Geometria Algebrica C

Superfici di Riemann & Curve Algebriche

CORSO di Marco Franciosi   NOTE di Alessio Sgubin

Argomento: studio di superfici di Riemann (superfici di $\dim_{\mathbb{R}} 2$ con struttura complessa, cioè intorni analitici & mappe olomorfe/meromorfe) e di curve algebriche proiettive (cioè $\mathcal{C} = V(I)$ con $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $\dim_{\mathbb{C}} 1$ e struttura algebrica, cioè aperti Zariski & mappe algebriche).

Libri:
- "R. Miranda – Algebraic curves & Riemann surfaces"
- Note sulla pagina web

PROGRAMMA

- Definizione, prime proprietà
- Curve piane
- Funzioni e mappe
- Forme differenziali
- Coomologia e dualità
- Modelli proiettivi
- Jacobiana

PREREQUISITI:

EGA (non necessaria), superfici, funzioni olomorfe, omologia/coomologia.

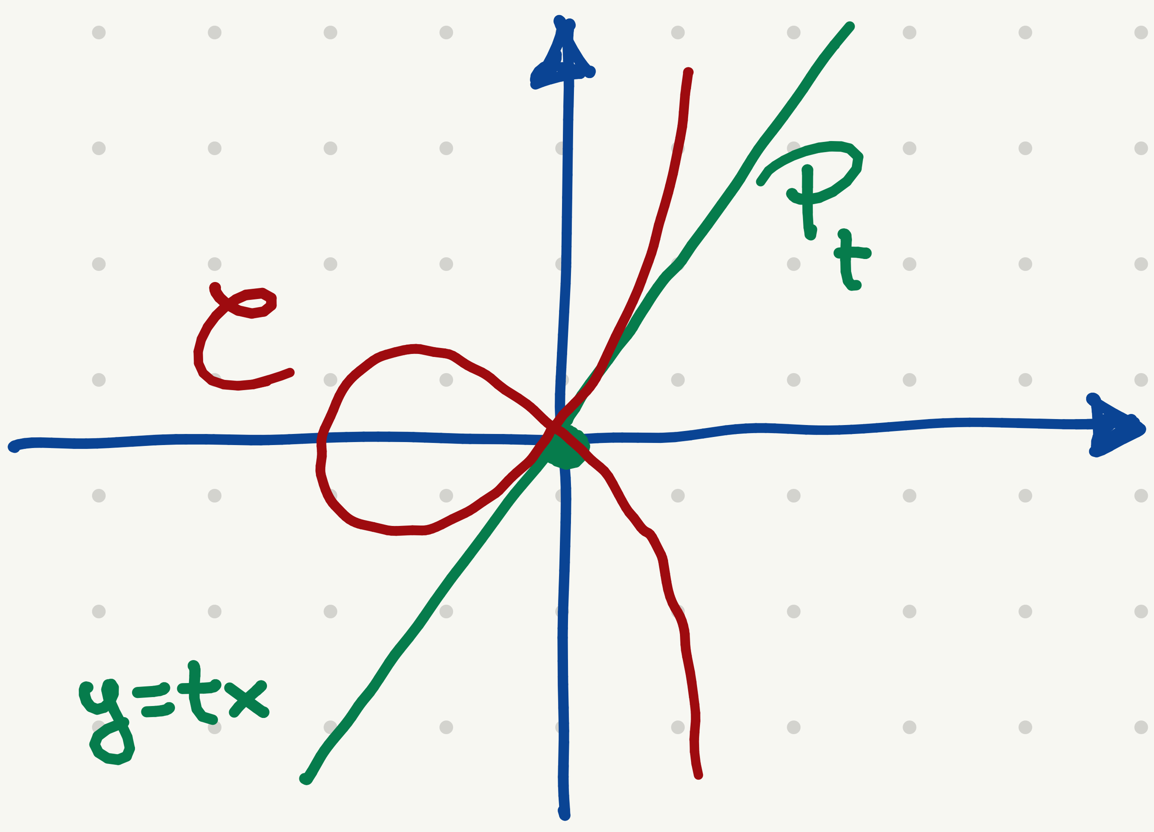
~ INDICE ~

INTRODUZIONE : origini

- **Problema:** calcolare $\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+x^3}\, dx$
- **Soluzione:** sostituzione $x = t^2 - 1$. Da dove nasce?

Dato $f(x) = \sqrt{x^2+x^3}$ consideriamo la curva

$$\mathcal{C} = \{ y^2 = x^2 + x^3 \}$$



Esiste una parametrizzazione di $\mathcal{C}$ fatta considerando l'intersezione col fascio di rette $\{ r_t \} = \{ y = tx \mid t \in \mathbb{R} \}$.

Quindi $\begin{cases} y^2 = x^2 + x^3 \\ y = tx \end{cases} \Longrightarrow \quad t^2x^2 = x^2 + x^3$

che ha soluzioni: $x = 0$ oppure $t^2 = x + 1$ (cioè P_t).

La parametrizzazione
$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_t \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$
è una mappa birazionale da $\mathbb{A}^1$ in $\mathcal{C}_t$.

↪ ISOMORFISMO su un aperto di Zariski

cioè $\mathbb{A}^1 \setminus \{\pm 1\} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$

ORIGINI della GEOMETRIA ALGEBRICA: studio di INTEGRALI ABELIANI

cioè $\int_\gamma R(z, w(z))$ dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ e la funzione $R = \frac{p}{q}$ è razionale e $z, w(z)$ verificano una relazione del tipo polinomiale $p(z,w) = 0$.

DEF. Superficie di Riemann

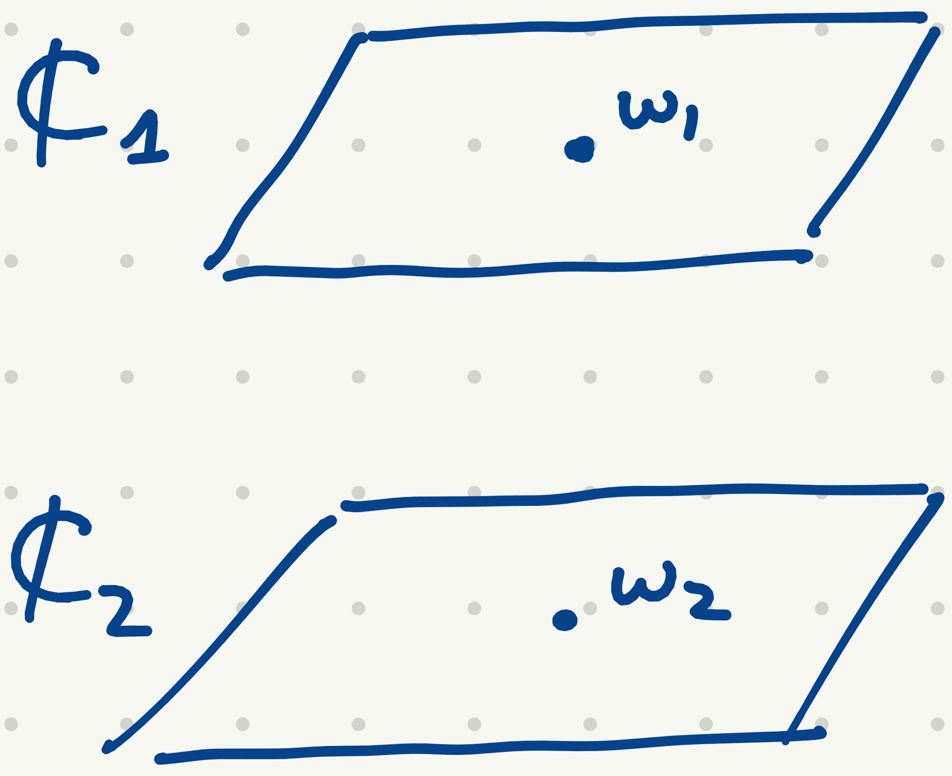
Sia X una varietà topologica tale che:

1) X Hausdorff a base numerabile
2) $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$
3) X ha una struttura complessa, cioè
   $\exists\ \mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ atlante con U_i aperti e delle mappe $\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$ bigettive tali che:
   $$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : V_i \cap V_j \to V_i \cap V_j \quad \text{biolomorfismo}$$
   (ovvero bigezione olomorfa con inversa olomorfa).

Allora X è una SUPERFICIE di RIEMANN.

ESEMPI (idea di Riemann)

1) $\mathbb{C}^2$ con coordinate z, w. Consideriamo la conica $z = w^2$.
L'idea è che $\forall z \neq 0$ esistono 2 soluzioni che chiamiamo $w_1 = \sqrt{z}$ e $w_2 = -\sqrt{z}$: rivestiamo con una "ramificazione" cioè due copie di $\mathbb{C}$:



quello che si trova è che questi "fogli" non sono disgiunti ed esiste un'azione di monodromia.

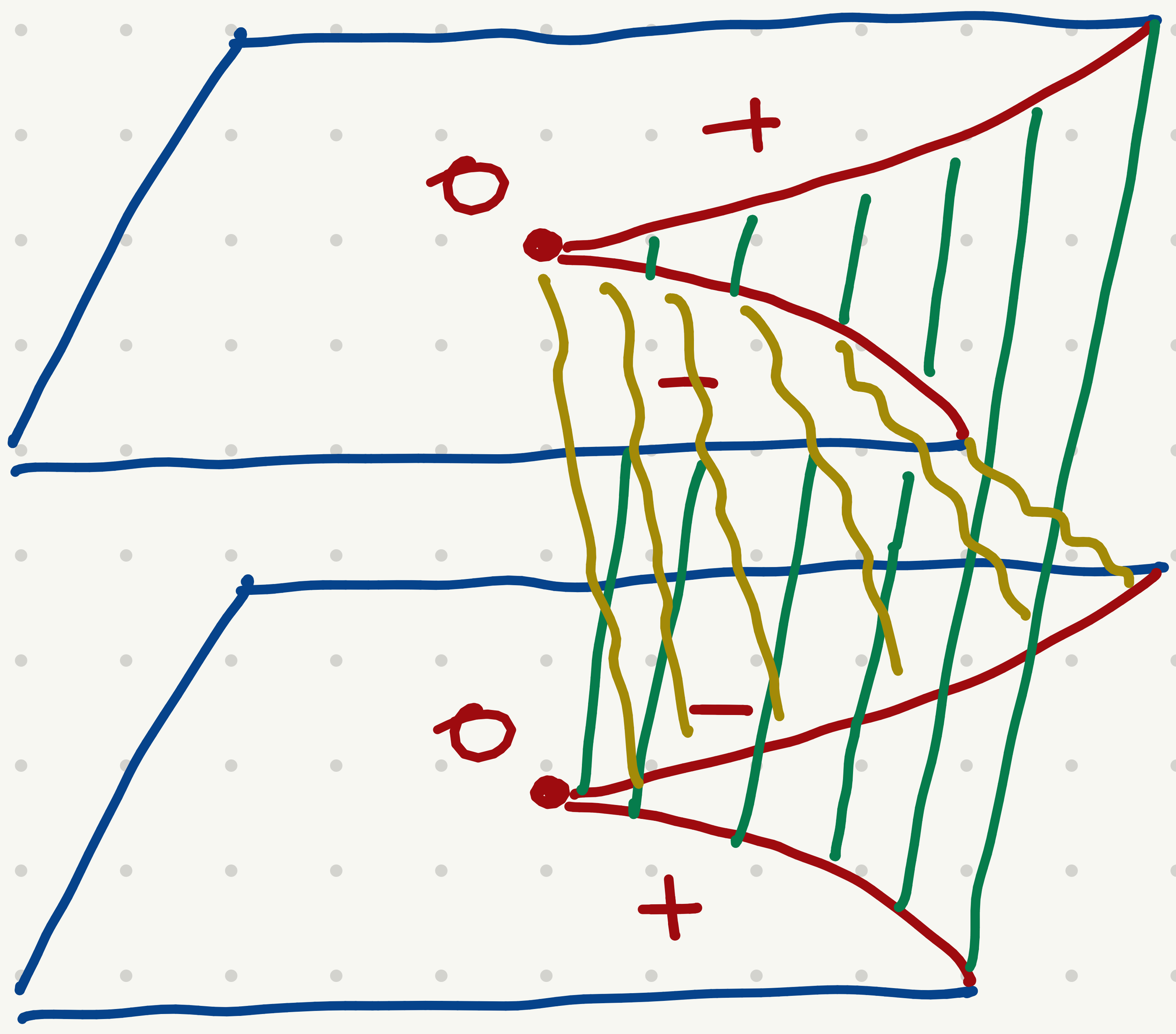
Sia z fissato, $z = \rho \cdot e^{i\theta_0}$: allora
$$w_1 = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta_0}{2}} \quad \text{e} \quad w_2 = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta_0}{2} + \pi}.$$

Se considero il cammino $z(t) = \rho e^{i(\theta_0 + 2\pi t)}$

allora $\begin{cases} w_1(\gamma(1)) = w_2(\gamma(0)) \\ w_2(\gamma(1)) = w_1(\gamma(0)) \end{cases}$

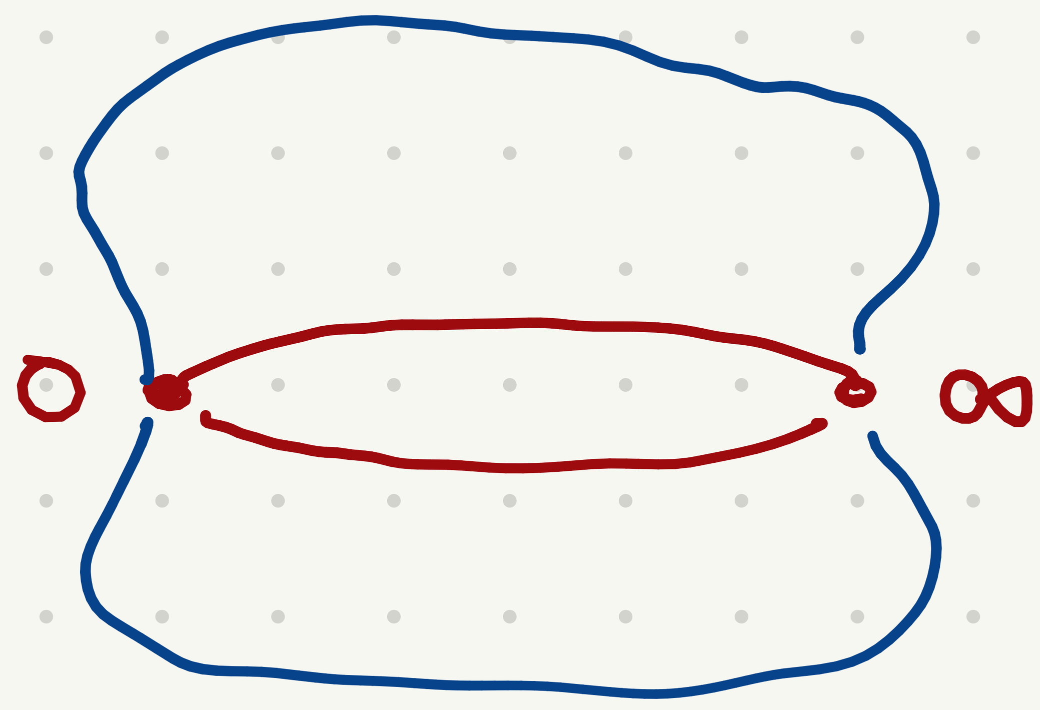
$\Rightarrow$ Il rivestimento che si ottiene dev'essere connesso!

TRUCCO: nelle 2 copie $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$ operiamo un "taglio" lungo (qualsiasi) semiretta, come $\{\mathrm{Im} = 0,\ \mathrm{Re} \geq 0\}$.



Identifichiamo allora i rispettivi lembi, così da trovare il rivestimento connesso.

Avendo $\mathbb{C}$, vogliamo una superficie compatta quindi aggiungiamo ∞ punto:

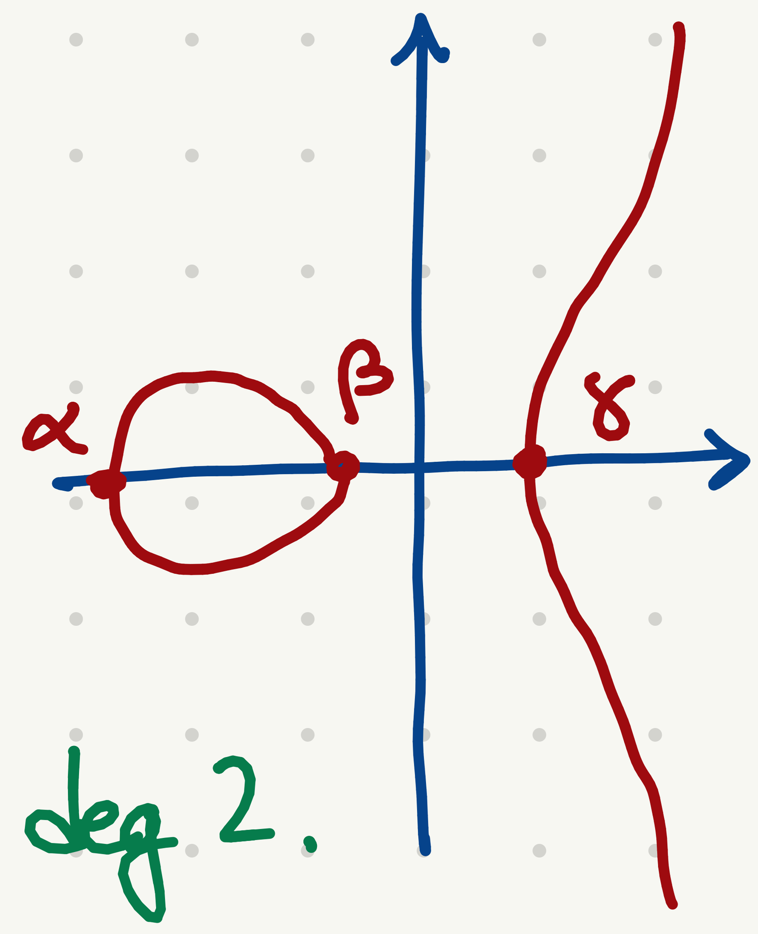


che è omeo ad S^2.

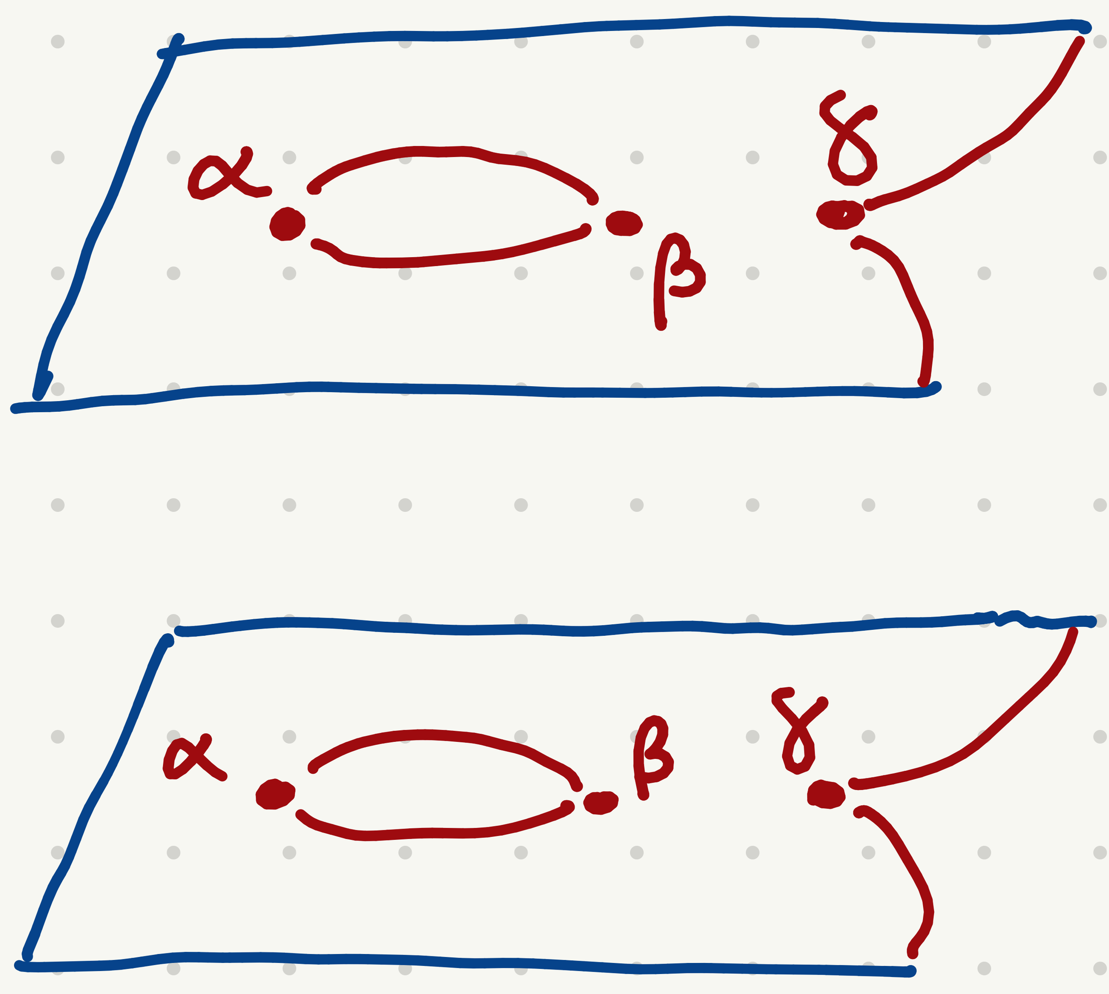
2) $\mathbb{C}^2$ con coordinate w, z. Consideriamo:

$$\mathcal{C} : \quad w^2 = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$$

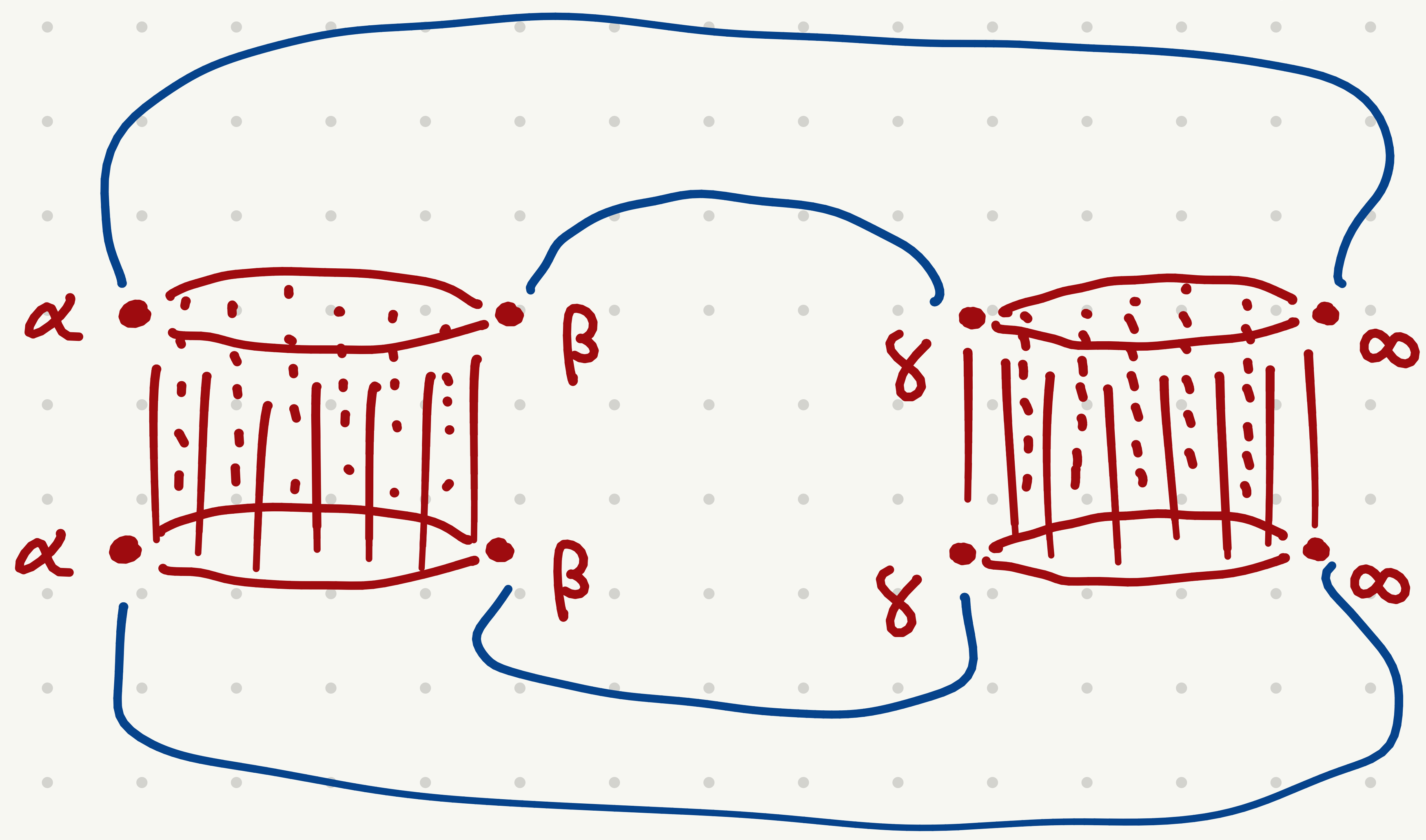
dove se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ si ottiene una curva:



Siccome $w^2 = p(z)$ abbiamo un rivestimento deg 2.
Come nell'esempio 1 consideriamo 2 copie di $\mathbb{C}$ e operiamo 2 tagli (vedi sotto).



