Formulario - Meccanica Razionale

Alessio Sgubin

25 maggio 2023

1 Dinamica di Punti Materiali

1.1 Moto Unidimensionale

$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}$	Equazione del moto unidimensionale
$T = 2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx'$	Periodo delle orbite

1.2 Moto Centrale

1.2.1 Forza Centrale

Sia la forza centrale nella forma:

$$F(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{V}(\rho) = -\int f(\rho) d\rho$$

Definiamo le quantità:

$c = m\rho^2\dot{\theta}$	Quantità costante
$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$	Potenziale efficacie

1.2.2 Formula di Binet

$\alpha = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$	Area spostata
$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \hat{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\right]$	Formula di Binet

1.2.3 Grandezze Calcolabili

Partendo dalle equazioni:

$$\begin{cases} c = m\rho^2\dot{\theta} \\ E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) \end{cases}$$

si ottengono integrali che calcolano:

$T\rho = \sqrt{2m}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho')}} d\rho'$	Periodo dell'orbita
$\Delta\theta = c\sqrt{\frac{2}{m}}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho'^2\sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho')}} d\rho'$	Angolo di precessione

2 Sistemi di Riferimento

La formula generale per il cambio di sistema di riferimento è:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_{\Sigma} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_{\Sigma'} + \omega \times \mathbf{u} \qquad \text{Cambio da } \Sigma \text{ a } \Sigma'$$

Specializzando per velocità e accelerazione:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} + \omega \times (P - O') \qquad \text{Velocità}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \omega \times (\omega \times (P - O')) + \dot{\omega} \times (P - O') + 2\omega \times \mathbf{v}' \qquad \text{Aaccelerazione}$$

3 Corpo Rigido

Valgono le seguenti:

$$Q_0 - O' = \frac{1}{|\mathbf{R}|^2}\mathbf{R} \times \mathbf{N}_{O'} \qquad \text{Formula } Q_0 \text{ su asse centrale}$$

$$\mathbf{N}_P \cdot \mathbf{R} = \mathbf{N}_Q \cdot \mathbf{R} \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^3 \qquad \text{Trinomio invariante}$$

3.1 Angoli di Eulero

Chiamiamo gli angoli di Eulero:

- angolo di precessione φ
- angolo di nutazione θ
- angolo di rotazione propria ψ

Allora passando dal sistema Σ al sistema Σ' descritto da tali angoli:

$$\mathbf{u} = R\mathbf{u}' \qquad R = R_{\varphi}^{(3)} \cdot R_{\theta}^{(1)} \cdot R_{\psi}^{(3)}$$

La velocità angolare si riscrive come:

$$\omega = \dot{\psi}\hat{e}_3' + \dot{\theta}\hat{e}_N + \dot{\varphi}\hat{e}_3 \qquad \text{Velocità angolare con Eulero}$$

3.2 Formula fondamentale della cinematica rigida

Siano A, B punti solidali al corpo rigido. Allora:

$$\mathbf{v}_B^{(c)} = \mathbf{v}_A^{(c)} + \omega \times (B - A) \qquad \text{Formula fondamentale del corpo rigido}$$

In particolare i punti sull'asse istantaneo di rotazione verificano l'equazione:

$$P_0 - O' = \frac{1}{|\omega|^2}\omega \times \mathbf{v}_{O'} \qquad \text{Asse istantaneo di rotazione (contiene } P_0\text{)}$$

3.3 Momento d'inerzia

Valgono le seguenti proprietà geometriche per un corpo rigido.

1. Se Π è piano di riflessione per il corpo esteso, allora $\hat{\mathbf{e}} = \Pi^\perp$ è una direzione principale.
2. Se esiste una simmetria n-rotazionale rispetto ad un asse $\hat{\mathbf{e}}$, allora $\hat{\mathbf{e}}$ è direzione principale.
3. Vale sempre $I_1 \leq I_2 + I_3$. Se il corpo è planare sul piano $\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ allora $I_1 = I_2 + I_3$.
4. Se due direzioni principali hanno stesso momento d'inerzia, il loro span è dato da direzioni principali.

