{Formula Generale per Entropia}$$

$$\frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T = T\frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V - p = T^2 \frac{\partial (p/T)}{\partial T}\Big|_V \qquad \text{Equazione di Helmholtz}$$

4.1.1 Tabella Riassuntiva per i Gas Ideali

Trasformazione isobara

$W = -nR\Delta T$	Lavoro
$Q = nc_p\Delta T$	Calore
$\Delta U = Q + W = nc_V\Delta T$	Differenza Energia
$pV^0 = cost.$	Equazione curva isobara
$\mathrm{d}S = nc_p\frac{\mathrm{d}T}{T}$	Entropia

Trasformazione isocora

$W = 0$	Lavoro
$Q = nc_V\Delta T$	Calore
$\Delta U = Q = nc_V\Delta T$	Differenza Energia
$pV^\infty = cost.$	Equazione curva isocora
$\mathrm{d}S = nc_v\frac{\mathrm{d}T}{T}$	Entropia

Trasformazione isoterma

$\Delta U = 0$	Differenza Energia
$W = -nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	Lavoro
$Q = -W$	Calore
$pV^1 = cost.$	Equazione curva isoterma
$\mathrm{d}S = nR\frac{\mathrm{d}V}{V} = -nR\frac{\mathrm{d}p}{p}$	Entropia

Trasformazione adiabatica

$Q = 0$	Calore
$\Delta U = W$	Differenza Energia
$pV^\gamma = cost.$	Equazione curva adiabatica
$\Delta S = 0$	Entropia

4.2 Gas Reale

Un'approssimazione più realistica della legge dei gas è:

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \qquad \text{Equazione di Van der Waals}$$

4.3 Transizione di Fase

La transizione di fase avviene a p, T costanti. Usando Gibbs si trova:

$$G(n,p,T) = G_L(p,T,n_L) + G_V(p,T,n_V) = n_L \cdot g_L(p,T) + n_V \cdot g_V(p,T)$$

segue la condizione $g_L = g_V$. Nel caso di più fasi contemporanee vale:

$$\#\text{var. indip.} = 2 + N - F \qquad \text{Regola delle Fasi di Gibbs}$$

Scriviamo $V = n_L \cdot v_L(T) + n_V \cdot v_V(T)$ e $U = n_L \cdot u_L(T) + n_V \cdot u_V(T)$

$$\lambda = \frac{\delta Q}{\delta n} = (u_V - u_L) + p(v_V - v_L) \qquad \text{Calore Latente di Vaporizzazione}$$

Sperimentalmente vale che:

$$\Delta Q_{\text{lat}} = m \cdot \lambda \qquad \text{Formula del Calore Latente}$$

dove m è la massa.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\lambda}{T(v_V - v_L)} \qquad \text{Equazione di Clapeyron}$$

$$p \propto e^{-\frac{\lambda}{RT}} \qquad \text{Equazione di Clausius-Clapeyron}$$

5 Relatività

Le costanti che useremo sono:

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \beta(u) = \frac{u}{c}$$

Sia S' sistema di riferimento in movimento con velocità $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$ rispetto a S. Allora:

$$L' = \tfrac{L}{\gamma} \qquad \text{Contrazione delle lunghezze}$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \qquad \text{Dilatazione dei tempi}$$

Consideriamo le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{v_y - u}{\gamma(u)\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \\ v'_z = \dfrac{v_z - u}{\gamma(u)\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

dove per (ct, x, y, z) si intendono *differenze* di coordinate tra eventi.