Poi si identifica come già fatto e si aggiunge il punto all'infinito. Così facendo, si ottiene la seguente figura:



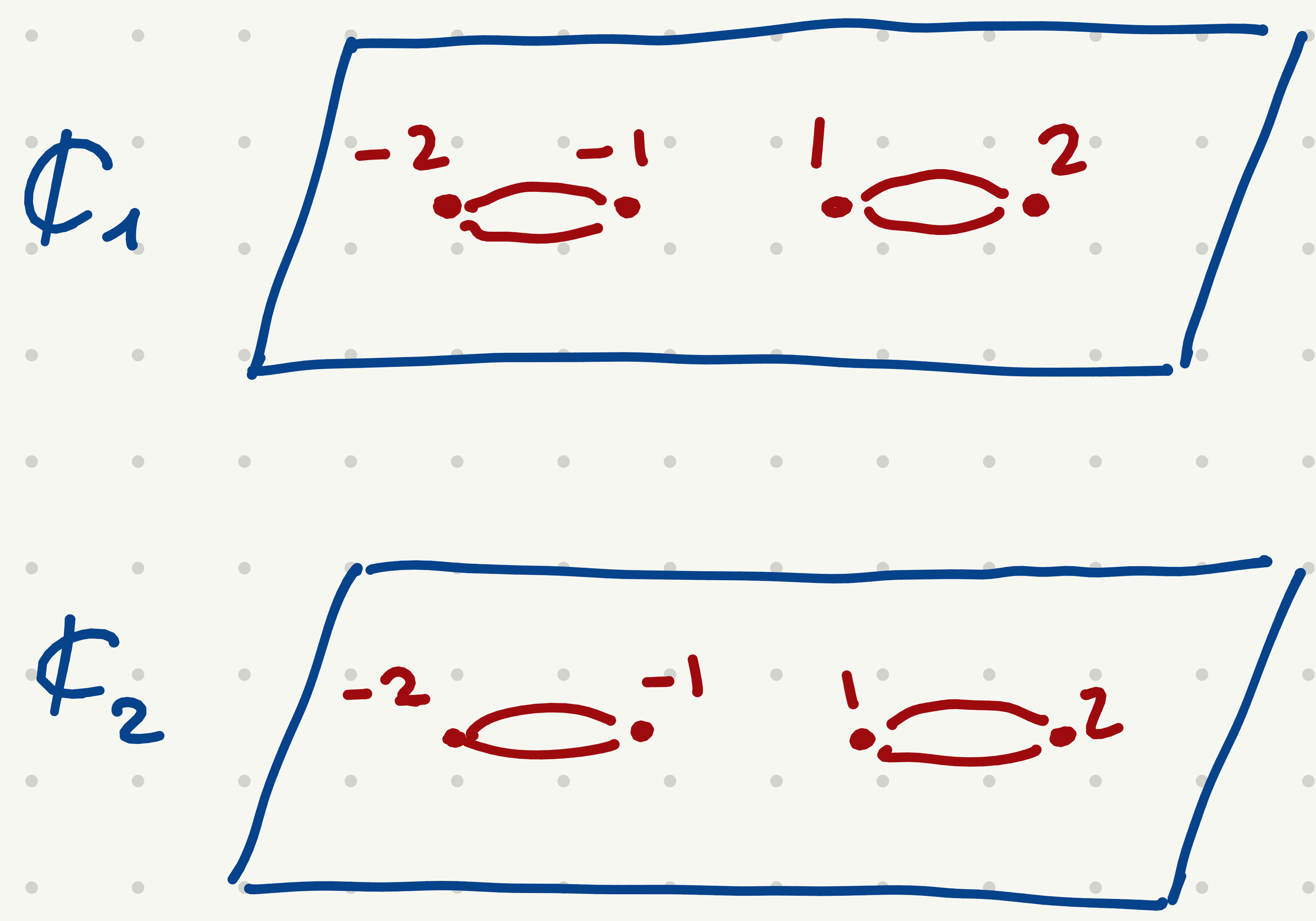
identificazione

$\Rightarrow$ Abbiamo un omeo con il TORO.

3) $\mathbb{C}^2$ consideriamo la curva:

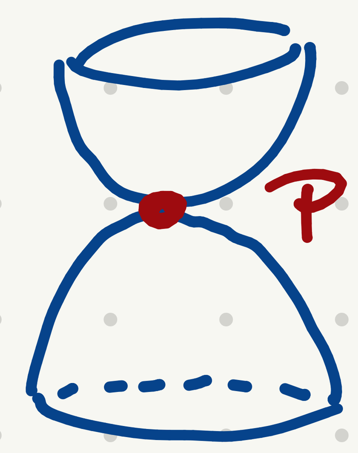
$$\mathcal{C}: \quad w^2 = (z^2-1)(z^2-4)$$

e allora come nel caso precedente abbiamo:



e operiamo 2 tagli. Aggiungendo il punto all'infinito, abbiamo un punto singolare.

Topologicamente attorno a $P = \infty$:

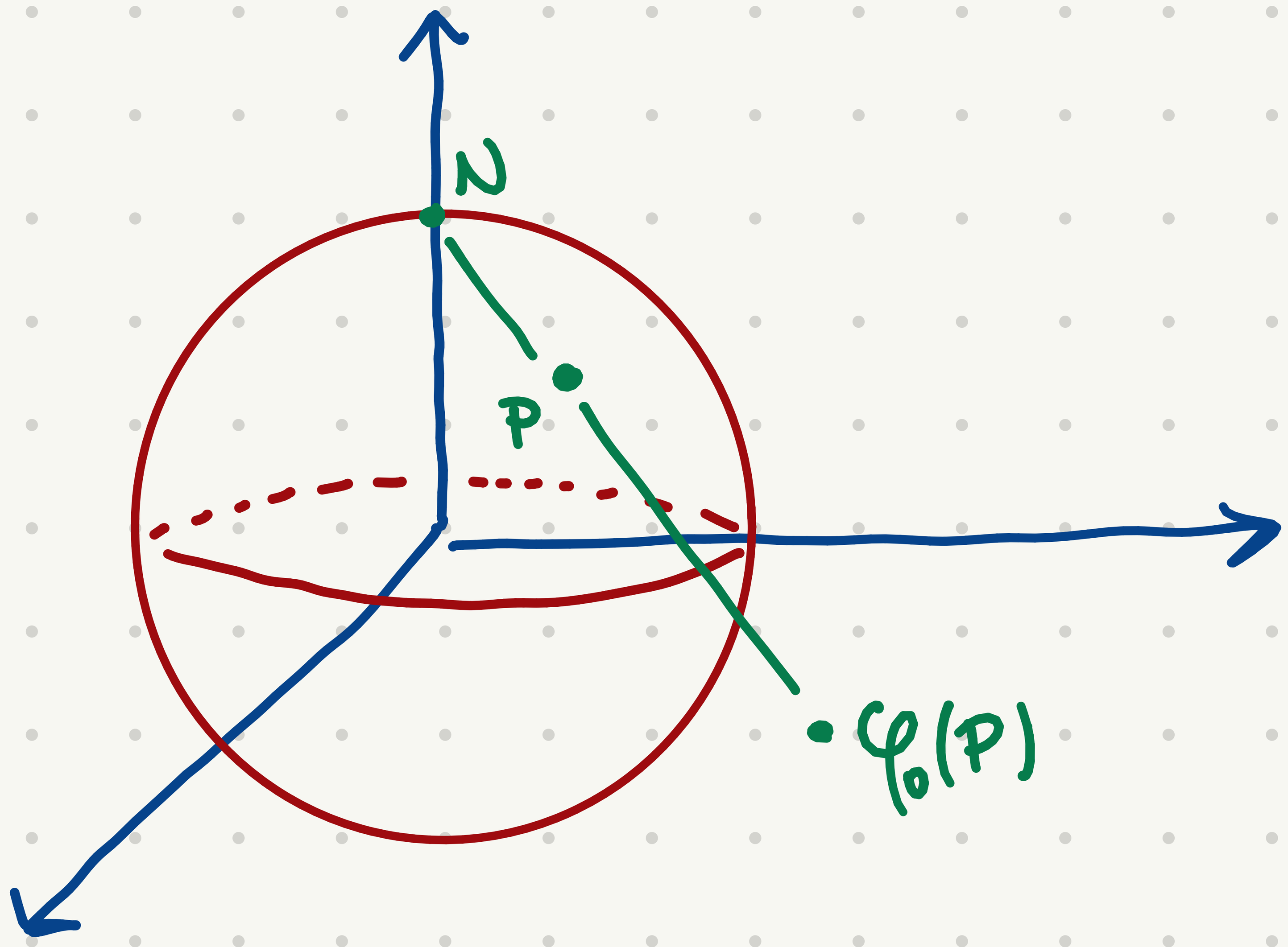


quindi è come se partendo dal toro si contraesse γ:

- ALTRI ESEMPI di Superfici di Riemann

1) Sia $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ la sfera.

Facciamo la proiezione stereografica dove $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$:



cioè $U_0 = S^2 \setminus \{N\}$ si considera

$$\varphi_0 : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$P = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}$$

e analogamente con S polo sud:

$$\varphi_1 : S^2 \setminus \{S\} =: U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$P = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1}{1+x_3} + i \frac{x_2}{1+x_3} .$$

Affinché sia superficie di Riemann, calcoliamo che:

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$= u(x,y) + i v(x,y)$$

ma questa non rispetta le condizioni di Cauchy–Riemann

⇝ non mi dà la struttura olomorfa richiesta!

Allora cambiamo la mappa φ_1 con $\overline{\varphi_1}$ data da:

$$\overline{\varphi_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1+x_3} - i \frac{x_2}{1+x_3}$$

e così facendo si trova che

$$\overline{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x+iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

che è biolomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1') Rivediamo in un altro setting.

Abbiamo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \{[z_0,z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}/\mathbb{C}^*$ dove

$[z_0,z_1] \sim [z_0',z_1'] \iff z_0' = cz_0,\ z_1' = cz_1$ per $c \in \mathbb{C}^*$.

Abbiamo quindi 2 aperti:

$$U_0 = \{z_0 \neq 0\} = \left\{\left[1, \frac{z_1}{z_0}\right]\right\} \cong \mathbb{C} =: V_0 \quad \text{con } z = \frac{z_1}{z_0}$$

$$U_1 = \{z_1 \neq 0\} = \left\{\left[\frac{z_0}{z_1}, 1\right]\right\} \cong \mathbb{C} =: V_1 \quad \text{con } w = \frac{z_0}{z_1}.$$

Allora in $V_0 \cap V_1 = \{[z_0,z_1] \mid z_0 \neq 0, z_1 \neq 0\}$ si ottiene

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \frac{1}{w} \quad \text{che è BIOLOMORFA.}$$

(per questo prima serviva coniugare φ_1: per fare anche l'inversa bisogna coniugare.)

OSS: X superficie di Riemann $\Rightarrow$ X orientabile.

Infatti: in carte locali $z_j = x_j + iy_j$ coordinata di V_j

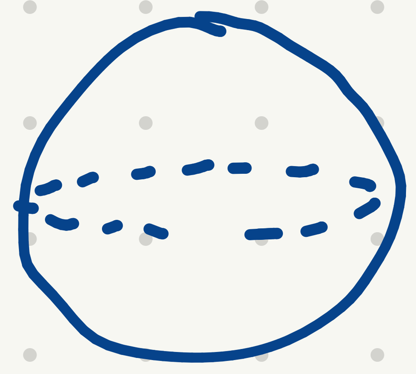
$d_{\mathbb{R}}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ matrice 2×2 con $\det > 0$.

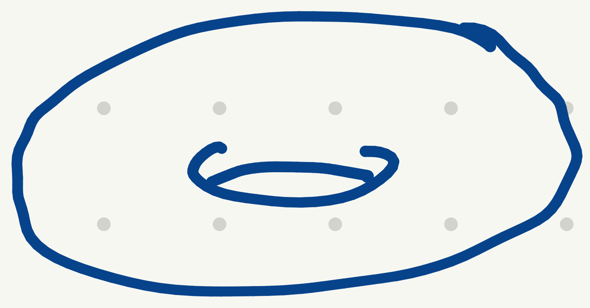
RICHIAMO

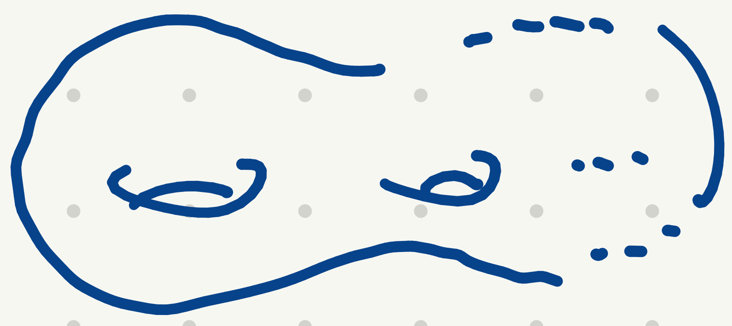
TEOREMA

Sia X superficie connessa, compatta e orientabile.

Allora X è omeomorfa ad:

 S^2 cioè $g = 0$

 T cioè $g = 1$

 g-toro cioè $g \geq 2$

dove g = genere. Si trova in particolare che

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}.$$

Inoltre, abbiamo anche:

g	curvatura	rivestimento universale
0	>0	S^2
1	$=0$	$\mathbb{C}$
≥ 2	<0	$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z \rvert < 1\}$ $\cong$ $\mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$

Abbiamo visto che S^2 ha struttura complessa:

$$S^2 \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \quad (= \mathbb{C}_\infty \text{ sul libro})$$

con le carte dell'esempio sopra, cioè in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$U_0 = \{z_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}$ coord z

$U_1 = \{z_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}$ coord w

e $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : w = \frac{1}{z}$.

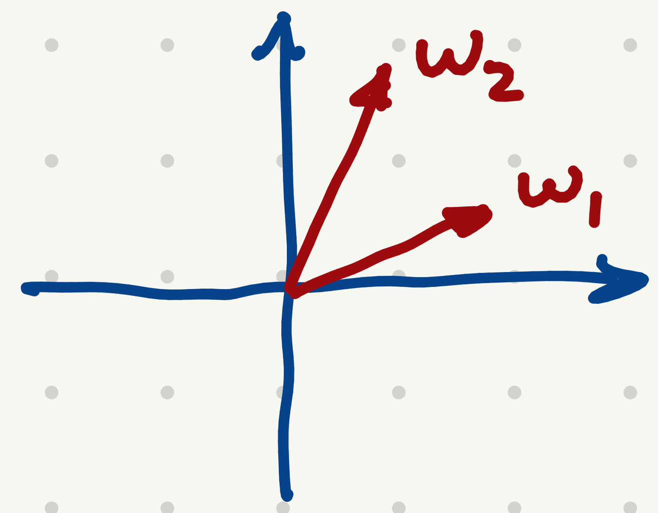
- ALTRI ESEMPI di Superfici di Riemann

2) Costruzione di T toro. In $\mathbb{C}$ consideriamo 2 "vettori complessi" w_1, w_2.

Supponiamo che $\tau = \dfrac{w_2}{w_1} \in \mathbb{H}$ (quindi orientazione $+$)

e consideriamo il reticolo Λ generato da w_1, w_2:

$$\Lambda := \mathbb{Z} w_1 + \mathbb{Z} w_2 .$$



Allora poniamo $T := \mathbb{C}/_{\Lambda}$.

Topologicamente abbiamo che $T \overset{\text{omeo}}{\sim} S^1 \times S^1$.

Sia $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow T$ proiezione naturale. Ma
$\qquad z \longmapsto [z]$

allora π è un omeomorfismo locale dato che Λ è un insieme discreto di $\mathbb{C}$. Formalmente:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \quad \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } V(z,\delta) \cap \Lambda \neq \emptyset$$

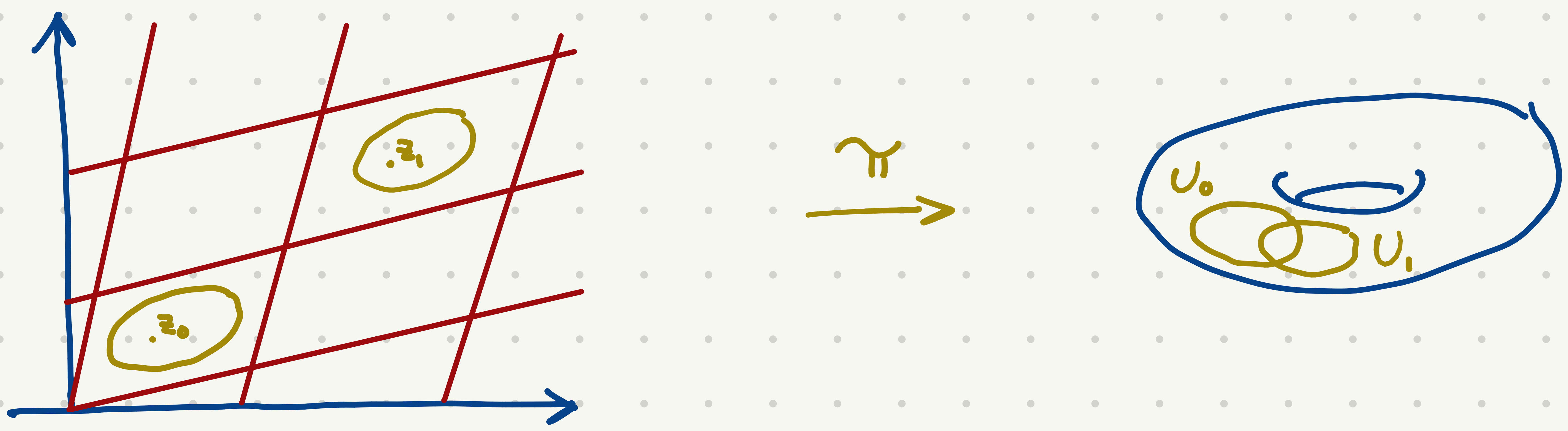
e allora $\pi|_{V(z,\delta)}$ è un omeomorfismo locale.

Poniamo $U_p = \pi(V(z,\delta))$ per $p = [z] = \pi(z)$.

Abbiamo un atlante $\{(U_p, \varphi_p)\}$ con $\varphi_p = \left(\pi|_{V(z,\delta)}\right)^{-1}$.

Siccome T compatto, si può estrarre un sottoricopr da $\{U_p\}$ finito. Siano:

$$U_0 = \pi(V(z_0,\delta_0)) \quad \text{e} \quad U_1 = \pi(V(z_1,\delta_1)).$$



per cui $\varphi_0 = \left(\pi|_{V(z_0,\delta_0)}\right)^{-1}$ e $\varphi_1 = \left(\pi|_{V(z_1,\delta_1)}\right)^{-1}$.

Poniamo $t(z) := \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$.

Si ottiene che $\pi(t(z)) = \pi(z) \quad \forall z \in \varphi(U_0 \cap U_1)$

ovvero si ottiene che $t(z) - z \in \Lambda$. Costruiamo:

$$\eta(z) = t(z) - z$$

che è continua con $\operatorname{Im} \eta \subseteq \Lambda$ discreto, cioè η è localmente costante. $\Rightarrow$ η e' costante, $\eta \equiv c$.

In conclusione, $t(z) = z + c$ che è biolomorfa.

> SPOILER: ci sarà un'infinità di strutture olomorfe, ma soltanto una differenziale!

CURVE PIANE come superfici di Riemann

DEF. Curva Piana

Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con coordinate omogenee $z_0 : z_1 : z_2$.

Una X CURVA PIANA PROIETTIVA e' $X = [F]$ dove F e' un polinomio omogeneo di grado d.

Diciamo che:

X IRRIDUCIBILE $\iff$ F polinomio irriducibile

X RIDOTTA $\iff$ $(F) = \sqrt{(F)}$

"Praticamente" se $F = \prod_{h=1}^{n} F_h^{m_h}$ con F_h irriducibili, si chiede che $\begin{cases} X \text{ ridotta sse } m_h = 1 \ \forall h \\ X \text{ irriducibile sse } (n = 1 \wedge m_1 = 1) \end{cases}$

Supporto di $F := \{ z \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid F(z) = 0 \}$

- Se F e' irriducibile, allora $X = \text{supp}(F) = V(F)$ e' una curva irriducibile.
- Se $F = \prod F_h$ allora $X = \bigcup X_h$ dove $X_h = V(F_h)$.

Sia $X = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ irriducibile. Vogliamo dare una struttura di superficie di Riemann.

Dovremo affrontare il problema dei punti singolari.