Il calcolo esplicito dei momenti d'inerzia è dato da:

$$I_{11} = \int_C \rho(\mathbf{x})(y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$I_{12} = -\int_C \rho(\mathbf{x})xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Inoltre vale:

$$I_{Q\hat{\mathbf{e}}} = I_{B\hat{\mathbf{e}}} + m\left|\mathbf{e} \times (\hat{B} - Q)\right|^2 = \qquad \text{Huygens - Steiner}$$

Ci sono i momenti d'inerzia di corpi noti:

Corpo	**Matrice d'inerzia**
Asta	$I_B = \frac{1}{12}ml^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Disco	$I_B = \frac{1}{4}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Rettangolo	$I_B = \frac{1}{12}m \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$
Sfera	$I_B = \frac{2}{5}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Triangolo	$I_B = \frac{1}{12}m \begin{pmatrix} 2b^2 & -ab & 0 \\ -ab & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$

4 Configurazioni del Corpo Rigido

Lavoriamo nello spazio delle configurazioni, dove posizione e velocità dei punti del corpo si riscrivono:

$$\chi(\mathbf{q}; \mathbf{x}') = \mathbf{x}_{O'}(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q})\mathbf{x}' \qquad \text{Posizione}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = \mathbf{v}_{O'}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \omega \times R(\mathbf{q})\mathbf{x}' \qquad \text{Velocità}$$

Le quantità rilevanti per il corpo rigido sono:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_B \qquad \text{Quantità di moto}$$

$$\mathbf{M}_Q = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}_Q^{(c)} + I_Q\omega \qquad \text{Momento d'inerzia rispetto } Q \in \mathbb{E}^3$$

5 Equazioni Cardinali

Le equazioni cardinali sono:

$$m\mathbf{a}_B = \mathbf{R}^{(E)} \qquad \text{Prima equazione cardinale}$$

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = -\mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(E)} \qquad \text{Seconda equazione cardinale}$$

6 Equazioni di Lagrange

6.1 Energia cinetica

Si può riscrivere l'energia cinetica del sistema come:

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}A(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial\chi}{\partial t}\cdot M\tfrac{\partial\chi}{\partial t} \qquad \text{Energia Cinetica}$$

dove si hanno:

- la *matrice delle masse* $M = \operatorname{diag}(m_1, \ldots, m_N)$ per gli N punti materiali.
- la matrice antisimmetrica A e il vettore $\mathbf{b}$ sono:

$$A = (a_{h,k}) \qquad a_{h,k} = \tfrac{\partial\chi}{\partial q_h}\cdot M\tfrac{\partial\chi}{\partial q_k}$$

$$\mathbf{b} = (b_h) \qquad b_h = \tfrac{\partial\chi}{\partial q_h}\cdot M\tfrac{\partial\chi}{\partial t}$$

6.2 Equazioni di D'Alembert

Sia M la matrice delle masse e $\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\mathbf{x}}_1, \ldots, \ddot{\mathbf{x}}_N)$. Allora valgono le equazioni:

$$M\ddot{\mathbf{x}}\cdot\tfrac{\partial\chi}{\partial q_h} = Q_h \qquad \text{Equazioni di D'Alembert } (h = 1, \ldots, N)$$

$$Q_h = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}_j\big(\chi(\mathbf{q},t), \mathbf{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t), t\big)\cdot\tfrac{\partial\chi_j}{\partial q_h}(\mathbf{q},t) \qquad \text{Forze generalizzate}$$

6.3 Equazioni di Lagrange

6.3.1 Prima specie: caso generale

Data la definizione sopra di forza generalizzata, vale:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{q}_h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}},t) - \tfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q_h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = Q_h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \qquad \text{Equazione di Lagrange (I)}$$

6.3.2 Seconda specie: caso conservativo

Supponiamo che le forze generalizzate siano conservative, ovvero c'è una funzione potenziale $V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ tale che:

$$Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h}$$

Definiamo:

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) + V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \qquad \text{Funzione Lagrangiana}$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}},t) - \tfrac{\partial L}{\partial q_h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = 0 \qquad \text{Equazione di Lagrange (II)}$$

Ci sono dei potenziali generalizzati per effetti noti.