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad \text{Intervallo tra eventi}$$

si conserva per trasformazioni di Lorentz.
Sia $m = M(0)$ la massa propria di un oggetto:

$$M(v) = \gamma(u)M(0) = \gamma(u)m \qquad \mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{v}$$

Introduciamo i quadrivettori (4-uple invarianti per trasformazioni di Lorentz):

$$d\tau^2 = dt^2 - \tfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2} = \tfrac{dt^2}{\gamma^2(v)} \qquad \text{Tempo proprio } \tau$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \gamma(v)\big(c, \mathbf{v}\big) \qquad \text{Quadrivelocità}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \gamma^4(v)\left(\tfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}, \mathbf{a} + \tfrac{\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})}{c^2}\right) \qquad \text{Quadriaccelerazione}$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \big(m\gamma c, \mathbf{p}\big) = \big(\tfrac{E}{c}, \mathbf{p}\big) \qquad \text{Quadriimpulso}$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = m\tilde{\mathbf{a}} \qquad \text{Quadriforza}$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \big(\rho c, \mathbf{J}\big) \qquad \text{Quadricorrente } (\rho \text{ carica})$$

$$\tilde{\nabla} = \left(\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \qquad \text{Operatore Quadrigradiente}$$

Parlando di energia:

$$E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4 \qquad \text{Energia totale}$$

$$K = E - mc^2 \qquad \text{Energia cinetica (per } V = 0)$$

La seconda equazione di Newton si riscrive:

$$\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a} + \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v}$$

6 Relatività

6.1 Cinematica

Le costanti usate sono:

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \beta(u) = \frac{u}{c}$$

Dato S' un sistema di riferimento in movimento con velocità costante $\mathbf{v} = \mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$ rispetto a S allora si verificano i seguenti fenomeni:

$$\Delta t = \gamma(u)\Delta t_0 \qquad \text{Dilatazione dei tempi}$$

$$L = \tfrac{L_0}{\gamma(u)} \qquad \text{NOME LEGGE}$$

dove L_0 e Δt_0 sono lunghezza e tempo propri. Le *trasformazioni di Lorentz* si riscrivono:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{v_y - u}{\gamma(u)\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \\ v'_z = \dfrac{v_z - u}{\gamma(u)\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \end{cases} \qquad \begin{cases} p'_x = \gamma(u)\left(p_x - \dfrac{u}{c^2}E\right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(u)(E - up_x) \end{cases}$$

Si definiscono nello spazio-tempo:

$$(ct, x, y, z) \qquad \text{Evento}$$

$$s^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad \text{Intervallo tra eventi}$$

dove l'ultimo si conserva per trasformazioni di Lorentz.
Si definisce:

$$\xi = \operatorname{arctanh}(-\beta) \qquad \text{Rapidità}$$

Si definisce un prodotto scalare per quadrivettori: se $\tilde{x}_A = (ct_A, \mathbf{x}_A)$ e $\tilde{x}_B = (ct_B, \mathbf{x}_B)$, allora

$$\tilde{x}_A \cdot \tilde{x}_B := ct_A ct_B - \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B$$

6.2 Dinamica

Detto $\mathrm{d}s^2$ l'intervallo infinitesimo, si definisce

$$\mathrm{d}\tau^2 := \tfrac{\mathrm{d}s^2}{c^2} = \mathrm{d}t^2 - \tfrac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{c^2} \qquad \text{Tempo Proprio}$$

Una relazione importante è la seguente:

$$\mathrm{d}\tau = \tfrac{\mathrm{d}t}{\gamma(v)}$$

Sia $m = M(0)$ la massa propria di un oggetto:

$$M(v) = \gamma(u)M(0) = \gamma(u)m \qquad \mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{v}$$

Introduciamo i quadrivettori (4-uple invarianti per trasformazioni di Lorentz):

$\tilde{\mathbf{v}} = \gamma(v)\big(c, \mathbf{v}\big)$	Quadrivelocità
$\tilde{\mathbf{a}} = \gamma^4(v)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}, \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})}{c^2}\right)$	Quadriaccelerazione
$\tilde{\mathbf{p}} = \big(m\gamma c, \mathbf{p}\big) = \big(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\big)$	Quadriimpulso
$\tilde{\mathbf{F}} = m\tilde{\mathbf{a}}$	Quadriforza
$\tilde{\mathbf{J}} = \big(\rho c, \mathbf{J}\big)$	Quadricorrente (ρ carica)
$\tilde{\nabla} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\overrightarrow{\nabla}\right)$	Operatore Quadrigradiente

Parlando di energia:

$E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4$	Energia totale
$K = E - mc^2$	Energia cinetica (per $V = 0$)
$\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$	Formula alternativa di β
$\gamma = \frac{E}{mc^2}$	Formula alternativa di γ

La seconda equazione di Newton si riscrive:

$$\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a} + \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v}$$

e se $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$ allora:

$$\mathbf{F} = m\gamma^3\mathbf{a}$$

7 Meccanica Quantistica

7.1 Fisica Moderna

7.1.1 Corpo Nero ed Emissione

Definiamo delle grandezze legate all'irraggiamento:

$$I = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}A_\perp \mathrm{d}t} \qquad \text{Irraggiamento}$$

$$w = \frac{I}{c} \qquad \text{Intensità di irraggiamento}$$

$$I_\nu = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\nu} \qquad \text{Intensità specifica per frequenza}$$

$$I_\Omega = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\nu} \qquad \text{Intensità specifica per angolo con } \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{r^2}$$

La potenza emessa e ricevuta da un corpo sono rispettivamente:

$$M = \frac{\text{potenza emessa}}{\text{superficie area}} \quad \text{Emittanza} \qquad I = \frac{\text{potenza ricevuta}}{\text{superficie area}} \quad \text{Irradianza}$$

Si ottiene la *legge di Kirkov* che uguaglia grandezze:

$$a(\nu) = \frac{\text{potenza non riflessa}}{\text{irraggiamento}} \qquad \text{Coefficiente di assorbimento}$$

$$e = \frac{M(\text{corpo considerato})}{M(\text{corpo nero})} \qquad \text{Emissività}$$

$$a = e \qquad \text{Legge di Kirkov}$$

Gradualmente si ottengono risultati che portano alla quantizzazione.

$$M = \sigma T^4 \qquad \text{Equazione di Stefan-Boltzmann}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2.9\ mm}{T} \qquad \text{Legge dello spostamento di Wien}$$

$$\varepsilon = h\nu \qquad \text{Quanto di energia}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \qquad \text{Formula di Planck (v.1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} \qquad \text{Formula di Planck (v.2)}$$

dove valgono le seguenti costanti:

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2K^4} \qquad \text{Costante di Boltzmann}$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ Js \qquad \text{Costante di Planck}$$

7.1.2 Effetto Fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico viene risolto con i fotoni quantizzati, descritti da:

$E_\gamma = h\nu$	Energia di un fotone
$E_{\text{tot}} = nE_\gamma$	Energia irradiata
$\tilde{k} = \left(\nu, \frac{1}{\lambda}\mathbf{k}\right)$	Quadrivettore per onde

7.1.3 Effetto Compton

La luce che si riflette a frequenze molto alte cambia lunghezza d'onda.(Con ' si indica la grandezza dopo l'urto)

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	Costante di Planck ridotta
$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{m_e c}$	Lunghezza d'onda di Compton ridotta
$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1+\frac{e_\gamma}{m_e c^2}(1-\cos\theta)}$	Formula di Compton
$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$	Differenze lunghezze d'onda

7.2 Meccanica Ondulatoria

7.2.1 Dualità Onda - Particella

Dualità onda - particella di De Broglie:

$$\begin{array}{ccc} \text{Particella} & & \text{Onda} \\ p & \leftrightarrow & \lambda = \frac{h}{p} \end{array}$$

Vediamo di studiare l'equazione dell'onda.

$E_\gamma = \hbar\omega$	$\omega = 2\pi\nu$	Energia fotone
$\mathbf{p}_\gamma = \hbar\mathbf{k}$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Impulso fotone
$f(x,t) = \sin(kx \pm \omega t)$		Equazione d'onda reale
$f(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$		Equazione d'onda complessa
$v_f = \frac{\omega}{k}$		Velocità di fase
$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$		Velocità di gruppo

L'effetto combinato della somma di sinusoidi fa sì che la velocità d'onda sia la velocità di gruppo e non di fase:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = v_{\text{onda}} = v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

7.2.2 Equazione di Schrödinger

Per il caso *non relativistico*, vale l'equazione di Schrödinger, che in generale è:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \qquad \text{Equazione di Schrödinger}$$

$$|\psi(x,t)|^2 \qquad \text{Densità di probabilità di misurare la particella}$$

Troviamo le soluzioni all'equazione.