DEF. Punto Singolare

Sia X curva. Un $p \in X$ e' PUNTO SINGOLARE se

$$\frac{\partial F}{\partial z_0}(p) = \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) = \frac{\partial F}{\partial z_2}(p) = 0$$

ed e' LISCIO se non e' singolare.

Natura locale di punti lisci / singolari

Considero il ricoprimento standard dato da:

$$U_0 = \{(1 : z_1 : z_2)\} \qquad U_1 = \{(z_0 : 1 : z_2)\}$$

$$U_2 = \{(z_0 : z_1 : 1)\}$$

e poniamo $X^i = U_i \cap X$. Otteniamo che:

p liscio/singolare $\iff$ $p \in X^i \subset U_i \cong \mathbb{C}^2$ è punto liscio/singolare come curva affine.

OSS: ricordiamo che $X^i = V(D_{z_i}(F)) = V(F|_{z_i=1})$.

Sia allora $p \in X$ punto liscio tale che

$$p \in X^i \subset U_i \cong \mathbb{C}^2 \text{ con coordinate } z_1, z_2.$$

Abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA delle funzioni implicite

Sia $p = (\xi_1, \xi_2)$ e supponiamo $\frac{\partial F}{\partial z_2}(p) \neq 0$. Allora esiste una funzione olomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che in un intorno U di p si ottenga

$$U \cap X^i = \{(z_1, g(z_1)) \mid z_1 \in U_1 \subset \mathbb{C}\}.$$

COROLLARIO 1

La funzione $g^{-1} : U \to U_1$ induce una struttura complessa.

COROLLARIO 2

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^2$ irriducibile liscia. Allora ha struttura di superficie di Riemann compatta (chiuso di $\mathbb{P}^2$).

Cosa fare se X è singolare?

Risoluzione di Singolarità

PROPOSIZIONE 1

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^2$ curva irriducibile. Allora

$$\#\{\text{punti singolari di } X\} < \infty.$$

• DIM (idea)

Sappiamo p singolare $\longleftrightarrow \begin{cases} F(p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i \end{cases}$

ma ciascuna equazione del sistema induce una curva. Le soluzioni corrispondono alle intersezioni di queste curve, che hanno tutte grado $<$ deg X.

Siccome X è irriducibile, per il Teorema di Bezout c'è un numero finito di intersezioni. $\blacksquare$

DEF Molteplicità di $p \in X$

Dato $p \in X$ si ottiene che

$$\text{molt}_p(X) := \min_{\substack{r \ni p \\ r \text{ retta}}} \left[\text{molt}_p(r, X) \right]$$

dove se $X = F(x_0, x_1, x_2)$ ed $r = \lambda P + \mu Q$ con parametri λ, μ, $\quad X \cap r \longleftrightarrow F(\lambda P + \mu Q)$ pol omog in (λ, μ).

Poichè $p \in X \cap r$, si cerca la molteplicità m della radice $(\lambda_0, \mu_0) = (1, 0)$. Allora $\text{molt}_p(r, X) := m$.

Proposizione

Sia $P = (1:0:0)$. In $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ scriviamo

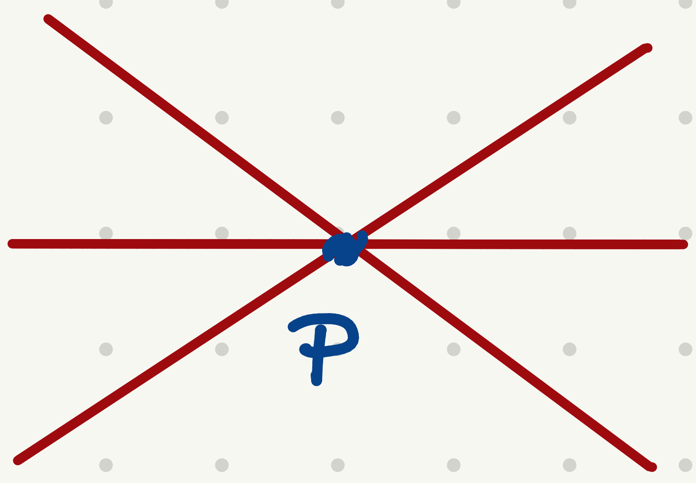
$$F(1:z_1:z_2) = \sum_{j \geq m} f_j(z_1, z_2)$$

dove f_j omogeneo di grado j. Allora $\mathrm{molt}_p(X) = m$.

DEF. Punto Multiplo Ordinario

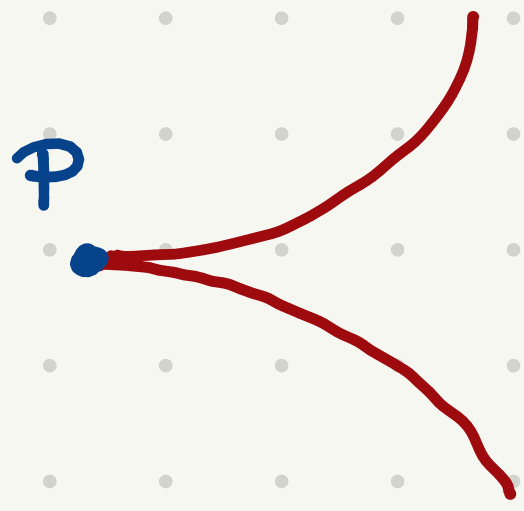
Un punto $p \in X$ e' MULTIPLO ORDINARIO se localmente in p si scrive $F = \prod_{j=1}^{m} h_j$ + "termini grado più alto", con h_j forme lineari distinte.

IDEA VISIVA



punto triplo ordinario

Nel caso della cuspide $z_1^2 = z_2^3$

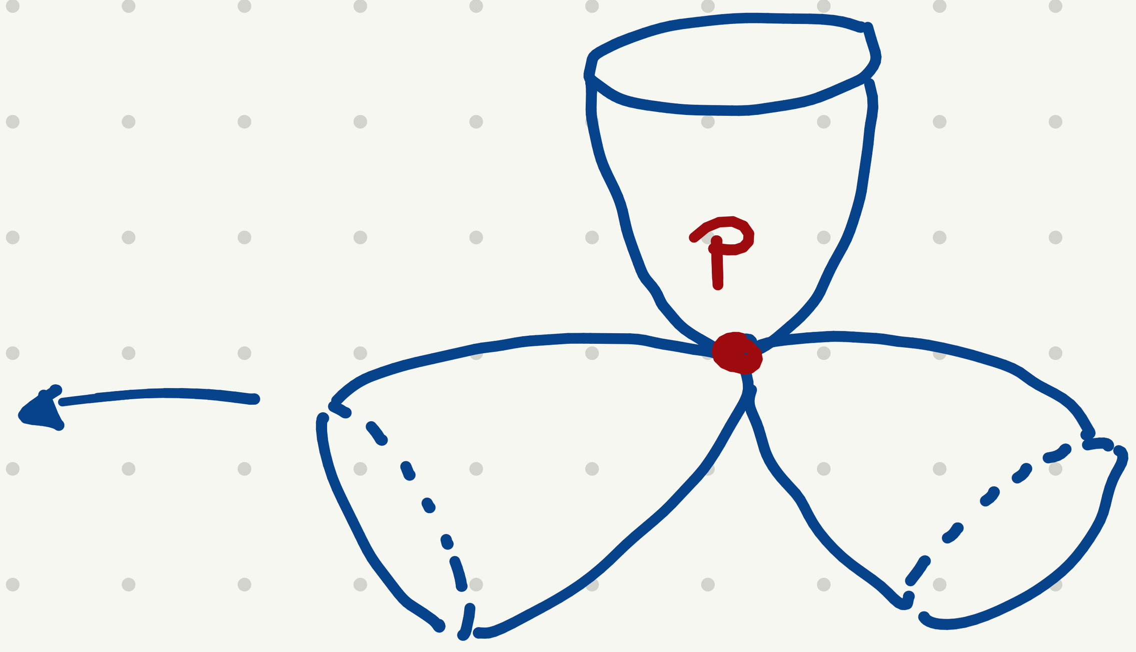


$\Rightarrow$ non è un punto doppio ordinario.

In questo caso, abbiamo una risoluzione topologica:

$\boxed{\text{TOPOLOGICAMENTE}}$ nel caso di punto triplo ordinario si troverà

intorni di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$



e quindi basta togliere il punto p per risolvere la singolarità.

Risoluzione topologica delle singolarità nel caso di $p \in X$ punto m-uplo ordinario.

In questo caso si ottiene la seguente:

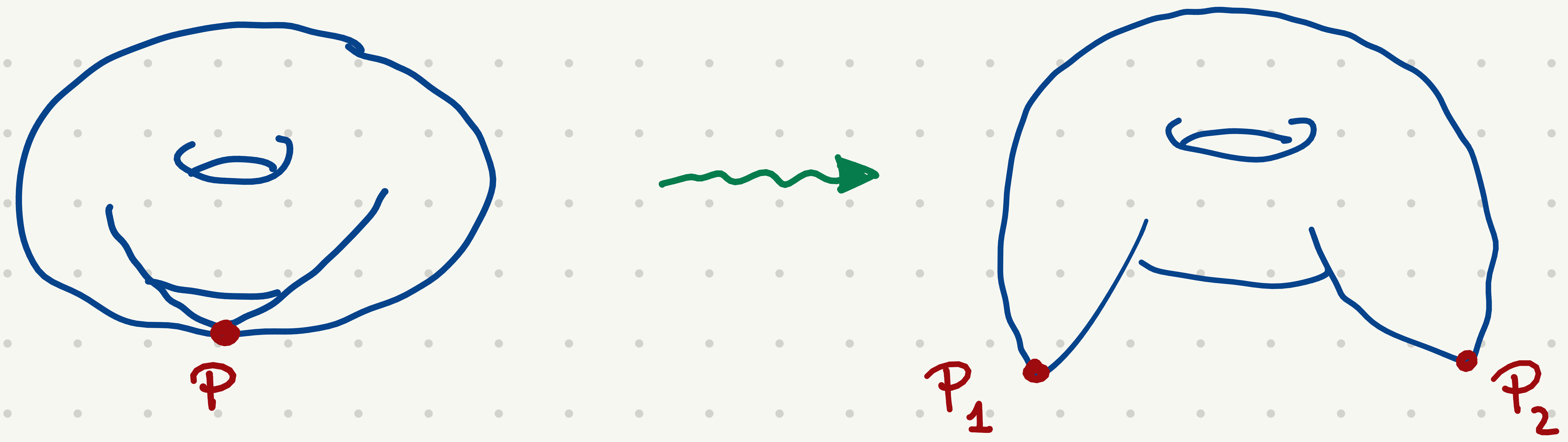
$$U \cap (X \setminus \{p\}) \overset{omeo}{\cong} \Delta_1^* \sqcup \dots \sqcup \Delta_m^*$$

dove $\Delta_i^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$

Ma allora riaggiungendo il punto p, basta aggiungere i centri dei dischi Δ_i^*, che chiamiamo p_i.

▸ <u>ESEMPIO</u>

Nel caso della seguente figura si può risolvere come segue:



Vediamo cosa succede alla <u>struttura complessa</u>.

Consideriamo allora
$$\pi : X \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (z_1, z_2) \longmapsto z_1$$
la proiezione e supponiamo che in Δ_i^* valga $\frac{\partial \pi}{\partial z_2} \neq 0$.

Allora π induce una mappa $\pi_i : \Delta_i^* \to \Delta^* \subset \mathbb{C}$.

Poiché $\pi_1(\Delta^*) = \mathbb{Z} = \pi_1(\Delta_i^*)$ si trova che

$\Rightarrow$ π_i è un rivestimento di grado m_i (poi si vedrà $m_i = 1$).

$\Rightarrow$ π_i posso scriverlo come z^{m_i} ottenendo così la struttura olomorfa in un intorno di P_i.

▸ RISOLUZIONE ALGEBRICA di SINGOLARITÀ

Scoppiamento di $\mathbb{C}^2$ in P

Sia $X \subseteq \mathbb{C}^2 = \{z_0 \neq 0\}$ con coordinate z_1, z_2. Sia $P = (0,0)$.

DEF. Scoppiamento di $\mathbb{C}^2$ in P

Lo SCOPPIAMENTO di $\mathbb{C}^2$ in $P = 0$ è $Bl_p(\mathbb{C}^2)$:

$$\overline{\{((z_1,z_2),(y_1,y_2)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} : z_1 y_2 = z_2 y_1\}}^{Zar} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

dove si usa la topologia "quasi-proiettiva".

Perché si considera questo?

OSS: preso $(z_1, z_2) \neq (0,0)$ allora $(y_1 : y_2)$ è univocamente determinato dalla direzione. Mentre se $(z_1,z_2) = (0,0)$ segue che tutti i $(y_1 : y_2)$ vanno bene $\Rightarrow$ $(0,0)$ viene "scoppiato"!

Formalmente, esiste una mappa birazionale

$$\begin{aligned} bl_p : Bl_p(\mathbb{C}^2) &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ ((z_1,z_2),(y_1:y_2)) &\longmapsto (z_1,z_2) \end{aligned}$$

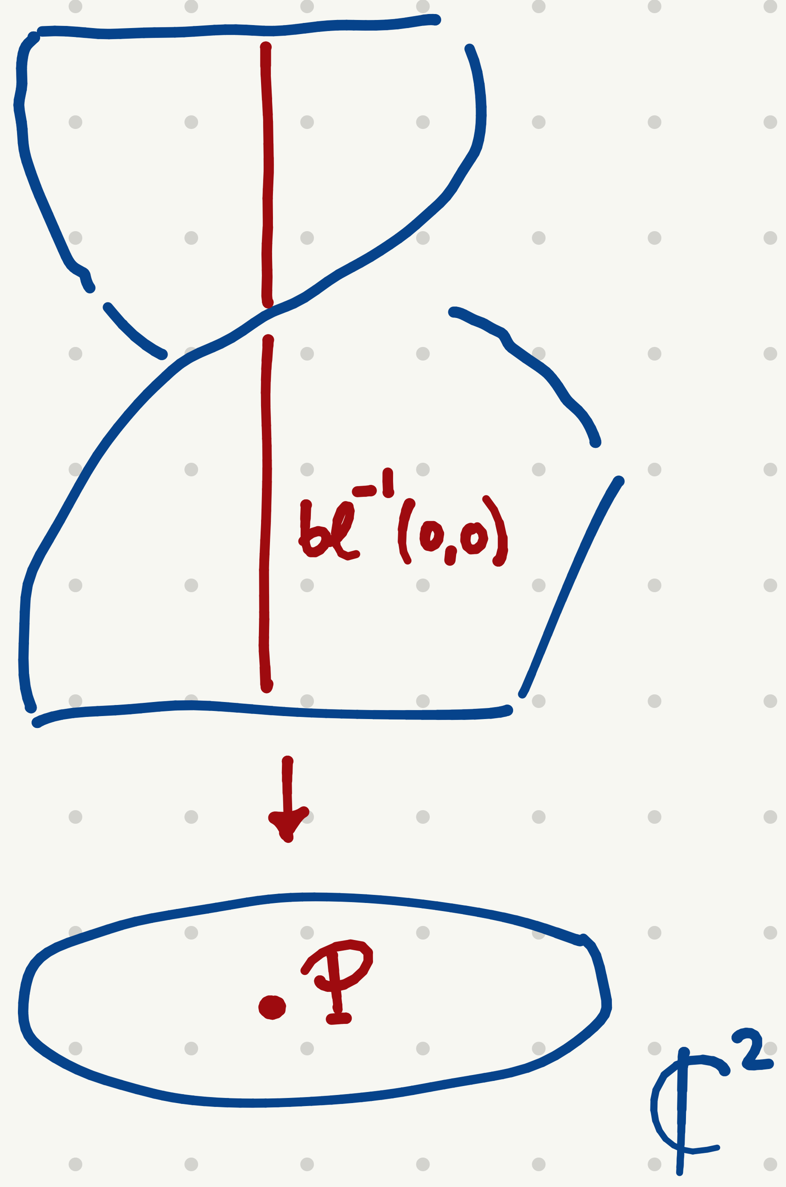
Se $(z_1,z_2) \neq (0,0)$ allora:

$$\exists! \ (y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^1 \text{ tale che } ((z_1,z_2),(y_1:y_2)) \in Bl_p(\mathbb{C}).$$

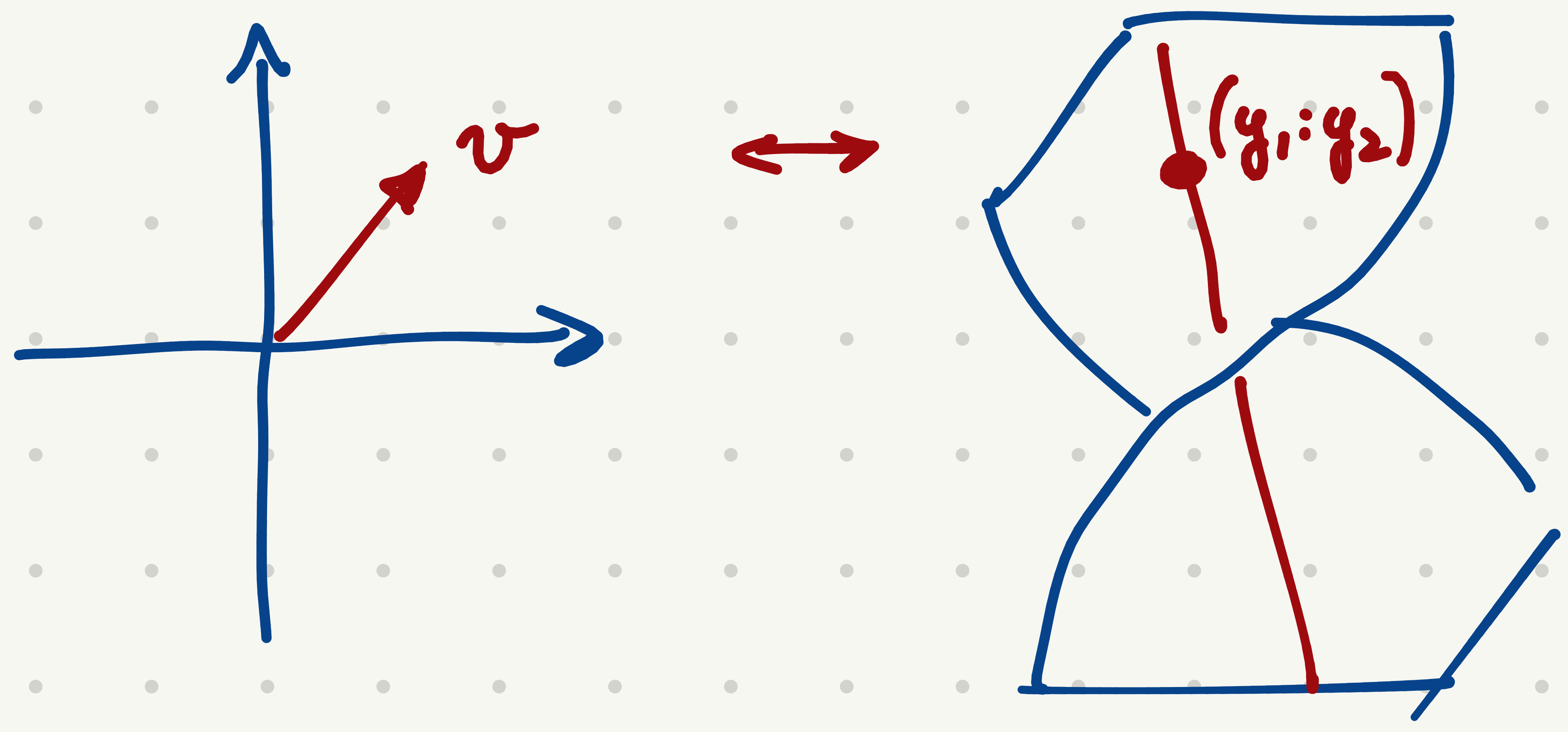
Se $(z_1,z_2) = (0,0)$ allora:

$$bl_p^{-1}((0,0)) = \mathbb{P}^1(y_1 : y_2).$$

Graficamente, si ottiene il disegno a DX.



Data una retta per $(0,0)$, sia $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ il suo vettore direzione : $\quad v \longleftrightarrow (y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^1$



NOT: $\mathcal{B}\ell_p^{-1}(0,0) \cong \mathbb{P}^1$ si chiama CURVA ECCEZIONALE dello SCOPPIAMENTO, indicata E.

Sia X una curva per $P=(0,0)$. Supponiamo inoltre che la retta $(z_1 = 0)$ non sia tangente ad X.

Poniamo $u = y_2/y_1$ così che $(y_1 : y_2) = (1 : u)$.

Ora, per ogni $(z_1, z_2) \neq (0,0)$ scriviamo $z_2 = u z_1$.

Sia $X = (F=0)$ con $F = F(z_1,z_2) = \sum_{k \geq m} F_k(z_1,z_2)$

dove $m =$ "molteplicità di P".

$$p \in X \iff m \geq 1 \quad \& \quad p \text{ liscio} \iff m = 1$$

Il trucco ora è sostituire $z_2 = u z_1$ nell'equazione:

$$F(z_1,z_2) = F(z_1, u z_1) = z_1^m \cdot \tilde{F}(z_1, u).$$

Considerando (z_1, u) coordinate locali in $\mathcal{B}\ell_p(0,0)$ abbiamo che:

$$F(z_1,u) = 0 \implies z_1^m = 0 \quad \text{oppure} \quad \tilde{F}(z_1,u) = 0$$

→ $\underline{z_1 = 0}$: equazione locale di E.

→ $\underline{\tilde{F}(z_1,u)}$: equazione della TRASFORMATA STRETTA di X.