Nome	**Forza**	**Potenziale**
Forza costante	$\mathbf{F} = \text{cost.}$	$V = -\mathbf{F} \cdot (P - O)$
Forza elastica	$\mathbf{F} = k \cdot (P - Q)$	$V = \frac{1}{2} k \cdot \lvert P - Q \rvert^2$
Forza di trascinamento	$\mathbf{F} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'}$	$V = m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot R_{\mathbf{q}}$
Forza centrifuga	$\mathbf{F} = -m\omega \times (\omega \times R\mathbf{q})$	$V = -\frac{1}{2} m \cdot \lvert \omega \times (P - O') \rvert^2$
Forza di Coriolis	$\mathbf{F} = -2m\omega \times R\dot{\mathbf{q}}$	$V = m(\omega \times \mathbf{v}) \cdot (P - O')$

6.3.3 Integrale primo: variabile ciclica

Supponiamo che $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, allora è integrale primo:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad \text{Momento coniugato}$$

6.3.4 Integrale primo: integrale di Jacobi

Supponiamo che L non dipenda dal tempo. Allora è integrale primo:

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \qquad \text{Integrale di Jacobi}$$

6.3.5 Riduzione di Routh

Dividiamo $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ in variabili cicliche e non. Definiamo allora le seguenti quantità:

$$\mathbf{c} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0, 0) \qquad \text{Momento coniugato}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c}), \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{c} \qquad \text{Funzione implicita } \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})$$

Allora si ottengono:

$$L_R^{(\mathbf{c})}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \left[L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} \qquad \text{Lagrangiana ridotta}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{y}(\tau), \dot{\mathbf{y}}(\tau), \tau, \mathbf{c}) \mathrm{d}\tau \qquad \text{Soluzione della parte ciclica}$$

6.3.6 Integrale primo: Noether

Sia φ_α un'azione di diffeomorfismi. Se la lagrangiana è invariante per quest'azione allora:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) \qquad \text{Integrale primo di Noether}$$

7 Equilibri e Stabilità

7.1 Punti di equilibrio

Supponiamo forze indipendenti dal tempo, per le quali definiamo:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

Si ottengono nello studio dell'equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{F}(\mathbf{q},\mathbf{v}) \end{cases} \qquad \text{Sistema per l'equilibrio}$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_0, 0) = 0 \qquad \text{Condizione di equilibrio (generale)}$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_0, 0) = \tfrac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \qquad \text{Condizione di equilibrio (conservativo)}$$

7.2 Stabilità

Per il calcolo degli autovalori di $A^{-1}V''$ nel caso conservativo, si risolve:

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0 \qquad \text{Equazione secolare}$$

La stabilità in questi casi si trova con:

- se tutti gli autovalori sono positivi, per il Teorema di Lagrange-Dirichlet il punto $\mathbf{q}_0$ è stabile.
- se esiste autovalore negativo, allora per gli esponenti di Lyapunov il punto $\mathbf{q}_0$ è instabile.

7.3 Piccole oscillazioni

Nell'ipotesi che la lagrangiana sia nella forma $L = T_2 - V$ con $V = V_0$ costante, si ottiene:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{h=1}^{n} c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h)\mathbf{u}_h \qquad \text{Soluzione del linearizzato}$$

$$\omega_h = \sqrt{\lambda_h} \qquad \text{Frequenze proprie}$$

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h)\mathbf{u}_h \qquad \text{Modi normali di oscillazione}$$

dove $\mathbf{u}_h$ sono tali che $V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h = \lambda_h \mathbf{u}_h$.