- *Variabili separabili*: scriviamo $\psi(x,t) = g(t)f(x)$ e si ottiene:

  $$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + V(x)f = Ef \qquad \text{Equazione di Schrödinger indipendente da } t$$

  La soluzione nel caso separabile risulta:

  $$\psi(x,t) = Cf(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \qquad \text{Stato stazionario}$$

- *Caso generale*: si ottiene che le soluzioni generali sono

  $$\psi(x,t) = \sum_n c_n f_n(x)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}} \qquad \text{Stato generico}$$

Specializzando le formule per 3 tipologie di potenziali:

- *Potenziale costante*: sia $V = V_0$ allora la soluzione generica sarà:

  $$\psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t-kx)} + Be^{-i(\omega t+kx)} \qquad k = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

- *Buca di potenziale infinito*: supponiamo che il potenziale sia infinito all'infuori di $[0,L]$. Allora le soluzioni, per $n \in \mathbb{N}$ saranno:

  $$\psi_n(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}} & 0 \le x \le L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \text{dove } E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

  e osserviamo che le funzioni $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ sono una base ortonormale per il prodotto scalare. Le soluzioni generali si scrivono:

  $$f(x) = \sum_n c_n f_n(x) \qquad \text{Soluzione generale}$$

  $$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{Coefficienti della soluzione}$$

- *Buca di potenziale reale*: consideriamo potenziale nullo in $[0,L]$ e pari a V_0 altrove. La soluzione generale sarà:

  $$f(x) = \begin{cases} A_1e^{k'x} + B_1e^{-k'x} & x < -L \\ A_2\sin(kx) + B_2\cos(kx) & x \in [0,L] \\ A_3e^{k'x} + B_3e^{-k'x} & x > L \end{cases}$$

  dove le costanti si pongono per continuità di ψ, ψ', finitezza all'infinito e normalizzazione. Le costanti saranno:

  $$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad k' = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

8 Meccanica Quantistica

Considereremo il prodotto scalare:

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x)\psi(x)dx$$

Vale che $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle^*$. Definiamo delle grandezze:

$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle$	Valor medio di A
$[A, B] = AB - BA$	Commutatore
$\sigma^2_{A_\psi} = \left\langle (A - \langle A \rangle_\psi)^2 \right\rangle_\psi$	Varianza di un osservabile

8.1 Operatori

Sintetizziamo nella seguente tabella gli operatori introdotti.

Operatore	*Definizione*	*Autofunzione*
Hamiltoniano	$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$	$\phi^\lambda_H(x) = f(x)e^{-i\lambda t}$
Posizione	$X\psi(x) = x\psi(x)$	$\phi^\lambda_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-\lambda)}\mathrm{d}k$
Impulso	$P_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$	$\phi^\lambda_{P_x}(x) = Ae^{\frac{i\lambda x}{\hbar}}$

Per l'operatore Hamiltoniano ricordiamo inoltre che le autofunzioni sono gli stati stazionari, per i quali l'autovalore è la corrispondente energia:

$$H\psi = E\psi$$

Nel caso generale si trova:

$$H\psi = \sum_n c_n E_n f_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \qquad \langle H \rangle_\psi = \sum_n |c_n|^2 E_n$$

L'autofunzione dell'operatore posizione, invece, risulta essere il delta di Dirac.

8.2 Principio di Indeterminazione di Heisenberg

Ne segue la seguente proprietà:

$$\sigma_a^2\sigma_B^2 \geq \left[\tfrac{1}{2i}\langle [A, B] \rangle\right]^2 \qquad \text{Principio di Indeterminazione di Heisenberg}$$

Nel caso degli operatori posizione e impulso, si ottiene che:

$$[X, P_x] = i\hbar \qquad \sigma_X \sigma_{P_x} \geq \frac{\hbar}{2}$$