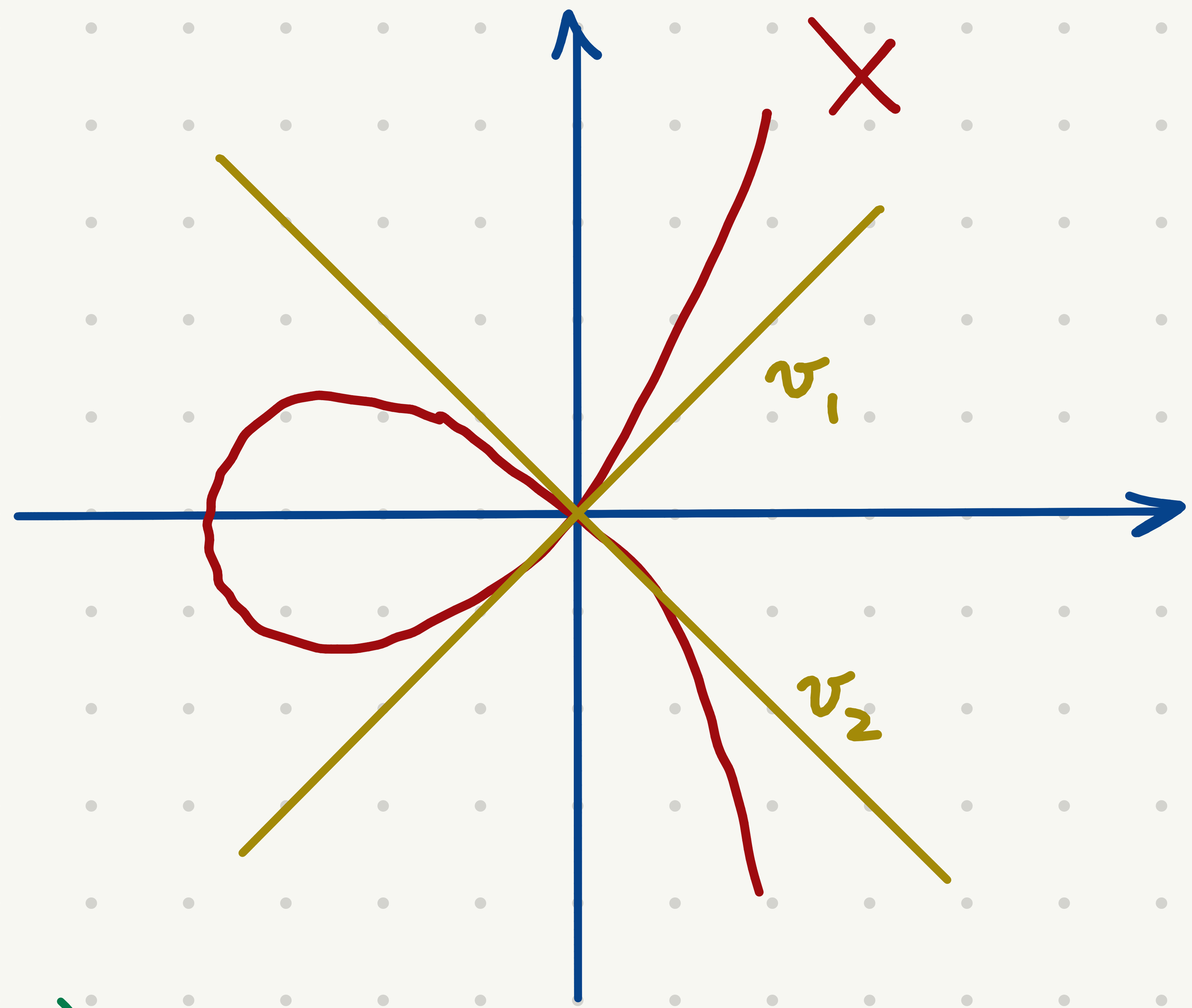
OSS: se X è liscia ovvero $m=1$, allora
$\tilde{F}(z_1, u) = F(z_1, z_2)$ e quindi nulla cambia

Se X è singolare in p, sto "separando le direzioni tangenti".

- ESEMPIO (1)

Sia $X = V(F)$ con $F = z_2^2 - z_1^2(z_1+1)$.

Si ottiene la curva in figura, con $P=(0,0)$ singolare.



Vediamo allora lo:

SCOPPIAMENTO di X

Poniamo $z_2 = u z_1$.

$$\text{Eq. di } X \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} z_2^2 = z_1^2(z_1+1) \\ z_2 = u z_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad u^2 z_1^2 = z_1^2(z_1+1)$$

Si ottiene allora $z_1^2(u^2-(z_1+1))$. Quindi:

$$bl_p^{-1}(X) = \text{"}2E\text{"} \cup \tilde{X}$$

dove abbiamo indicato:

$$\text{"}2E\text{"} \longleftrightarrow (z_1^2 = 0)$$

$$\tilde{X} \longleftrightarrow V(u^2 - z_1 + 1) \subset \mathbb{C}^2(u, z_1)$$

e osserviamo che ora $\tilde{X}$ è liscia perchè $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z_1} \neq 0$.

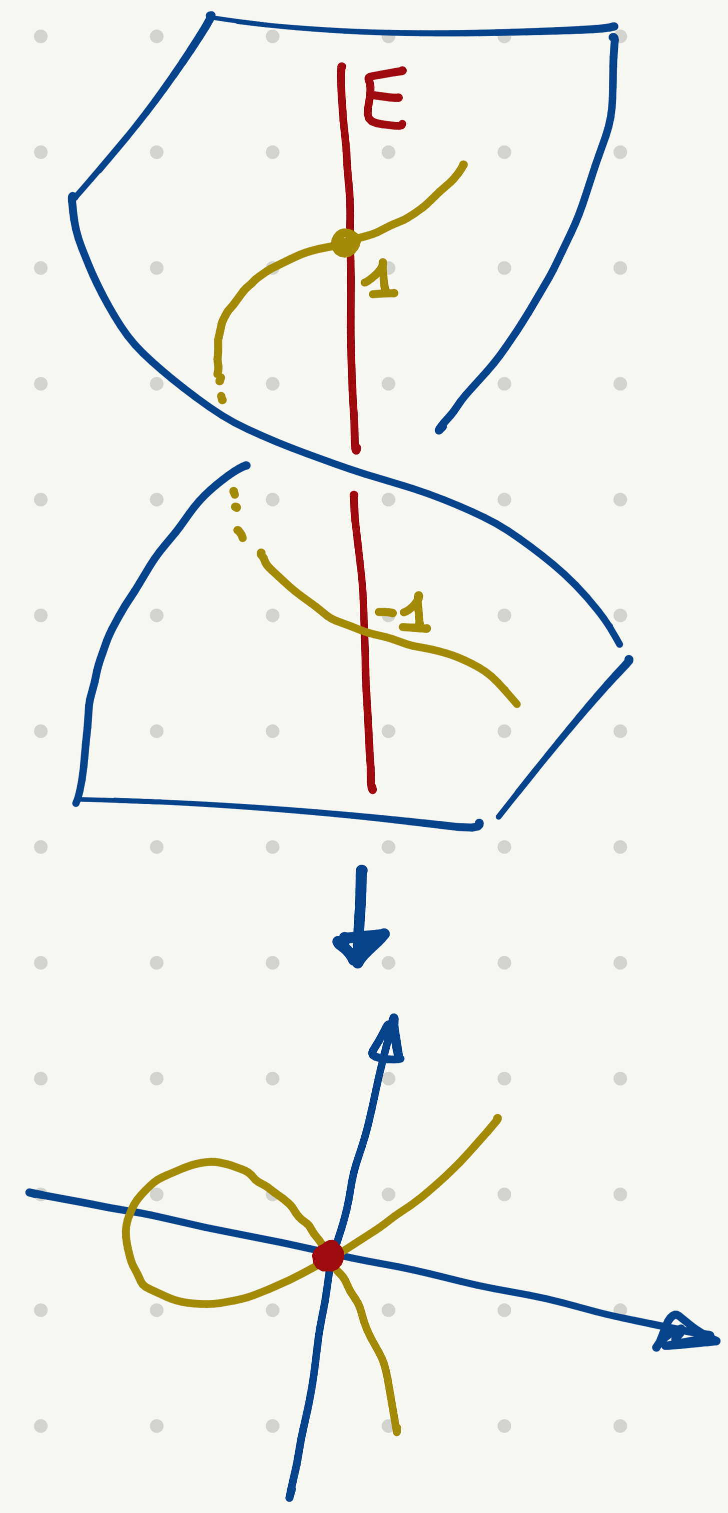
Vogliamo calcolare $E \cap \tilde{X}$ per vedere quali punti abbiamo effettivamente aggiunto.

Calcoliamo quindi:

$$E \cap \tilde{X} \longleftrightarrow \begin{cases} u^2 = z_1 + 1 \\ z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow u^2 = 1 \Rightarrow u = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Effettivamente $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono le DIREZIONI delle tangenti proprie ad X in P.

Nella rappresentazione dello scoppiamento, otteniamo il disegno a DX.



► TEOREMA

Data $X \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ curva algebrica irriducibile, esiste una successione finita di scoppiamenti:

$$\sigma : X^{(n)} \to X^{(n-1)} \to \dots \to \underset{\tilde{X}}{\overset{\|}{X^{(1)}}} \longrightarrow \underset{X}{\overset{\|}{X^{(0)}}}$$

tale che $X^{(n)}$ è liscia.

• DIM. (Idea)

Passo 1: X irriducibile $\Rightarrow$ n° finito di punti singolari.

Passo 2: per ogni punto singolare p di molteplicità m si trova che la molteplicità in $\tilde{X} \leq \text{molt}_p(X)$.

Ad un certo punto deve però calare il grado, perchè metto in evidenza componenti omogenee di grado sempre maggiore.

Equiv: il genere diminuisce, ma è sempre ≥ 0. ■

[**Anticipazione**]: definiremo il GENERE ARITMETICO di $X \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$p_a(X) := \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Vedremo che X liscia $\Rightarrow$ $g(X) = p_a(X)$.

PROPOSIZIONE

Sia P punto di molteplicità m. Allora con uno scoppiamento p_a diminuisce di $\frac{m(m-1)}{2}$.

- **ESEMPIO**

Riprendendo ①, avevamo $X = V(z_2^2 - z_1^2(z_1+1)) \subset \mathbb{C}^2$.
Sia $\overline{X} = V(H(F)) = V(z_0 z_2^2 - z_1^2(z_1 - z_0))$ omogeneizzato.
Poiché $\deg = 3$ si trova che $p_a(X) = 1$.
Il punto considerato, ora $P = (1:0:0) \subset \mathbb{C}^2(1:z_1:z_2)$, ha molteplicità 2. Quindi per Proposizione

$$p_a(\tilde{X}) = 1 - 1 = 0$$

Numericamente allora si ottiene:

- **TEOREMA**

Data $\sigma : X^{(n)} \to X$ successione di scoppiamenti, vale

$$g(X^{(n)}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(X)} \delta_p$$

dove:

$$\delta_p = \frac{m_p(m_p-1)}{2} + \sum_{\substack{q \text{ infinitam} \\ \text{vicino a } p}} \frac{m_q(m_q-1)}{2}$$

dove q e' "infinitamente vicino a p" se $q \in$ "successione di rette eccezionali date dagli scoppiamenti"

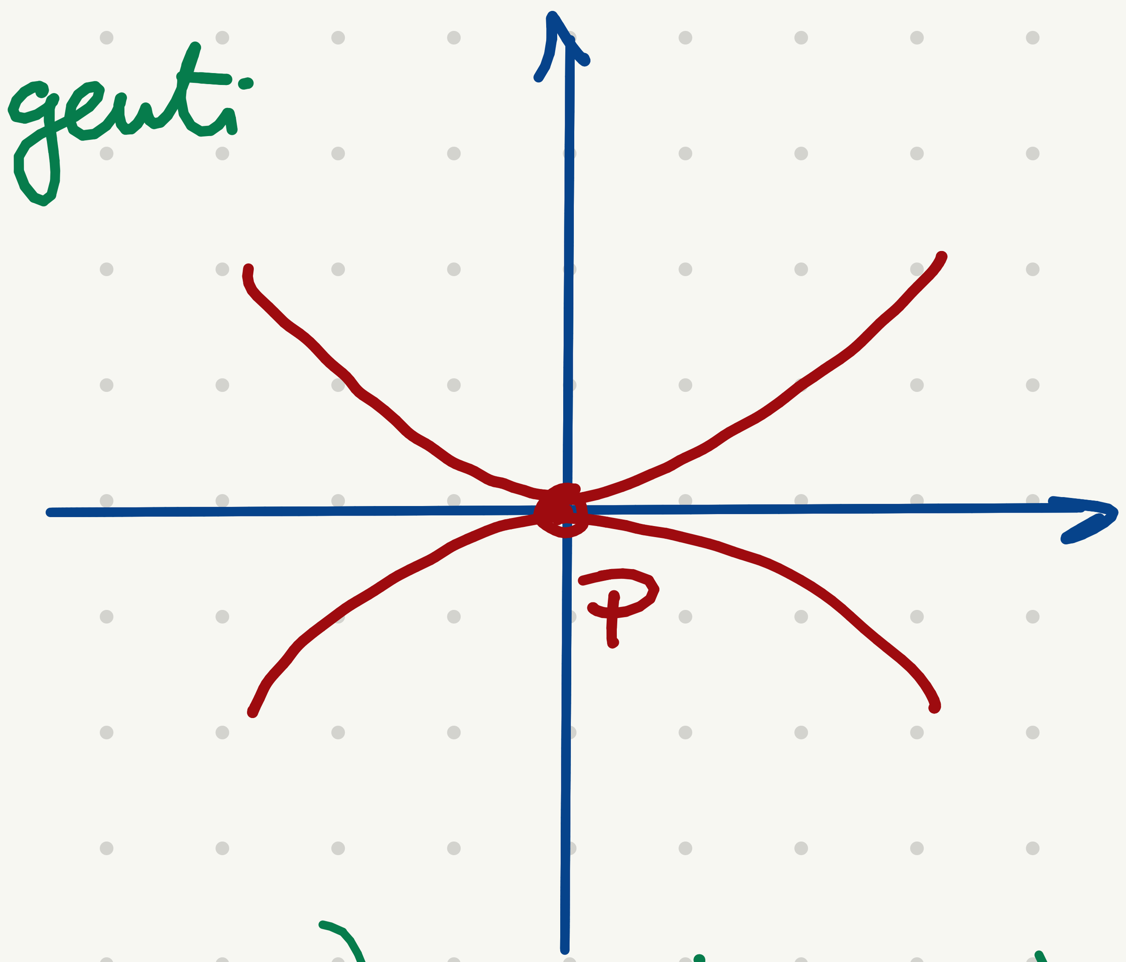
OSS: se p è un punto multiplo ordinario allora

$$\delta_p = \frac{m_p(m_p-1)}{2}$$

perché i punti infinitamente vicini a p sono tutti lisci.

▸ ESEMPIO ②

Sia $X = (z_2^2 - z_1^4 = 0) \subset \mathbb{C}^2$. Il punto $P=(0,0)$ è singolare di molteplicità 2, ma tangenti non distinte, come si vede a DX.



- 1° scoppiamento: sia $z_2 = z_1 u$. Allora

$$F(z_1,z_2) = F(z_1,u) = z_1^2(u^2 - z_1^2)$$

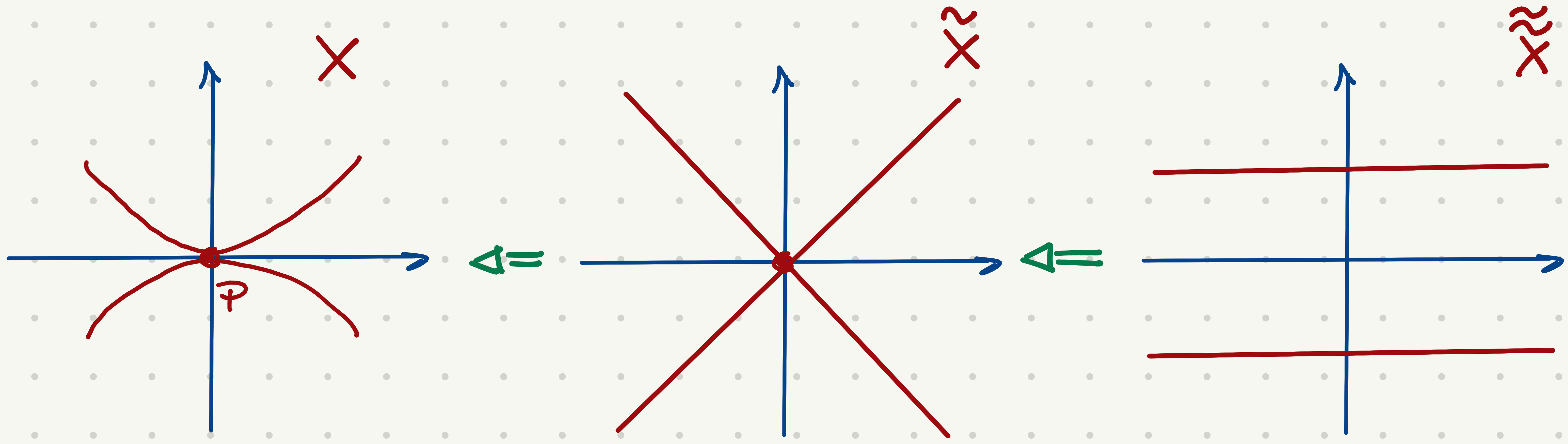
per cui $\tilde{X} = (\tilde{F}(z_1,u) = 0) = (u^2 - z_1^2 = 0) \subset \mathbb{C}(u,z_1)$

- 2° scoppiamento: sia $z_1 = u \cdot h$. Allora

$$\tilde{F}(z_1,u) = \tilde{F}(u,h) = u^2(1-h^2)$$

per cui $\tilde{\tilde{X}} = V(1-h^2)$ che è liscia.

Visivamente:



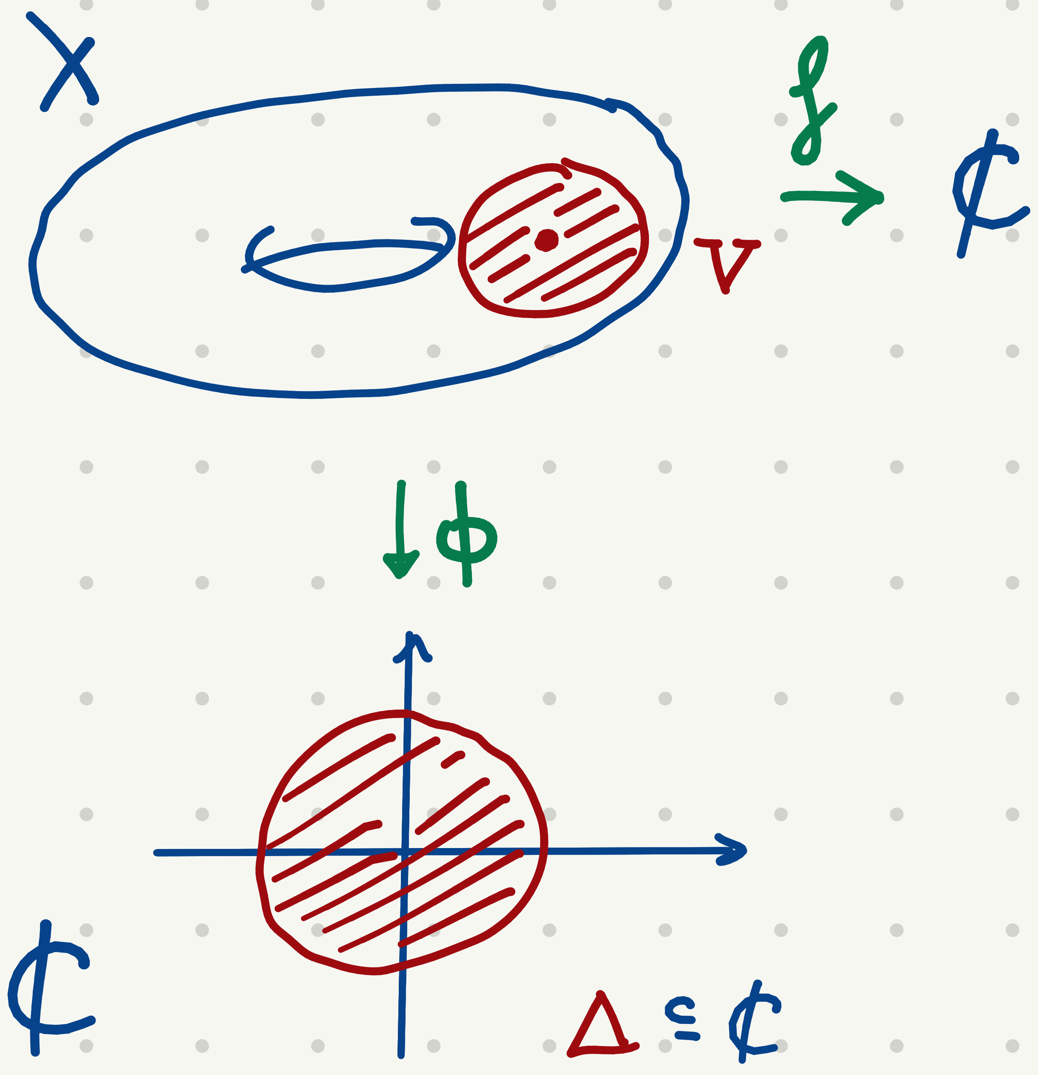
▸ ESERCIZIO

Risolvere le singolarità di $X = \left(z_0^2 z_2^2 = (z_1^2 - z_0^2)(z_1^2 - 4z_0^2)\right)$.

$\left\{ \text{Sol: Punti singolari } (0:1:0) \text{ e localmente } (z_0^2 = (z')^4). \right\}$

MAPPE OLOMORFE su SUPERFICI di RIEMANN

Sia X superficie di Riemann.



DEF. Mappa Olomorfa

- Sia $f : X \to \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA nel punto $p \in X$ se

$$\exists\, \phi = \phi_p : \begin{array}{ccc} U(p) & \longrightarrow & \Delta(q) = \{|z-q|<\varepsilon\} \subset \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & q \end{array}$$

tale che $f \circ \phi^{-1}$ e' olomorfa in q.

- Diciamo che f e' OLOMORFA su X se e solo se f e' olomorfa in p $\forall p \in X$.

DEF. Mappa Meromorfa

Sia $f : X \to \mathbb{C}$. Diciamo che f e' MEROMORFA in p se $\exists\, U(p)$ e $\phi_p : \begin{array}{ccc} U(p) & \longrightarrow & \Delta(q) \\ p & \longmapsto & q \end{array}$ tali che

la composizione $f \circ \phi_p^{-1}$ e' OLOMORFA in $\Delta \setminus \{q\}$ e ha singolarità di tipo eliminabile o polo in q.

- OSS: se f e' olomorfa in p allora localmente

$$f \circ \phi^{-1} = \sum_{n \geq k} c_n (z-q)^n \quad \left(\text{con } \operatorname{ord}_p(f) = k = \min\{n \mid c_n \neq 0\}\right)$$

per cui si ottiene che

- f e' mappa aperta e $\{\text{zeri}\} \cup \{\text{poli}\}$ e' un insieme discreto.
- f e' localmente una funzione armonica ($\Rightarrow$ Princ. del Max).

Quindi se f è OLOMORFA, soddisfa il PRINCIPIO del MASSIMO:

THM. Principio del Massimo

Sia $f: X \to \mathbb{C}$ olomorfa definita su $W \subset X$ aperto e connesso. Se $\exists\, p \in W$ tale che $|f(x)| \leq |f(p)|$ $\forall x \in W$ allora f è costante in W.

THM

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa ed $f: X \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora f è costante.

- **DIM.**

La funzione $|f(x)|$ è continua e localmente costante per il principio del massimo. Ma X compatta, quindi ammette un massimo. ■

NOTAZIONE

Denotiamo $\mathcal{O}_X(U) := \{ f: U \to \mathbb{C} \;:\; f \text{ olomorfa } \forall p \in U \}$.

Vediamo ora un risultato sulle meromorfe.

TEOREMA

Una mappa $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ è:

meromorfa $\iff$ $f(z_0, z_1) = \dfrac{p(z_0,z_1)}{q(z_0,z_1)}$ con p, q polinomi di $=$ deg.

- **DIM**

Consideriamo $U_0 = \{ z_0 \neq 0 \}$ con coordinata $z = \frac{z_1}{z_0}$. Allora

$$f(z) := f\left(1, \frac{z_1}{z_0}\right) : \; U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

Sia $\{\lambda_j \in U_0\}$ l'insieme dei poli e degli zeri di f.

Poniamo $\ell_j = \mathrm{ord}_{\lambda_j}(f)$. Allora definiamo

$$\tau(z) := \prod_j (z - \lambda_j)^{\ell_j}.$$

Esplicitando, se $\{\alpha_i\}$ = "zeri" e $\{\beta_j\}$ = "poli" si riscrive

$$\tau(z) = \frac{\prod (z-\alpha_i)^{\ell_i}}{\prod (z-\beta_j)^{|\ell_j|}}.$$

Per costruzione, $\tau(z)$ ha gli stessi poli/zeri di f in U_0.

Quindi $g = \dfrac{f}{\tau}$ non ha ne' zeri ne' poli $\Rightarrow$ g costante su U_0.

Non basta! Vale per g senza polo in $P = \infty = (0:1)$.

Su $\mathbb{P}^1$ riscriviamo adesso:

$$\tau(z_0, z_1) := z_0^n \cdot \prod (a_j z_0 - b_j z_1)^{\ell_j}$$

dove $\lambda_j = \dfrac{a_j}{b_j}$ mentre n = potenza che rende omogeneo $\dfrac{\pi(z-\alpha_i)^{\ell_i}}{\pi(z-\beta_j)^{\ell_j}}$

cioe' $n = -\sum_i \ell_i + \sum_j |\ell_j|$.

Dato che g e' meromorfa e costante in U_0, preso $P = \infty = (1:0)$:

- se g <u>non</u> ha poli in $P = \infty$ allora g e' olomorfa su $\mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ g costante su $\mathbb{P}^1$.
- se g ha poli in $P = \infty$, $\frac{1}{g}$ ha zeri in $P = \infty$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{g}$ olomorfa e costante su $\mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ g costante su $\mathbb{P}^1$.

Questo conclude. $\blacksquare$

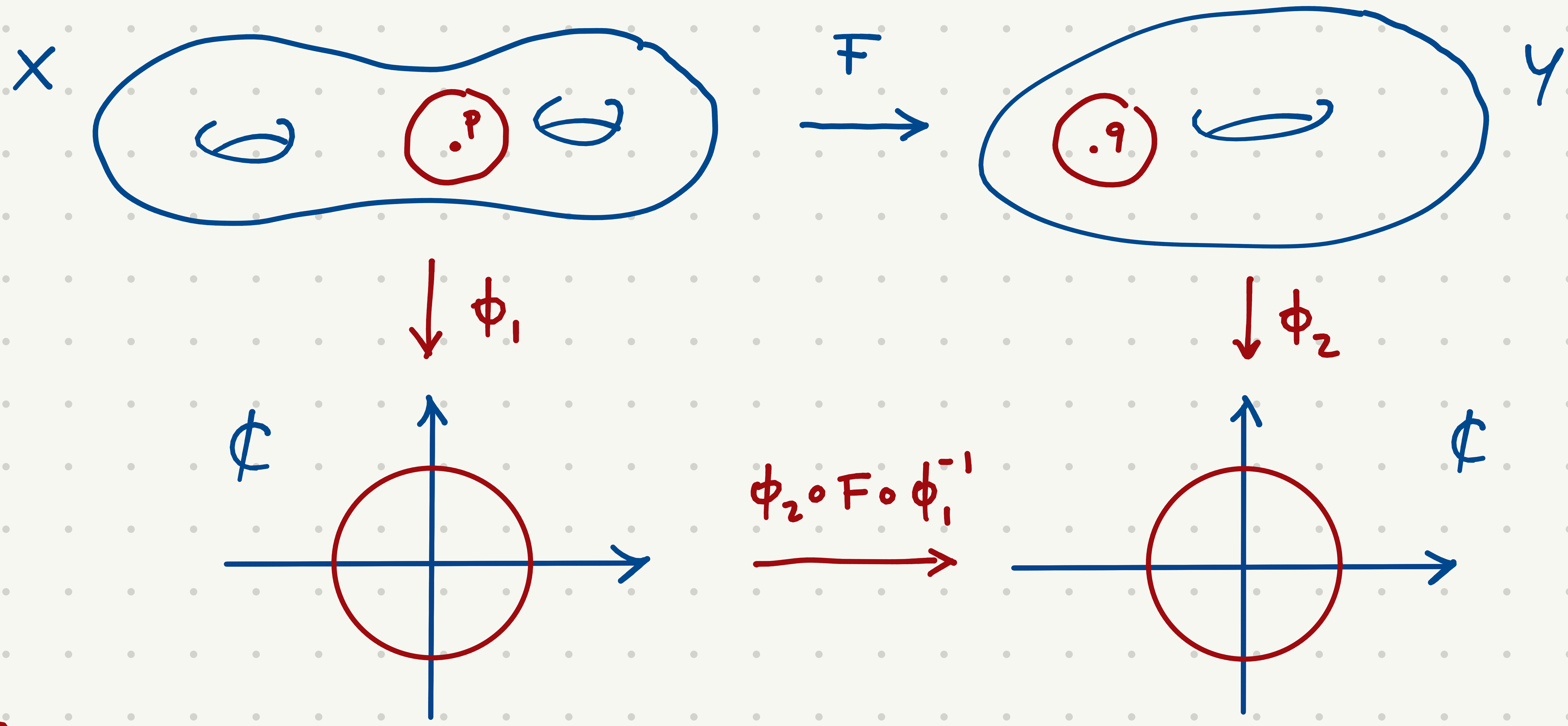
MAPPE TRA SUPERFICI di RIEMANN

▸ **DEF.** Mappe Olomorfe $X \to Y$

Siano X, Y superfici di Riemann. Una $F : X \to Y$ si dice OLOMORFA in $p \in X$ se, posto $q = F(p)$, esistono carte

$$\phi_1 : U_1(p) \to \Delta_1 \subset \mathbb{C} \qquad \phi_2 : U_2(q) \to \Delta_2 \subset \mathbb{C}$$

tali che $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ è olomorfa in $\phi_1(p)$.



▸ **PROPRIETÀ**

1) $id : X \to X$ è olomorfa.

2) $F : X \to Y$ e $G : Y \to Z$ olomorfe $\Rightarrow$ $G \circ F : X \to Z$ olomorfa.

3) $F : X \to Y$ olomorfa e $G : W \to \mathbb{C}$ con $W \subset Y$ olomorfa (mero) allora $G \circ F : F^{-1}(W) \to \mathbb{C}$ è olomorfa (meromorfa).

In particolare $F : X \to Y$ olomorfa induce:

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{O}_Y(W) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(F^{-1}(W)) \\ G &\longmapsto G \circ F \end{aligned}$$

▸ **COROLLARIO**

{Sup di Riemann + mappe olomorfe} sono una categoria.

DEF. Isomorfismo

Una mappa $F: X \to Y$ è ISOMORFISMO (BIOLOMORFISMO) se è una mappa olomorfa, bigettiva e con F^{-1} olomorfa.

Forma Locale Normale

Localmente queste mappe possono essere descritte esplicitamente.

TEOREMA Forma Locale Normale

Sia $F: X \to Y$ olomorfa, $p \in X$ e $q = F(p)$. Allora

$\exists$ carte locali $\varphi_1 : U(p) \longrightarrow \Delta(0,\varepsilon)$

$\varphi_2 : U(q) \longrightarrow \Delta(0,\varepsilon)$

tali che $(\varphi_2 \circ F)(x) = [\varphi_1(x)]^n$. Cioè in un diagramma

$$\begin{array}{ccc} U(p) & \xrightarrow[F]{} & U(q) \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \Delta(0,\varepsilon) & \longrightarrow & \Delta(0,\varepsilon) \\ & z \longmapsto z^n & \end{array}.$$

- **DIM.**

Con una traslazione possiamo supporre $p \overset{\varphi_1}{\mapsto} 0 \in \Delta$ e $q \overset{\varphi_2}{\mapsto} 0 \in \Delta$ tramite le carte locali.

Scegliamo carte $h: U(p) \longrightarrow \Delta(0,\varepsilon)$ con coordinata w.

Allora $g(w) = \varphi_2 \circ F \circ h^{-1} = \sum_{i \geq m} c_i w^i$ poichè è olomorfa.

Possiamo scrivere $g(w) = w^m \cdot s(w)$ con s olomorfa ed $s(0) \neq 0$.

Idea: scegliamo una "$\sqrt[m]{s}$".

Prendiamo ora $R(w)$ tale che $R(w)^m = S(w)$ (questo si può fare perché $s(0) \neq 0$ e si prendono $\sqrt[m]{c_n}$ nella serie).

Allora $g(w) = (w R(w))^m$ e si può fare un cambio di coordinate: $\eta(w) = w R(w) =: z$.

Vale che $\eta(w)$ invertibile poiché $R(0) \neq 0$, per Thm di Inversione Locale si ottiene $\varphi_1 := \eta \circ h$ nuova carta in P, coordinata z.

Si verifica che $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(z) = z^n$ per costruzione. $\blacksquare$

In altre parole, $(\Phi_2 \circ F \circ \Phi_1^{-1})^{-1}(w) = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ n punti distinti. Inoltre la mappa $\Phi_2 \circ F \circ \Phi_1$ ha grado 1 in η_i quindi localmente è $z \mapsto z$. Equivalentemente posso fattorizzare $z^n - w$ come $(z - \eta_i)(p'(z))$ con $p'(\eta_i) \neq 0$.

DEF. $\text{molt}_p(F)$

Sia $F : X \to Y$ olomorfa e localmente in p : $z \mapsto z^n$.

Definiamo allora $\text{molt}_p(F) := n$.

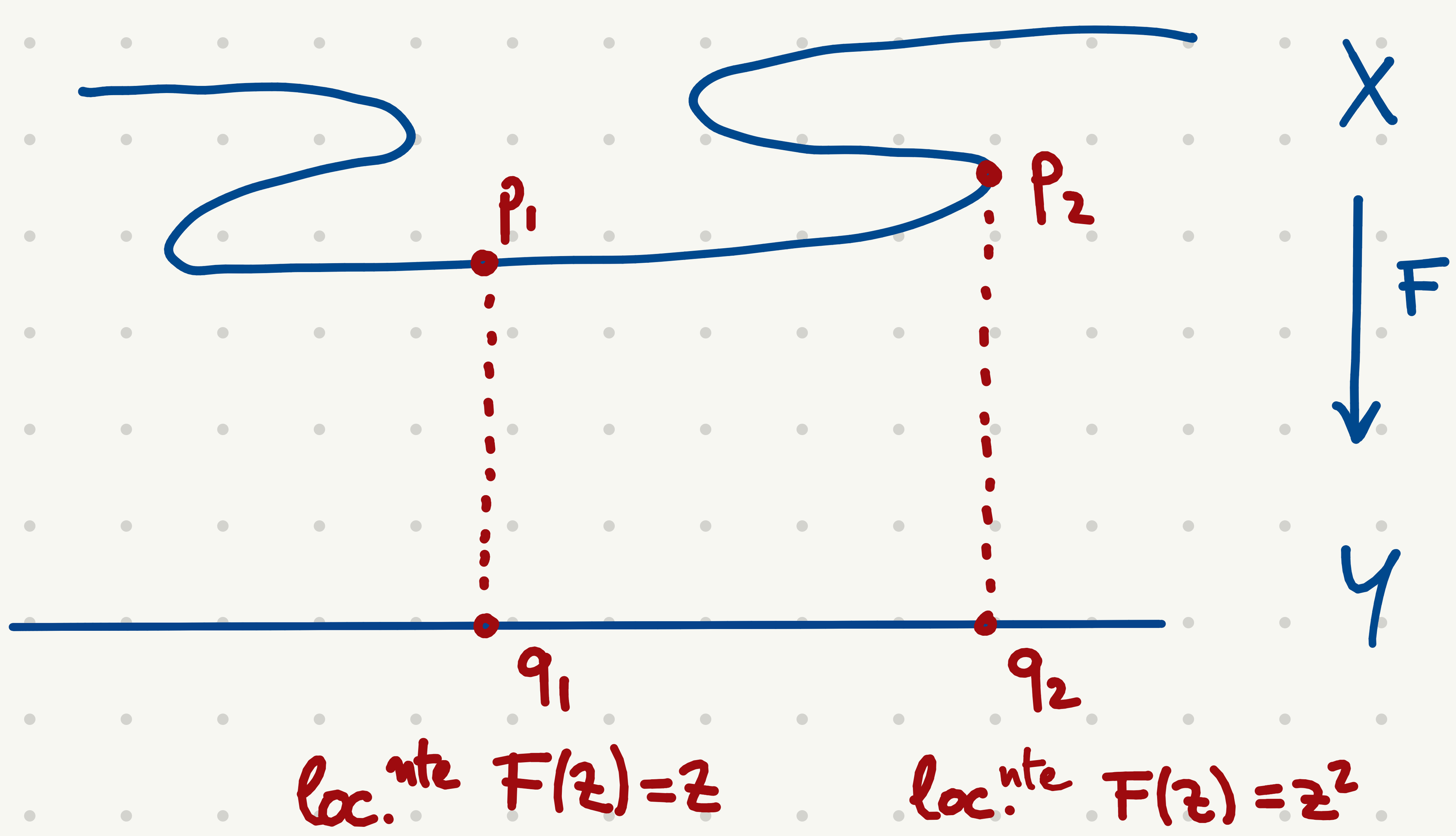
- OSS: vale anche la seguente relazione

$$\text{molt}_p(F) = 1 + \text{ord}_0\left(\frac{d\tilde{f}}{dz}\right)$$

dove $\tilde{f} = \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ è F letta in carte.

Questo vale in realtà per qualsiasi carta φ_1, φ_2 si prenda.

- Interpretazione Grafica



Vediamo ora le conseguenze di questo Teorema appena dimostrato.

▸ CONSEGUENZE

- **PROPOSIZIONE 1**

Sia $F: X \to Y$ olomorfa non costante. Allora F aperta.

- **PROPOSIZIONE 2**

Sia $F: X \to Y$ olomorfa non costante. Allora:

i) $\forall q \in Y$ $\{F^{-1}(q)\}$ non ha punti di accumulazione.

ii) $\{p \in X \mid mult_p(F) > 1\}$ non ha punti di accumulazione.

Questi risultati implicano il prossimo teorema.

▸ TEOREMA

Siano X, Y superfici di Riemann connesse. Sia $F: X \to Y$ olomorfismo non costante:

X compatta $\Rightarrow$ Y compatta ed F surgettiva.

- DIM.

Siccome F olomorfa non costante, per PROP 1 F è aperta.

Quindi $F(X)$ è aperto e compatto (X compatto).

Siccome Y Hausdorff, $F(X)$ è chiuso. Allora per connessione

$F(X) = Y$ e Y compatto. ■

GRADO di una MAPPA

Supponiamo d'ora in poi X, Y compatte e connesse.

▸ **TEOREMA**

Siano X, Y superfici di Riemann compatte e connesse.
Sia $F: X \to Y$ olomorfa non costante, allora

$$\forall y \in Y \quad d_y(F) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{molt}_p(F) \quad \text{è costante su } Y.$$

Ne segue la definizione di...

▸ **DEF. Grado di Mappa**

Il GRADO di $F: X \to Y$ olomorfa non costante è

$$\deg(F) := d_y(F) \quad \text{per qualche } y \in Y.$$

• DIM Teorema

Il teorema si dimostra verificando che

$$\begin{aligned} \deg(F): Y &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ y &\longmapsto d_y(F) \end{aligned} \quad \text{è localmente costante.}$$

Sia $y \in Y$. Supponiamo

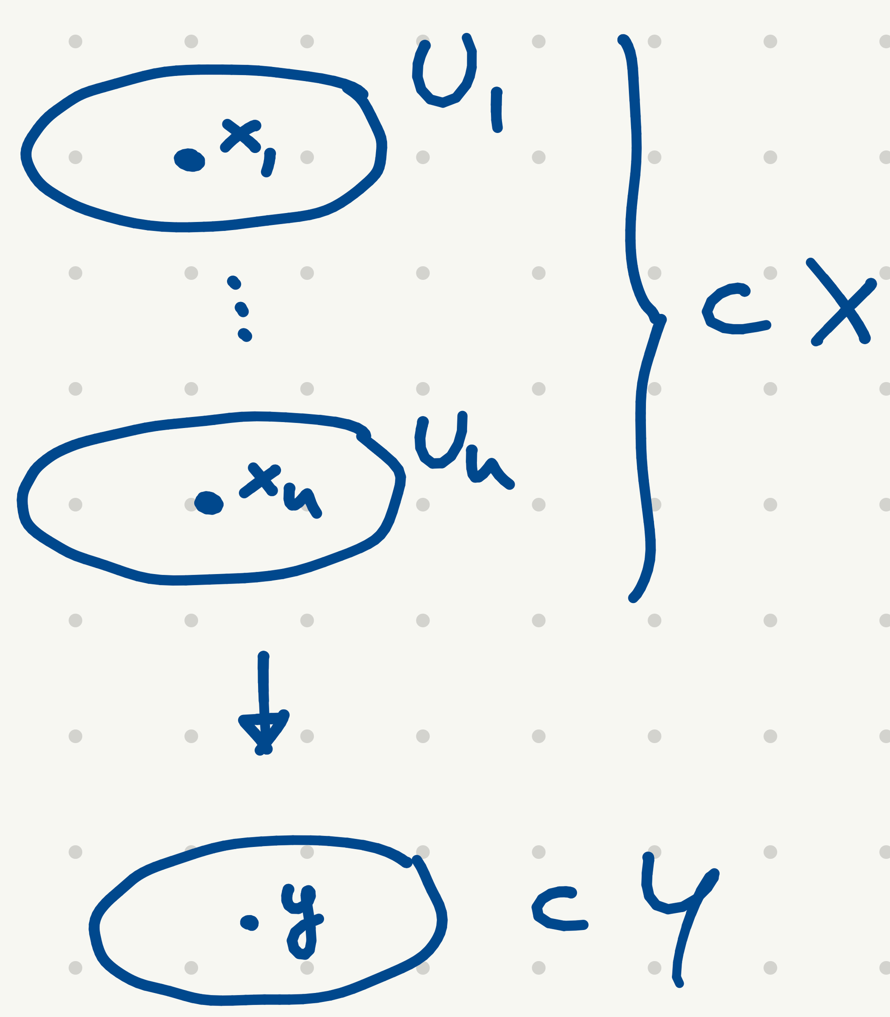
$$F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{con} \quad \text{molt}_{x_j}(F) = m_j.$$

Restringendo eventualmente gli aperti, possiamo supporre che

$\forall j \;\; \exists U_j$ tale che:

$$\begin{cases} F|_{U_j}: z \to z^{m_j} \\ U_j \cap U_i = \emptyset \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

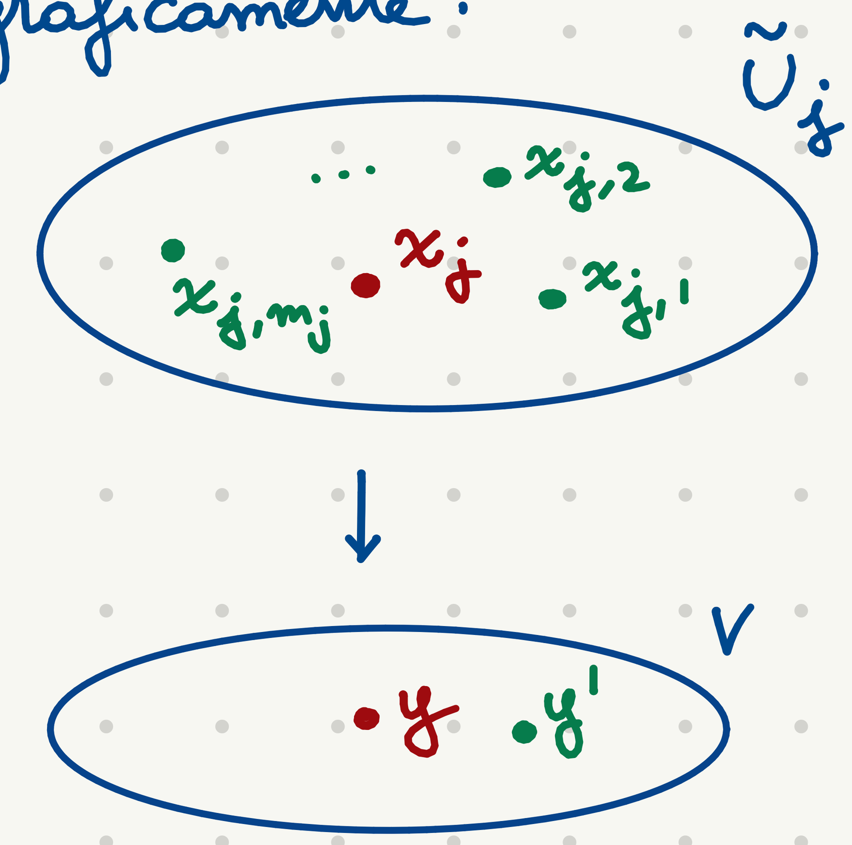
come nel disegno fatto a destra.



Indichiamo $d_y = \sum_j m_j$. È sufficiente mostrare che:

$$\begin{cases} \exists\, V \text{ intorno di } y \\ \exists\, \tilde{U}_j \text{ intorni di } x_j \end{cases} \quad \text{tali che} \quad \forall\, y' \in V \quad F^{-1}(y') \subset \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{U}_j .$$

Graficamente:



Per assurdo, supponiamo $\exists \{P_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ tale che $P_h \notin \bigcup_j U_j$ ma $F(P_h) \longrightarrow y$.

Siccome X compatto $\exists \{P_{h_k}\}$ convergente ad $P_{h_k} \longrightarrow \bar{x}$. Ma F è olomorfa:

$\Rightarrow \quad F(\bar{x}) = y$

$\Rightarrow \quad \bar{x} = x_j$ per qualche j, contraddicendo $P_h \notin \bigcup_j U_j$. ∎

Questo conclude perchè nei
$\tilde{U}, V$ potremmo applicare
la forma normale,
date le molteplicità fissate in x_i.

Formula di Riemann - Hurwitz

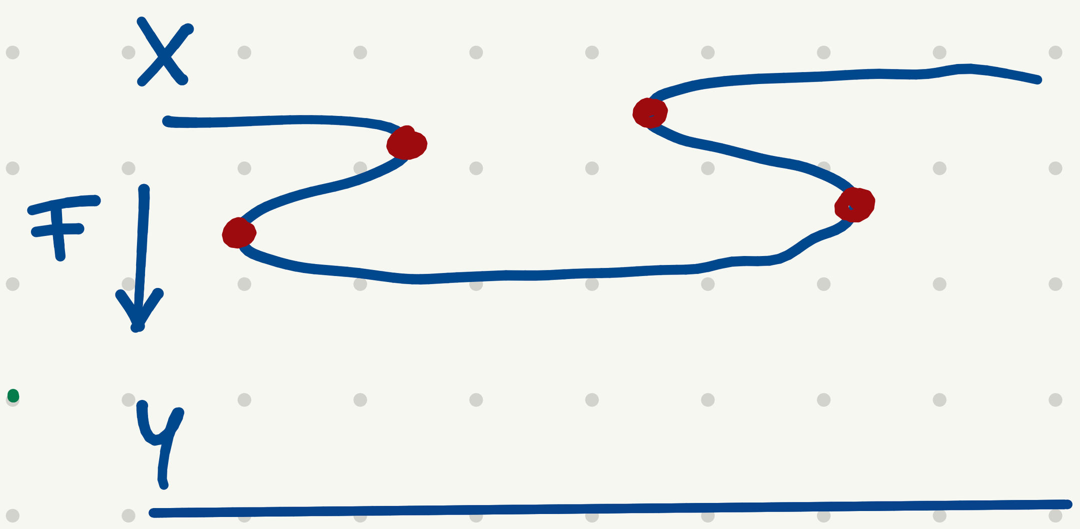
Sia $F: X \to Y$ con X, Y superfici di Riemann compatte connesse.

- **DEF.** Indice di Ramificazione

  L' INDICE di RAMIFICAZIONE di F in p è $\mathrm{mult}_p(F) - 1$, cioè se localmente $z \to z^n$ allora l'indice di ramificazione sarà $n-1$.

- **ESEMPIO**

  Data la rappresentazione a destra, in rosso sono indicati i punti di ramificazione >0.



Sia $p \in X$ punto di RAMIFICAZIONE di F (Ramification point), allora $f(p)$ è punto di DIRAMAZIONE (Branch point).

PREAMBOLO Caratteristica di Eulero-Poincaré Topologica

- **DEF.** Caratteristica Eulero-Poincaré Topologica

  Si definisce $\chi_{TOP}(X) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i b_i(X)$ dove abbiamo che $b_i(X) = \dim H_i(X, \mathbb{R}) = \mathrm{rk}\, H_i(X, \mathbb{Z})$ ed X connesso.

Specializziamoci nel nostro caso.

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa. Allora:

$$b_0(X) = 1 \qquad b_1(X) = 1$$

$$b_2(X) = 2g \qquad b_j(X) = 0 \quad j > 2$$

in quanto, se vogliamo, $H_2(X, \mathbb{Z}) = (\pi_1(X))_{ab}$.

Segue che

$$\chi_{TOP}(X) = 2 - 2g.$$

▸ FATTI

1) Sia X sup di Riemann compatta e connessa. Allora esiste una TRIANGOLAZIONE di X, cioè:

$\exists$ collezione di omeomorfismi $\{T_i, t_i\}$ dove in particolare

$$T_i = \triangle \xrightarrow{\text{omeo}} t_i(T_i) \subset X$$

tale che verifica:

a) $\{\tau_i := t_i(T_i)\}$ ricopre X

b) $\forall i \neq j$ si ottiene $\tau_i \cap \tau_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{vertice comune} \\ \text{lato comune} \end{cases}$.

2) THM Eulero

Posto $V = \#$vertici, $L = \#$lati ed $F = \#$facce si trova che

$$\chi_{TOP}(X) = V - L + F.$$

Da questo preambolo, possiamo calcolare il GENERE a partire da triangolazioni di X sup di Riemann.

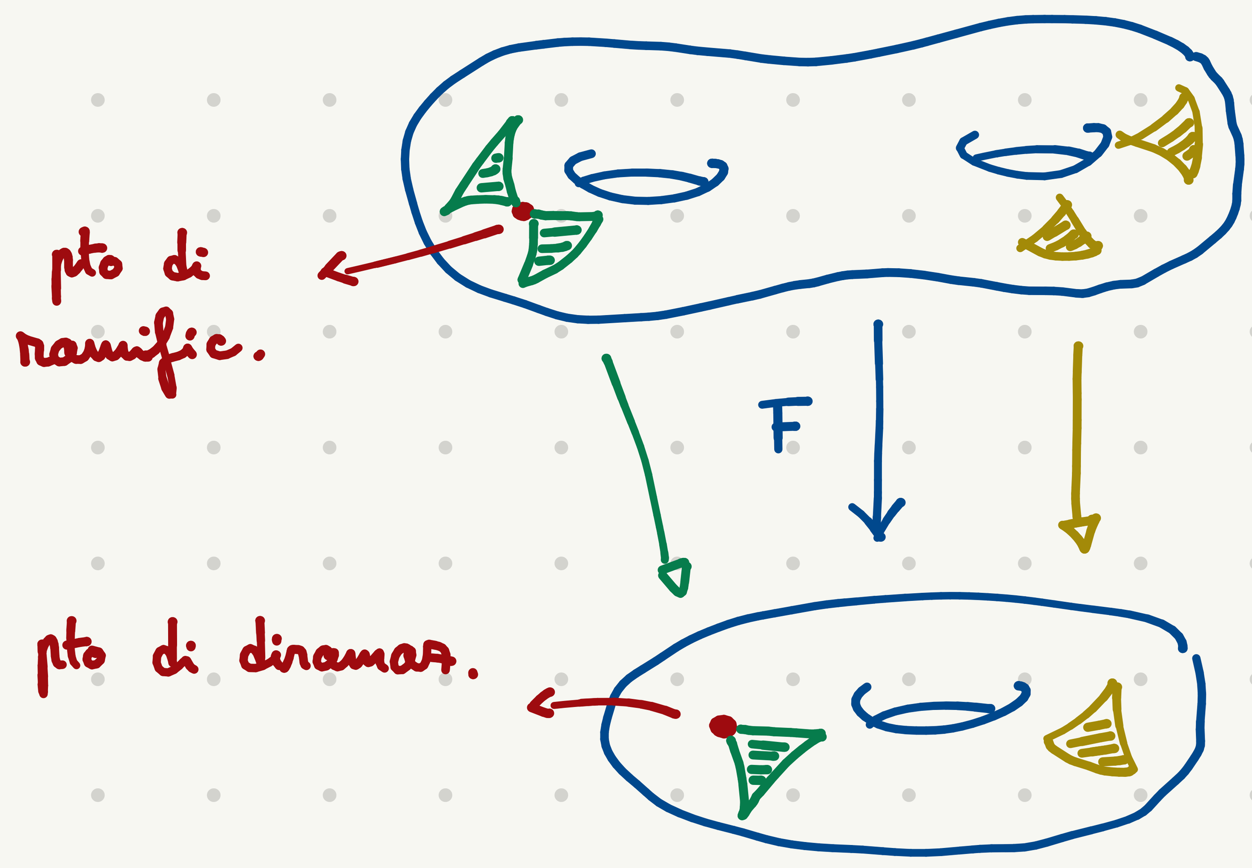
▸ TEOREMA Formula di Hurwitz

Siano X, Y superfici di Riemann connesse compatte di genere rispettivamente $g(X)$ e $g(Y)$. Sia $F: X \to Y$ olomorfa non costante. Allora:

$$2g(X) - 2 = \deg(F) \cdot [2g(Y) - 2] + \sum_{p \in X} \overbrace{(\operatorname{molt}_p F - 1)}^{\text{indice di ramificazione}}.$$

• DIM.

Per dimostrare questa formula vogliamo passare da una triangolazione. A destra abbiamo un esempio di ciò che accadrà.



Poiché $\{\text{pti ramificazione}\} \subseteq X$ è un insieme finito, anche l'insieme $\{\text{pti diramazione}\} \subseteq Y$ è finito.

Consideriamo allora una triangolazione $\mathcal{T}$ di Y tale che

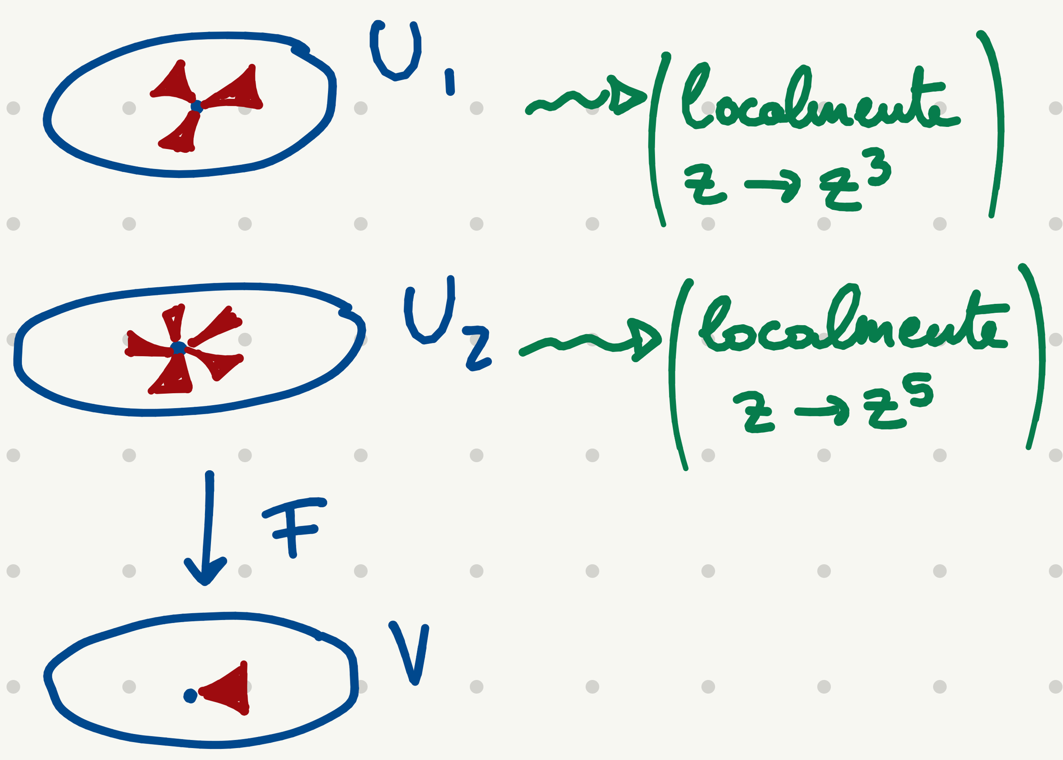
$$\{\text{pti di diramazione}\} \subseteq \{\text{vertici di } \mathcal{T}\}.$$

Raffinando eventualmente $\mathcal{T}$ possiamo supporre che $\forall\, y$ punto di diramazione $\exists$ intorno V di y, $\exists$ intorni U_j di $x_j \in F^{-1}(y)$ tali che: "$\forall\, T \in \mathcal{T}$ triangolo tali che $y =$ vertice di T allora

$$\text{anche } T \subset V \quad \& \quad F^{-1}(T) = \bigcup_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,m_j}} T_{i,j} \quad \text{dove } T_{ij} \subseteq U_j \text{"}$$

dove localmente in $x_j \in F^{-1}(y)$ si ha $F: U_j \to V$, $z \mapsto z^{m_j}$.

Graficamente:



Si ottiene così che $F^{-1}(\mathcal{T}) = \tilde{\mathcal{T}}$ è una TRIANGOLAZIONE di X.

Resta da calcolare: sia $d = \deg F$ e definiamo

$v = \#\text{vertici } \mathcal{T}$, $\quad \ell = \#\text{lati } \mathcal{T}$, $\quad f = \#\text{facce di } \mathcal{T}$,

$v' = \#\text{vertici } \tilde{\mathcal{T}}$, $\quad \ell' = \#\text{lati } \tilde{\mathcal{T}}$, $\quad f' = \#\text{facce di } \tilde{\mathcal{T}}$.

Allora fuori dai pti di diramazione abbiamo una mappa di grado d per cui: $\quad \ell' = d \cdot \ell \quad$ ed $\quad f' = d \cdot f$.

Tenendo invece conto delle diramazioni:

$$v' = \sum_{\substack{q \text{ vertice} \\ \text{di } \tau}} \left[\deg(F) - \sum_{p \in F^{-1}(q)} (\mathrm{molt}_p(F) - 1) \right]$$

$$= dv - \sum_{p \in X} (\mathrm{molt}_p(F) - 1).$$

In conclusione:

$$\begin{cases} -\chi_{TOP}(Y) = 2g(Y) - 2 = -v + \ell - f \\ -\chi_{TOP}(X) = 2g(X) - 2 = -v' + \ell' - f' \end{cases}$$

$$= d(-v + \ell - f) + \sum_{p \in X} (\mathrm{molt}_p(F) - 1)$$

cioè

$$2g(X) - 2 = \deg(F) \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\mathrm{molt}_p(F) - 1). \quad \blacksquare$$

OSSERVAZIONI

1) Poniamo $R := \sum_{p \in X} (\mathrm{molt}_p(F) - 1)$ indice di ramificazione totale.

Allora la formula implica che:

$$g(X) = \deg(F)(g(Y) - 1) + 1 + \frac{1}{2} R$$

da cui segue che R è PARI.

2) Sia $f: X \to Y$ olomorfa ed X, Y compatte connesse. Allora la formula implica che $g(X) \geq g(Y)$.

ESEMPIO

Sia $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ indotta da un polinomio di grado d.

Presi $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ con coordinate $z = \frac{z_1}{z_0}$. Allora $p(z)$ ha grado d.

Otteniamo $f|_{U_0}: (1, z) \longmapsto (1, p(z)) = \left(1, p\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right)$ che induce omogeneizzando:

$$f: (z_0, z_1) \longmapsto (p_0(z_0,z_1), p_1(z_0,z_1)).$$

Vediamo i <u>pti di ramificazione</u>:

$f|_{U_0} = p(z) \rightsquigarrow$ punti di ramificazione sono gli zeri di $p'(z)$.

Invece in $P = \infty$ usiamo la coordinata $w = \frac{z_0}{z_1}$ ottenendo quindi

$f(w) = f\left(\frac{1}{z}\right) \rightsquigarrow$ localmente $w \mapsto w^d$ da cui segue che $\text{molt}_\infty(f) = d - 1$.

> Es: sia $p(z) = z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \ldots = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^d + a_{d-1}\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{d-1} + \ldots$ da cui segue che $f(z_0,z_1) = \left(1, \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^d + a_{d-1}\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{d-1} + \ldots\right)$
>
> $= (z_0^d, z_1^d + a_{d-1} z_0 z_1^{d-1} + \ldots)$
>
> (localmente per $w = \frac{z_0}{z_1}$) $= \left(\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d, 1 + \ldots\right)$ cioè $w \mapsto w^d$ localmente.

Otteniamo che $\chi_{TOP}(\mathbb{P}^1) = 2$, $\deg(f) = 2$ ed $R = 2(d-1)$, come ci si aspettava dal conteggio delle ramificazioni fatto sopra.

▸ <u>APPLICAZIONE</u> Genere di una curva piana

Sia $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ curva piana liscia di grado d:

$$X = \{ g(z_0, z_1, z_2) = 0 \} \quad \text{con } \deg g = d.$$

Scegliamo (a meno di cambio coordinate):

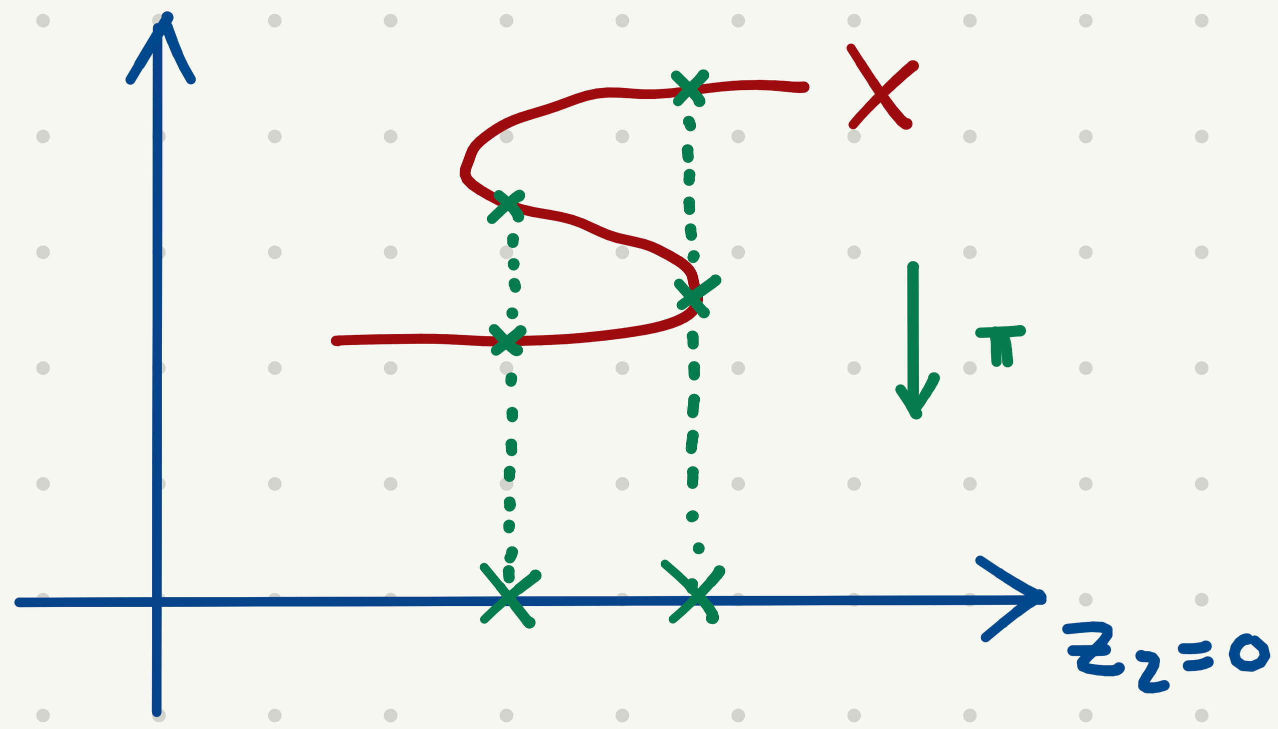
i) $P_0 = (0:0:1) \notin X$ sia il pto all'infinito.

ii) retta $r = \{z_0 = 0\}$ non tangente ad X.

Consideriamo allora la proiezione $\pi_{P_0}: X \longrightarrow \mathbb{P}^1 = \{z_2 = 0\}$.

Vista in carta affine U_0 con coordinate $z = \frac{z_1}{z_0}$ e $w = \frac{z_2}{z_0}$, la proiezione e' data da

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (z,w) &\longmapsto z \end{aligned}.$$



Per costruzione, i punti di ramificazione sono quelli con "tangente verticale" ovvero i punti nei quali:

$$\begin{cases} g = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z_2} = 0 \end{cases}.$$

THM Bezóut in $\mathbb{P}^2$

Sia $\mathcal{C}$ irriducibile di grado d e $\mathcal{D}$ una curva di grado d'. Allora
$|\mathcal{C} \cap \mathcal{D}| = d \cdot d'$ (con molteplicità).

Per il Teorema di Bezóut si ha che $R = d(d-1)$ e inoltre ricordiamo $\pi|_X$ ha grado $d = \deg g$.

Applicando la formula di Hurwitz si ottiene che

$$2g(X) - 2 = \deg(\pi)\left(2g(\mathbb{P}^1) - 2\right) + R = d(-2) + d(d-1)$$

quindi in conclusione $g(X) = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$. $\longmapsto$ Sarà il genere algebrico di X.

TEOREMA

Sia X superficie di Riemann compatta connessa

$$\left\{ \begin{array}{l} f : X \to \mathbb{C} \\ \text{meromorfa} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} F : X \to \mathbb{P}^1 \\ \text{olomorfa e non} \equiv \infty \end{array} \right\}.$$

DIM.

Identifichiamo $\mathbb{C}$ con $U_0 = \{z_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^1$ ed equivalentemente vediamo $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Idea: se P polo per f pongo $F(P) = \infty$.

Sia $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfa. Allora f è olomorfa fuori dai poli $\{y_1, \dots, y_k\}$. Poniamo quindi:

$$F(x) = (1 : f(x)) \in U_0 \qquad \forall\, x \neq y_1, \dots, y_k.$$

In y_j abbiamo che f meromorfa $\Rightarrow$ localmente scriviamo

$$f = f(z) = \frac{\Phi(z)}{z^n} \quad (\text{traslato } y_j \text{ in } 0) \text{ con } \Phi \text{ olomorfa}, \Phi(0) \neq 0.$$

Usiamo una caratterizzazione delle funzioni olomorfe: [NOTAZIONE $\tilde{z} = \frac{z_1}{z_0}$ su U_0]

"$\forall\, h : U_\infty \to \mathbb{C}$ olomorfa $h \circ F$ olomorfa in y_j" $\iff$ "$F(y_j) = \infty$, F olomorfa in y_j"

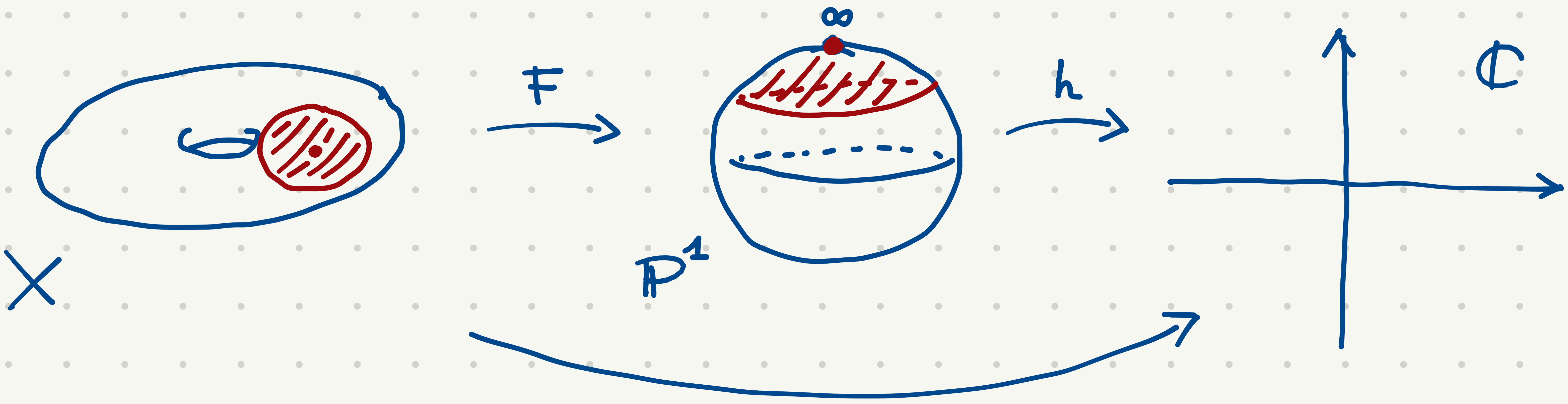
dove $\infty = (0:1)$ ed $U_\infty \subseteq U_1 \cong \mathbb{C}$ intorno di $(0:1)$.

Così: "h olomorfa in U_∞" $\iff$ "la mappa $\begin{cases} h\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) & z \neq 0 \\ h(\infty) \end{cases}$ olomorfa."

e quindi intorno ad y_j:

$$h \circ F = h\left(\frac{z^n}{\Phi(z)}\right) \quad \text{olomorfa in } y_j.$$

Schematicamente:



$h \circ F : X \to \mathbb{C}$ localmente olomorfa in y_j

Viceversa: sia $F : X \to \mathbb{P}^1$ olomorfa.

Poniamo allora $U := F^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) = F^{-1}(U_0)$.

Allora $F|_U : U \to \mathbb{C} \cong U_0$ olomorfa per costruzione.

Posto $\{y_1, \dots, y_k\} = F^{-1}(\infty) = F^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus U_0)$, vogliamo che questo sia l'insieme dei poli, quindi:

$$f|_U \equiv F|_U \quad \text{estesa ad } f \text{ meromorfa in } y_j.$$

Quindi in $U_1 = \{z_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1$ consideriamo le coordinate $\tilde{w} = \frac{z_0}{z_1}$. Localmente in y_j:

$$F(z) = \left(f_0(z) : f_1(z) \right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} f_1(y_j) \neq 0 \\ f_0(y_j) = 0 \end{cases}.$$

Siccome F olomorfa, $f_0(z) = z^m + o(z^m) = \sum_{j \geq m} c_j z^j$ in un intorno $U(y_j)$ con coordinate z.

Poniamo $f(z) = \left(1 : \frac{f_1}{f_0} \right) \in U_0$ così facendo

$$\begin{aligned} f : U(y_j) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{f_1}{f_0} \end{aligned} \quad \text{è meromorfa e } f|_{U(y_j) \setminus \{y_j\}} \equiv F|_{U(y_j) \setminus \{y_j\}}.$$

Segue la tesi. ∎

Corollario

Sia X compatta connessa ed $f: X \to \mathbb{C}$ meromorfa.
Allora $\sum_{p \in X} ord_p(f) = 0$.

- DIM.

Abbiamo: $ord_p(f) \neq 0 \iff p$ zero/polo per f.

Siano $\{x_i\} \equiv$ insieme zeri e $\{y_j\} \equiv$ insieme poli.

Per il Teorema f corrisponde con $F: X \to \mathbb{P}^1$ olomorfa e sia $d = \deg(F)$. Quindi:

$$\begin{cases} d = \sum_i molt_{x_i}(F) = \sum_i ord_{x_i}(f_i) \\ d = \sum_j molt_{y_j}(F) = -\sum_j ord_{y_j}(f) \end{cases}$$

Grado calcolato in $0 \in \mathbb{P}^1$

Grado calcolato in $\infty \in \mathbb{P}^1$

$\Rightarrow$ Tesi. ∎

AUTOMORFISMI

DEF. Automorfismo

Sia X superficie di Riemann. Allora $F: X \to X$ automorfismo se F bigettiva olomorfa con F^{-1} olomorfa.

Sulle superfici di Riemann di genere 0

Abbiamo visto: "X superficie di Riemann compatta connessa di genere $g=0$ così che $X \overset{\text{omeo}}{\sim} S^2 \cong \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$."

Vedremo: tale struttura è unica.

Sia $F: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ automorfismo, segue che $\deg(F) = 1$.

Quindi usando la caratterizzazione vista prima: $\rightsquigarrow$ THM $f: X \to \mathbb{C}$ mero. $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $F: X \to \mathbb{P}^1$ olom.

$$F(z_0 : z_1) = (az_1 + bz_0,\ cz_1 + dz_0)$$

cioè polinomi omogenei di grado 1, che non si devono annullare simultaneamente (x buona def di automorfismo).

Quindi $-\frac{b}{a} \neq -\frac{d}{c}$. In coordinate affini U_0 con $z = \frac{z_1}{z_0}$:

$$f|_{U_0}: U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{cz+d}{az+b}.$$

Oss: $PGL(2;\mathbb{C}) := GL(2;\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$

L'azione di $PGL(2;\mathbb{C})$ su $\mathbb{P}^1$ è data da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_0 \\ cz_1 + dz_0 \end{pmatrix}$

quindi $PGL(2;\mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

► Sulle superfici di Riemann di genere 1

Abbiamo visto: "X superficie di genere $1 \Rightarrow X \overset{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{C}/_{\Lambda}$ dove Λ reticolo, $\Lambda = \{ n_1 w_1 + n_2 w_2 \mid n_i \in \mathbb{Z}, w_1, w_2 \in \mathbb{C} \}$."

↗ per definizione!

Studiamo le mappe olomorfe tra superfici di Riemann, di genere 1.

► TEOREMA

Siano $X = \mathbb{C}/_{\Lambda}$ ed $Y = \mathbb{C}/_{\Gamma}$ con Λ, Γ reticoli. Sia inoltre $F : X \to Y$ olomorfa non costante. Allora:

i) F è indotta da
$$G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \gamma z + a$$
con $\gamma, a \in \mathbb{C}$ e insiemisticamente $G(\Lambda) \subseteq \Gamma$. Con una traslazione possiamo supporre $G(0) = 0$, allora $F : X \to Y$ omeomorfismo di gruppi additivi, dove X, Y hanno struttura di gruppo indotta da $\mathbb{C}$.

ii) F è isomorfismo $\iff \gamma \cdot \Lambda = \Gamma$.

NB: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/_{\Lambda}$ induce la topologia di quoziente e la struttura di somma dal quoziente.

Se $a = 0$ allora $G|_{\Lambda} : \Lambda \to \Gamma$ è un omorfismo di gruppi additivi.

• DIM.

Sia $F : X \to Y$ e consideriamo la mappa indotta sul rivestimento universale (in modo topologico). Abbiamo:

[π_1, π_2 biolom. loc. $\Rightarrow$ G olomorfa]

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_2"] \\ X \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

con $g(X) = g(Y) = 1$.

Per la formula di Riemann-Hurewitz non ci sono punti di ramificazione, cioè F è un rivestimento topologico non ramificato.

A meno di traslazioni, sia $G(0) = 0$. Insiemisticamente:

$$f(X) = Y \iff G(\Lambda) \subseteq \Gamma$$

ovvero: $G(z+\ell) = G(z) \mod \Gamma \quad \forall \ell \in \Lambda$

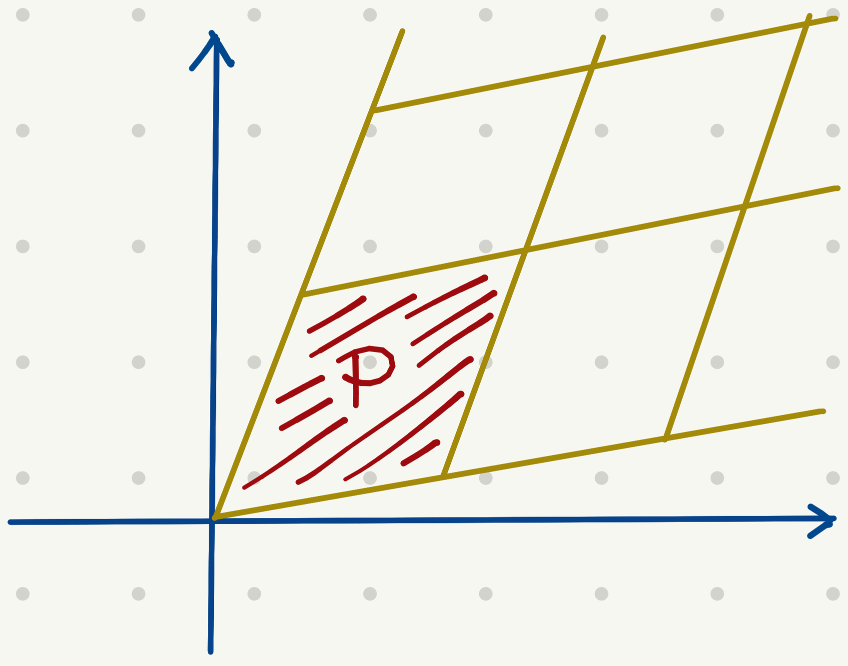
Definiamo $\omega(z,\ell) := G(z+\ell) - G(z) \in \Gamma$ e l'idea è usare il fatto che Λ, Γ discreti.

Fissato $\ell \in \Lambda$, $\omega(z,\ell)$ localmente costante in z. Quindi la derivata in z è $\equiv 0$. Ciò implica:

$\Rightarrow G'(z+\ell) = G'(z) \quad \forall \ell \in \Lambda$ fissato.

$\Rightarrow G'$ invariante rispetto a Λ.

Graficamente:



G' è olomorfa su $\mathbb{C}$ ed in particolare G' determinata da $G'|_P$ dove P "parallelogramma fondamentale" definito $P = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \mid 0 \le \lambda_i \le 1\}$.

Ma P compatto quindi $G'|_P$ costante.

In conclusione $G(z) = \gamma \cdot z + a$ (con $a = 0$ se $0 \mapsto 0$).

Inoltre $\deg(F) = \left| \Gamma / \gamma \cdot \Lambda \right|$ cioè indice di $\gamma\Lambda$ in Γ. $\blacksquare$

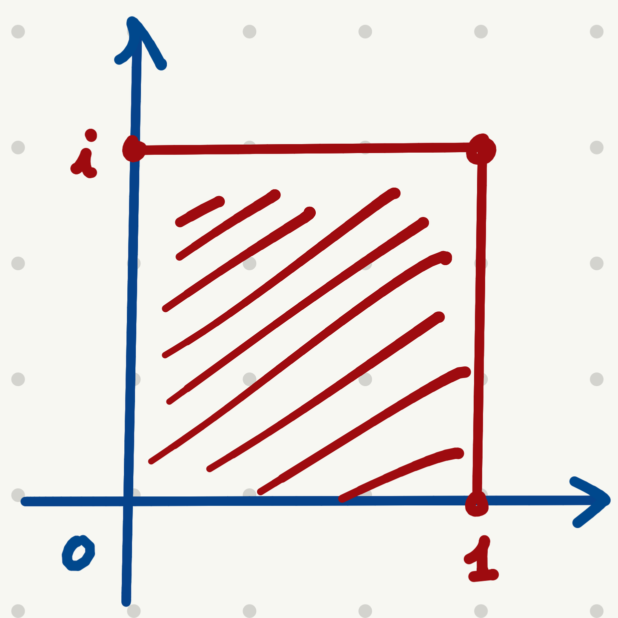
Si possono allora descrivere gli automorfismi...

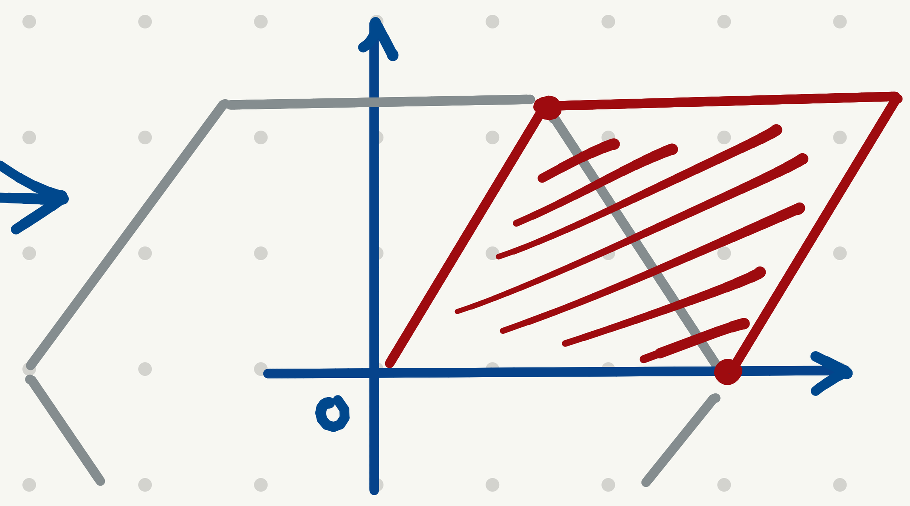
TEOREMA

Sia $X = \mathbb{C}/\Lambda$ ed $f: X \to X$ automorfismo tale che $0 \mapsto 0$ ed f indotta da $G: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $G(z) = \gamma \cdot z$.

Allora vale una delle seguenti:

- $\gamma = \pm 1$.
- Λ reticolo quadrato e $\gamma = \sqrt[4]{i}$.
- Λ reticolo esagonale e $\gamma = \sqrt[6]{i}$.





[Dimostrazione sotto]

Consideriamo $X = \mathbb{C}/\Lambda$ e $Y = \mathbb{C}/\Gamma$ ed una mappa $F: X \to Y$ indotta al quoziente da $G: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \gamma z + \delta$.

OSS.

Le superfici di Riemann X e Y hanno struttura di gruppo additivo. Se $\delta = 0$ allora $F: X \to Y$ è tale che $0 \overset{F}{\mapsto} 0$ e quindi e' un omomorfismo di gruppi.

In particolare F isomorfismo $\iff$ $\gamma\Lambda = \Gamma$.

Corollario 1

Sia X superficie di Riemann di genere 1. Allora $X \cong \mathbb{C}/\Lambda$ dove $\Lambda = \{1, \tau\}_{\mathbb{Z}}$ con $\tau \in \mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

DIM.

Sia $X = \mathbb{C}/\Lambda'$ con $\Lambda' = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$. Allora posto $\gamma = w_1^{-1}$

si ottiene un isomorfismo tale che:

$$\omega_1 \longmapsto 1$$

$$\omega_2 \longmapsto \frac{\omega_2}{\omega_1} = \begin{cases} =: \tau & \text{se } \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{H} \\ =: -\tau & \text{se } \omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{H}. \end{cases}$$

■

Corollario 2

Dati $X = \mathbb{C}/_\Lambda$ e $Y = \mathbb{C}/_{\Lambda'}$ con $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle_\mathbb{Z}$ e con $\Lambda' = \langle 1, \tau' \rangle_\mathbb{Z}$ allora:

$$X \cong Y \iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \text{ tale che } \tau = \frac{a+b\tau'}{c+d\tau'}.$$

- DIM.

Sia $\gamma \in \mathbb{C}$ tale che $\gamma \cdot \Lambda = \Lambda'$. Ciò significa che $\langle \gamma, \gamma \cdot \tau \rangle_\mathbb{Z} = \Lambda'$, ovvero che esistono $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\gamma = c + d\tau' \quad \text{e} \quad \gamma\tau = a + b\tau'$$

ovvero equivalentemente deve valere $\tau = \dfrac{a+b\tau'}{c+d\tau'}$.

Osserviamo che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertibile perchè manda generatori in generatori. Di più, vale che $\det = 1$.

L'altra implicazione segue ripercorrendo il ragionamento. ■

PROPOSIZIONE Automorfismi

Sia $X = \mathbb{C}/_\Lambda$ ed $F : X \to X$ automorfismo (con $0 \mapsto 0$).

Allora vale una delle seguenti:

a) $\gamma = \pm 1$.

b) $\Lambda = \langle 1, i \rangle_\mathbb{Z}$ e $\gamma = \sqrt[4]{1}$.

c) $\Lambda = \langle 1, e^{i\frac{\pi}{3}} \rangle_\mathbb{Z}$ e $\gamma = \sqrt[6]{1}$.

• DIM.

(Se così non fosse $\nexists\, \ell' \in \Lambda$ t.c. $F(\ell') = \ell$ $\leadsto$ F automorfismo significa $F(\Lambda) = \Lambda$.)

I casi $\gamma = \pm 1$ esistono sempre, sono gli unici per $\gamma \in \mathbb{R}$.

Sia $\gamma \notin \mathbb{R}$ tale che $\gamma \cdot \Lambda = \Lambda$. Consideriamo $\ell \in \Lambda$ di modulo minimo. Allora $\gamma \ell \in \Lambda$ ha anch'esso modulo minimo poiché F è automorfismo. Segue che $|\gamma| = 1$.

Siccome entrambi hanno modulo minimo, $\langle \ell, \gamma \cdot \ell \rangle_{\mathbb{Z}} = \Lambda$.

Segue che $\gamma(\gamma \ell) \in \Lambda$ e quindi $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\gamma^2 \ell = m \gamma \ell + n \ell$$

ovvero γ è radice di $z^2 - mz - n$. Siccome $|\gamma| = 1$ segue che γ e $\bar{\gamma}$ entrambe radici e allora:

$$\pm n = \gamma \bar{\gamma} = |\gamma| = 1 .$$?

Nel caso specifico:

- $\underline{m = 0}$: allora γ radice di $z^2 \pm 1$. Segue $\gamma = \sqrt[4]{1}$.
- $\underline{m \neq 0}$: allora $\pm m = 2 \operatorname{Re}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ cioè $m = 1$, $\operatorname{Re}(\gamma) = \pm \frac{1}{2}$.

  Segue $\gamma = \sqrt[6]{1}$.

Si trovano così tutti i possibili casi. ∎

▶ Sulle superfici di Riemann di genere ≥ 2 (libro: Miranda)

• Azione di un gruppo finito G su X

Definiamo l'azione di $(G, *)$ su X come $\rho: G \times X \to X$, $(g, x) \longmapsto g(x)$

tale che:

- $id(x) = x \quad \forall\, x \in X$.
- $(g * h)(x) = g(h(x)) \quad \forall\, g, h \in G \quad \forall\, x \in X$.

Supponiamo inoltre che:

→ l'azione sia EFFETTIVA ossia che valga:

$$\ker(\rho) := \{ g \in G \mid g(x) = x \ \forall x \in X \} = \{ id \}.$$

→ l'azione sia OLOMORFA ovvero $\forall g \in G$:

$$x \longmapsto g(x) \text{ è una mappa olomorfa.}$$

▸ **DEF. Stabilizzatore**

Dato $p \in X$, lo STABILIZZATORE di p in G è:

$$G_p := \{ g \in G \mid g(p) = p \}.$$

Vediamo alcuni fatti di base.

▸ **FATTI**

1) Lo stabilizzatore G_p è ciclico.
2) L'insieme $\{ p \in X \mid G_p \neq \{id\} \}$ è discreto.
3) Per ogni $p \in X$ $\exists\, U = U(p)$ intorno aperto tale che:
   i) $g(v) \in U \quad \forall v \in U \ \forall g \in G_p$.
   ii) $U \cap g(U) = \emptyset \quad \forall g \notin G_p$.
   iii) p è l'unico punto fisso di G_p in U.
   iv) esiste un omeomorfismo locale $U/G_p \simeq X/G$ in un intorno di p.

• DIM. (Idea)

Per ogni $g \in G_p$ scelgo una coordinata locale z tale che

$$\begin{cases} 0 \longmapsto 0 \\ z \longmapsto g(z) = \sum_{i \geq 1} a_i z^i \quad \text{con } a_1 \neq 0. \end{cases}$$

(lots of handwaving!)

$\square$

Dai fatti sopra citati segue il prossimo risultato che dà una struttura topologica al quoziente X/G.

TEOREMA

Sia X superficie di Riemann compatta e G gruppo finito con azione effettiva e olomorfa su X. Allora X/G ha una struttura di Riemann indotta ed esiste $\pi : X \longrightarrow X/G$ tale che

$$\pi \text{ olomorfa}, \quad \deg \pi = |G| \quad e \quad molt_p(\pi) = |G_p|.$$

N.B: vale la formula delle classi ovvero:

$$|G_p| \cdot \underbrace{(\# G(p))}_{\text{cardinalità dell'orbita}} = |G|$$

• DIM.

La struttura complessa di X/G è data localmente dall'omeomorfismo locale $U/G_p \cong X/G$. ∎

Osserviamo che posto $Stab(X) := \{x \in X \mid G_x \neq \{id\}\}$, se $x \notin Stab(X)$ allora localmente $X/G \cong U(x)$ è omeomorfismo.

Studiamo cosa accade per $x \in Stab(X)$.

LEMMA

Sia $\pi : X \longrightarrow X/G =: Y$ e sia $x_i \in X$ punto tale che $G_{x_i} \neq \{id\}$.

Poniamo $y = \pi(x_i)$ e $\pi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_s\}$.

Allora $\forall x_i \in \pi^{-1}(y)$: $\quad molt_{x_i}(\pi) = \dfrac{|G|}{s} = |G_{x_i}|$.

• DIM Lemma

Notiamo che $\pi(x_i) = y \ \forall i = 1, \dots, s$ e poniamo $molt_{x_i}(\pi) = z_i$.

Ma gli stabilizzatori G_{x_i} sono coniugati tramite l'azione di monodromia del rivestimento. Siccome localmente π è rivestimento topologico, segue che $|G_{x_i}| = |G_{x_j}| \ \forall i,j$.

Quindi $|G| = \deg(\pi) = s \cdot \text{molt}_{x_i}(\pi) = s \cdot |G_{x_i}|$. ■

Chiamiamo d'ora in poi:

→ PUNTI di RAMIFICAZIONE $\{x \in X \mid G_x \neq \{id\}\} \subset X$.

→ PUNTI di DIRAMAZIONE $\{y = \pi(x) \mid G_x \neq \{id\}\} \subset Y$.

In questo modo, se $\{y_1, \dots, y_k\} \subset Y$ è LUOGO di DIRAMAZIONE, si ha che $\{x_{1,1}, \dots, x_{1,h_1}, x_{2,1}, \dots\}$ è LUOGO di RAMIFICAZIONE.

Poniamo $r_i := \text{molt}_{x_{i,j}}(\pi) = |G_{x_{i,j}}|$. Per Formula di Hurwitz:

$$2g(X) - 2 = |G| \left(2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)\right)$$

dato che $\deg(\pi) = G$, $\text{molt}_p(\pi) = |G_p|$ e $\#\{\pi^{-1}(y_i)\} = \frac{|G|}{r_i}$.

Si ottiene il prossimo Teorema.

TEOREMA (Hurwitz)

Sia X superficie di Riemann compatta di genere $g \geq 2$. Sia G gruppo finito che agisce su X in modo effettivo ed olomorfo. Allora $|G| \leq 84 \cdot (g-1)$.

DIM.

Sia $Y = X/G$ superficie quoziente e consideriamo:

$$2g(X) - 2 = |G|\left(2g(Y) - 2 + \overline{R}\right) \quad \text{dove} \quad \overline{R} = \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$$

nelle ipotesi sopra.

Lavoriamo per casi sapendo che $g(X) \geq 2$, $g(Y) \geq 0$ ed $\overline{R} \geq 0$.

- **Caso 1: $g(Y) \geq 1$**

Se $\bar{R} = 0$ allora non c'è ramificazione: $g(Y) \geq 2$ e allora si ottiene che $|G| \leq g(X) - 1$.

Se $\bar{R} > 0$ allora $\bar{R} \geq 1/2$ quindi in particolare

$$2g(Y) - 2 + \bar{R} \geq 1/2$$

da cui segue che $|G| \leq 2(2g(X) - 2)$.

- **Caso 2: $g(Y) = 0$**

La formula si riscrive come $2g(X) - 2 = |G|(\bar{R} - 2)$.

Il Teorema segue in questo caso dal prossimo lemma, che implica $\bar{R} \geq 2 + \frac{1}{42}$. ∎

► **LEMMA** (Esercizio)

Sia $\bar{R} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$. Allora:

(a) $\bar{R} < 2 \iff k = 1 \vee k = 2 \vee \left(k = 3 \text{ con } \{r_i\} = \begin{cases}\{2,2,*\}\\\{2,3,3\}\\\{2,3,6\}\\\{2,3,5\}\end{cases}\right)$

(b) $\bar{R} = 2 \iff \left(k = 3 \text{ con } \{r_i\} = \begin{cases}\{2,3,6\}\\\{2,4,4\}\\\{3,3,3\}\end{cases}\right) \vee \left(k = 4 \text{ con } \{r_i\} = \{2,2,2,2\}\right)$

(c) $\bar{R} > 2 \iff \bar{R} \geq 2 + \frac{1}{42}$, ovvero quando $k = 3$ e $\{r_i\} = \{2,3,7\}$.

Abbiamo inoltre il seguente Teorema.

► **TEOREMA Schwartz**

Sia X superficie di Riemann compatta connessa di genere ≥ 2.

Allora $\# \mathrm{Aut}(X) < \infty$.

- **Idea** (NO DIM): considerare il rivestimento universale ...

Corollario

Sia X superficie di Riemann compatta connessa di genere ≥ 2.
Allora $\# \mathrm{Aut}(X) \leq 84(g-1)$.

DIM.

Il gruppo $\mathrm{Aut}(X)$ agisce in modo olomorfo su X e per Thm di Schwartz $\mathrm{Aut}(X)$ finito, quindi si può applicare il Thm di Riemann-Hurwitz. ■

OSS: esistono effettivamente superfici di Riemann tali che

$$\# \mathrm{Aut}(X) = 84(g-1).$$

RIEPILOGO

→ $g=0$: $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ed $\mathrm{Aut}(X) \cong PGL(2)$

→ $g=1$: $X \cong \mathbb{C}/\Lambda$ ed $\mathrm{Aut}(X) \cong T \rtimes \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

con $T = \{\text{traslazioni}\}$ e $k = 2,4,6$.

→ $g \geq 2$: $\mathrm{Aut}(X)$ finito con $\# \mathrm{Aut}(X) \leq 84(g-1)$.

FORME DIFFERENZIALI su superfici di Riemann

RICHIAMO

Sia $\mathbb{C}$ considerata come varietà reale 2-dimensionale. Possiamo scegliere coordinate:

$(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$

$(z, \bar{z})$ per un $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fissato

Lo SPAZIO TANGENTE $T_{X,\mathbb{R}}$ rispetto alla struttura reale è generato da $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ o equivalentemente da $\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ dove:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Vale che, per la formula di Cauchy-Riemann:

$$f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ olomorfa} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Consideriamo ora $\Omega^1_{X,\mathbb{R}} = T^\vee_{X,\mathbb{R}} = \{1\text{-forme differenziali su } X\}$.

Abbiamo quindi che se $\omega \in \Omega^1_{X,\mathbb{R}}$ si può scrivere:

$\leadsto$ $\omega = a \cdot dx + b\, dy$ con a, b funzioni $\mathcal{C}^\infty$.

$\leadsto$ $\omega = f \cdot dz + g\, d\bar{z}$ con f, g funzioni $\mathcal{C}^\infty$ ed in particolare

$$\begin{cases} dz := dx + i\,dy \\ d\bar{z} := dx - i\,dy \end{cases}.$$

NOTAZIONE

- ω è una 1-FORMA DIFF. di TIPO $(1,0)$ se $\omega = f\, dz$.
- ω è una 1-FORMA DIFF. di TIPO $(0,1)$ se $\omega = g\, d\bar{z}$.

Così facendo, vale che $\Omega^1_{X,\mathbb{R}} = \{(1,0)\} \oplus \{(0,1)\}$.

Consideriamo gli insiemi:

$$\mathcal{E} = \{\text{funzioni } \mathcal{C}^\infty\}, \quad \Omega^1 = \{1\text{-forme}\}, \quad \Omega^2 = \{2\text{-forme}\}$$

per i quali esiste un operatore di differenziazione d tale che

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \longrightarrow \dots$$

Nel caso di $\mathbb{C}$:

$$f \longmapsto df := \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Diff. $d: \mathcal{E} \to \Omega^1$

Inoltre, una 2-forma è del tipo $h \cdot dz \wedge d\bar{z}$ per cui:

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \longmapsto d\omega := \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}$$

Diff. $d: \Omega^1 \to \Omega^2$

— ∘ —

Vediamo ora nel caso di superfici di Riemann.

DEF. 1-forma differenziale su SdR

Una 1-FORMA DIFFERENZIALE ω su X superficie di Riemann è una collezione $\{(U_i, \phi_i)\}$ ricoprimento, $\phi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{C}$ tale che presa z coordinata locale su U_i:

$$\phi_i(\omega) := f_i(z,\bar{z})\, dz + g_i(z,\bar{z})\, d\bar{z}$$

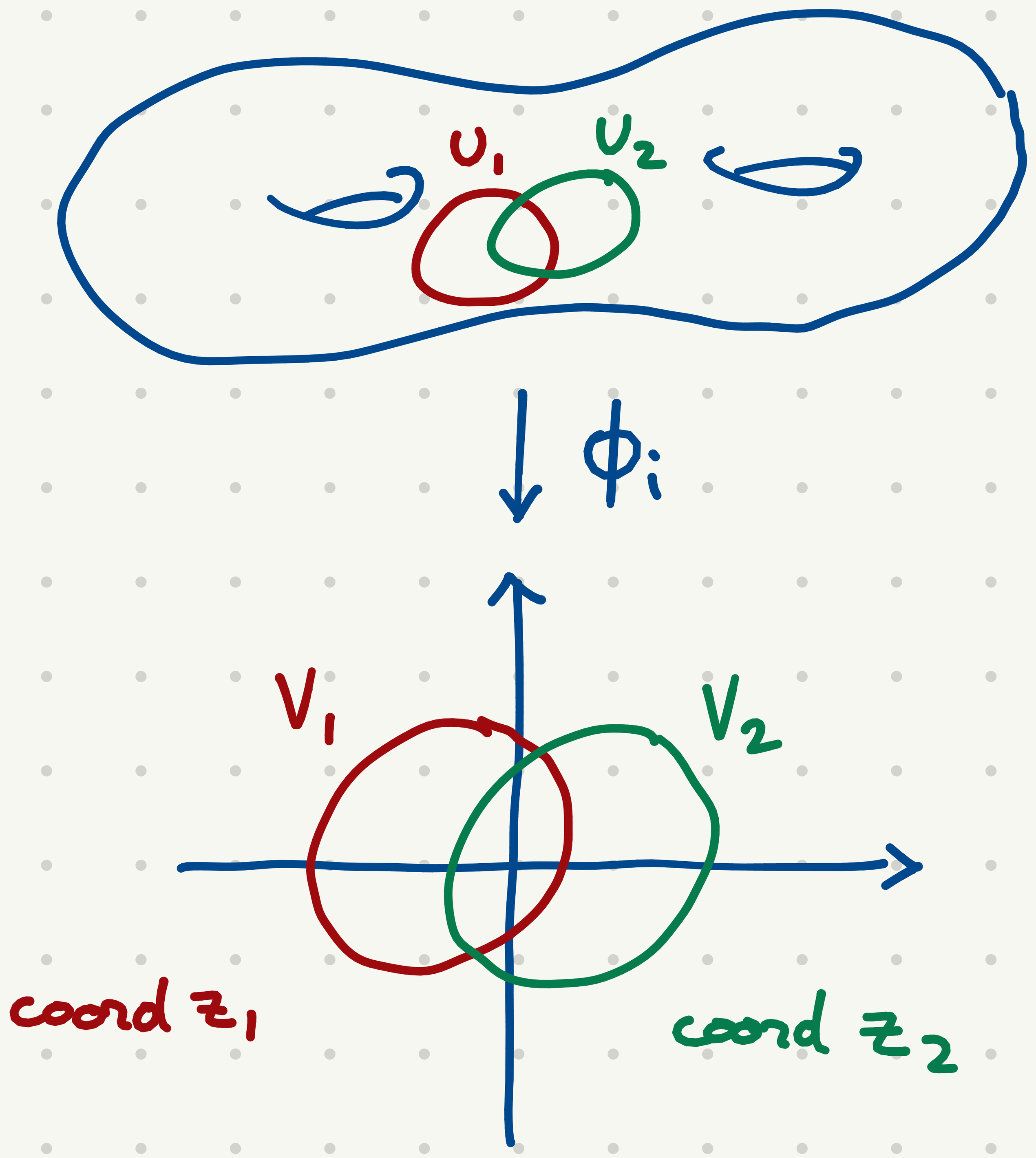
e definite in modo che la "regole di derivazione" funzioni in $U_i \cap U_j$:

rivedi i domini!

se $\begin{array}{l} \phi_1 : U_1 \to V_1 \\ \phi_2 : U_2 \to V_2 \end{array}$ carte e $T := \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : V_1 \cap V_2 \to V_1 \cap V_2$

allora $\begin{cases} \phi_1(\omega) = \omega_1 = f_1 dz_1 + g_1 d\bar{z}_1 \\ \phi_2(\omega) = \omega_2 = f_2 dz_2 + g_2 d\bar{z}_2 \end{cases}$ ed $\begin{cases} f_2 = f_1 \cdot T' \\ g_2 = g_1 \cdot \overline{T'} \end{cases}$.

Graficamente abbiamo la seguente:



$$\omega \overset{\text{loc.te}}{=} f\,dz + g\,d\bar{z}$$

e se $z_2 = T(z_1)$ con T olomorfa

avremo che

$$\begin{cases} dz_2 = T' \cdot dz_1 \\ d\bar{z}_2 = \overline{T'} \cdot d\bar{z}_1 \end{cases}.$$

Seguono le richieste su f_i, g_i date nella definizione.

Analogamente per le 2-forme.

▸ **DEF. 2-forme su SdR**

Una 2-FORMA DIFFERENZIABILE η su X superficie di Riemann è un'espressione locale (in carte) $h(z,\bar{z})\,dz \wedge d\bar{z}$ che rispetta condizioni sulle intersezioni.

▸ **DEF. 1-forma olomorfa**

Una 1-FORMA OLOMORFA è un'espressione $\omega = f(z)\,dz$ con f olomorfa, cioè esiste $\{(U_i, \phi_i)\}$ ricoprimento tale che localmente $\phi_i(\omega) = f_i(z_i)\,dz_i$ con f_i olomorfa e tale che in $V_1 \cap V_2$ con T mappa di transizione:

$$\phi_2(\omega) = f_2(z_2)\,dz_2 = T'(z_1)\,f_1(z_1)\,dz_1 .$$

• <u>OSS</u>: vale la seguente equivalenza:

ω olomorfa $\iff$ localmente $\omega = db$ con $b: U \to \mathbb{C}$ olomorfa.

Come si controlla se una 1-forma è olomorfa?

PROPOSIZIONE

Sia ω 1-forma di tipo $(1,0)$:

$$\omega \text{ è olomorfa } \iff d\omega = 0.$$

• DIM.

In coordinate locali: $\omega = f(z,\bar{z})\,dz + g(z,\bar{z})\,d\bar{z}$. Allora

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

ma ω di tipo $(1,0)$ $\Rightarrow$ $g = 0$. Quindi $d\omega = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. ∎

PULLBACK

Siano X, Y superfici di Riemann ed $F : X \to Y$ olomorfa.
Se ω è una 1-forma su Y si definisce il PULLBACK $F^*(\omega)$ che è 1-forma su X.

Localmente si definisce nel seguente modo: sia

$$\underset{\widehat{X}}{F : U} \longrightarrow \underset{\widehat{Y}}{V} \quad \text{tale che} \quad F(u) = z \quad \text{per } u \in U,\ z \in V$$

coordinate locali, siccome F olomorfa.

Allora se $\omega = f\,dz + g\,d\bar{z}$ definiamo:

$$F^*(\omega) = (f \circ F) \cdot F'\,du + (g \circ F) \cdot \overline{F'}\,d\bar{u}.$$

Integrazione di 1-forme lungo un cammino

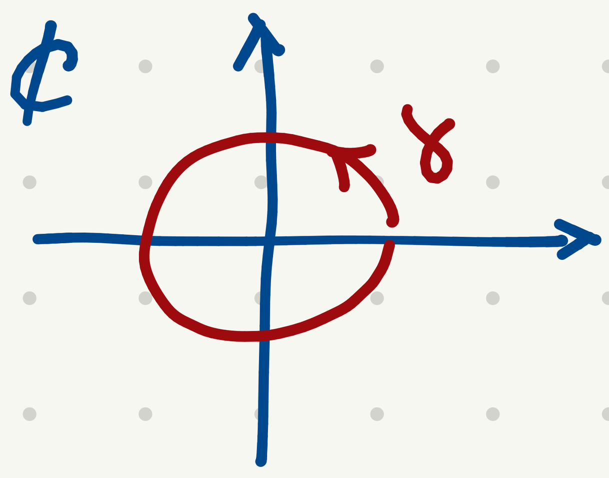
Sia γ cammino $\mathcal{C}^1$ a tratti. Allora:

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \left(f\,z'(t) + g\,\overline{z'(t)} \right) dt \quad \text{dove} \quad \gamma : [a,b] \longrightarrow U, \quad t \longmapsto z(t).$$

Ricordiamo quindi il seguente teorema.

▸ **TEOREMA dei Residui**

Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ cammino semplice intorno a $0 \in \mathbb{C}$ (come in figura a DX).



Allora $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \omega = \text{Res}_0(\omega)$ dove ω e' una 1-forma meromorfa con unico polo in $0 \in \mathbb{C}$.

Cioè ω e' di tipo $(1,0)$ ovvero $\omega = f(z)\,dz$ con la funzione f meromorfa. Così facendo, se attorno a 0 vale $f(z) = \sum_{n \geq m} c_n z^n$ allora $\text{Res}_0(\omega) = c_{-1}$.

Quindi: data ω 1-forma meromorfa su X sup. di Riemann e dato $p \in X$ punto singolare per ω (unico attorno a p), abbiamo che $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \omega = \text{Res}_p(\omega)$ dove γ e' un cammino semplice intorno a $p \in X$.

Ricordiamo ora il seguente teorema.

▸ **TEOREMA Stokes**

Sia $D \subset X$ dominio chiuso con bordo $\gamma = \partial D$ $\mathcal{C}^1$ a tratti e sia ω una 1-forma di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Allora: $\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$.

⇝ Si può vedere come conseguenza di Gauss-Green.

▸ TEOREMA dei Residui

Sia X superficie di Riemann compatta (connessa) e ω una 1-forma meromorfa. Allora:

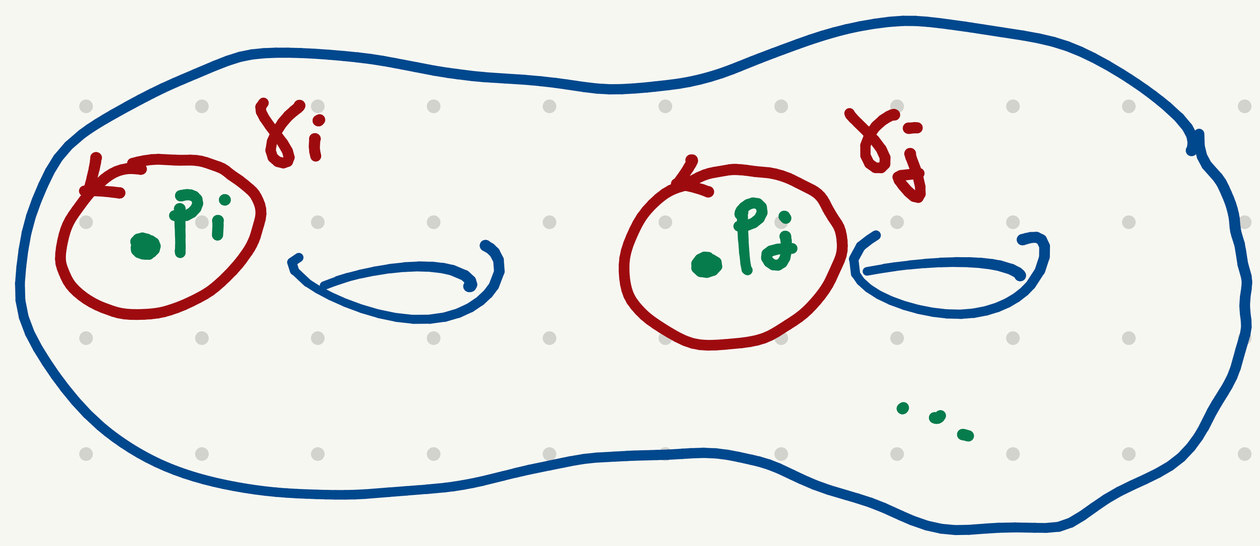
$$\sum_{p \in X} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0.$$

• DIM.

Sia ω una 1-forma meromorfa, ovvero i poli di ω sono un insieme discreto e quindi finito in X compatta.

Sia $\{p_1, \dots, p_n\}$ l'insieme dei poli di ω. Per ogni $i = 1, \dots, n$ sia U_i intorno di p_i tale che $\gamma_i = \partial U_i$ sia un cammino semplice e senza perdere generalità $U_i \cap U_j = \emptyset$.

Graficamente, come a destra.



Poniamo ora

$$D := X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

e così facendo abbiamo $\partial D = \bigcup \gamma_i$ (in termini di orientazione in realtà sarebbe $\partial D = -\sum \gamma_i$, omotopicamente). Si ottiene:

$$\sum_{p \in X} \mathrm{Res}_p(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{p_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \omega \overset{\text{(Stokes)}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \iint_D d\omega = 0$$

dove l'integrale si annulla perché ω in D è una 1-forma olomorfa, ovvero $d\omega = 0$ su tutto D. ■

Si riottiene in questo modo il prossimo risultato.

Corollario

Sia X superficie di Riemann compatta ed $f: X \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa. Allora $\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f) = 0$.

- DIM.

Consideriamo la 1-forma $\omega = \frac{1}{f} df$ che e' meromorfa e localmente si ottiene:

$$\mathrm{ord}_p(f) = n \implies f(z) = c \cdot z^n + \_$$

$$\implies \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c} z^{-n} + \_$$

Siccome f meromorfa, $df = (c n z^{n-1} + \_) dz$ per cui:

$$\frac{1}{f} df \overset{loc^{nte}}{=} \left(\frac{n}{z} + \_ \right) dz$$

cioe' si ottiene che $\mathrm{Res}_p \left(\frac{df}{f} \right) = \mathrm{ord}_p(f) = n$. Il Teorema dei Residui conclude. $\blacksquare$

TEORIA dei FASCI

DEF. Fascio in Gruppi (Sheaf)

Un FASCIO IN GRUPPI $\mathcal{F}$ su X spazio topologico è una mappa

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U)$$

solitamente pensiamo ad un gruppo di funzioni su tale aperto

dove U è un aperto di X ed $\mathcal{F}(U)$ gruppo abeliano tale che $\forall\, V \subseteq U$ aperto $\exists$ omomorfismo di restrizione ρ_{UV} che si definisce

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$
$$\sigma \longmapsto \sigma|_V$$

e rispetta le proprietà

1) <u>COMPATIBILITÀ</u> cioè:
   - (1.1) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$
   - (1.2) $\rho_{UU} = id$
   - (1.3) se $W \subseteq V \subseteq U$ allora $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$

2) <u>LOCALITÀ</u> cioè:
   - (2.1) se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ricoprimento di U e un elemento $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\sigma|_{U_i} \equiv 0 \implies \sigma \equiv 0$
   - (2.2) se $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ricoprimento di U e vale che $\forall i\ \exists\, \sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} \equiv \sigma_j|_{U_i \cap U_j}\ \forall i,j$ $\implies \exists\, \sigma \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\sigma|_{U_i} \equiv \sigma_i\ \forall i$.

Se $\mathcal{F}$ soddisfa solo (1) si chiama PREFASCIO.

TEOREMA

Dato un prefascio, possiamo costruire un fascio a lui associato.

{ La teoria sui fasci permetterà di studiare meglio le forme su sup. di Riemann. }

DEF. Spiga (Stalk)

La SPIGA di $\mathcal{F}$ fascio in un punto x è:

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) = \{ \sigma_U \in \mathcal{F}(U) \mid U \ni x \} / \sim$$

dove $\sigma_U \sim \sigma_V$ se $\exists\, W \subset U \cap V$ tale che $s_U|_W \equiv s_V|_W$.

ESEMPI

① FASCI LOCALMENTE COSTANTI: su $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ associamo

$$U \longmapsto \mathbb{C}(U)$$ con restrizioni $\rho_{U,V} = id$ (se X connessa, è il FASCIO COSTANTE)

② FASCIO delle FUNZIONI OLOMORFE: $\mathcal{O}_X$ si associa

$$U \longmapsto \mathcal{O}_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfe} \}$$

③ FASCIO delle FUNZIONI MEROMORFE: $\mathcal{M}_X$ si associa

$$U \longmapsto \mathcal{M}_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ meromorfe} \}$$

④ FASCIO dei DIFFERENZIALI OLOMORFI: Ω^1_X si associa

$$U \longmapsto \Omega^1_X(U) = \{ f(z)\,dz \mid f \text{ olomorfa in } U \}$$

Oss.

Chi è la spiga di $\mathcal{O}_X$ in $x \in X$?

Si ottiene che al limite la spiga sarà

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{ f \text{ meromorfa intorno ad } x \mid f \text{ non ha poli in } x \}$$

e $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello locale con ideale massimale dato da

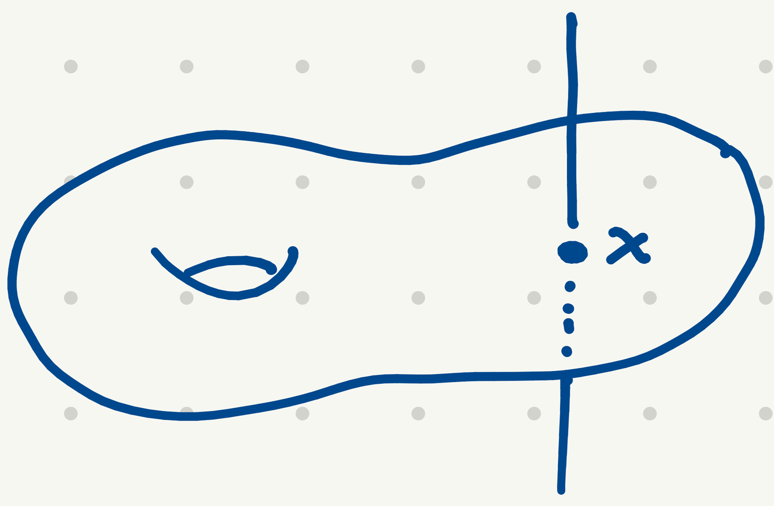
$$\mathcal{M}_x = \mathcal{I}_x = \{ f \text{ meromorfa} \mid f(x) = 0 \}.$$

Vediamo altri esempi.

DEF. Fascio Grattacielo

Sia $x \in X$. Allora consideriamo $\mathbb{C}_x := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{su } x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$.

Graficamente:



DEF. Morfismo di Fasci

Dati: $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ fasci su X, un MORFISMO di FASCI $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ è una collezione $f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$ di omomorfismi che commuta con le restrizioni, ovvero per $U \supseteq V$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{E}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{F}(V) \end{array}.$$

PROPOSIZIONE [OBS: questo permette di avere una categoria abeliana!]

Dato $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ morfismo di fasci su X:

(i) $\ker f := \{ \ker(f_U) \}_{U \subseteq X}$ è un fascio.

(ii) $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{coker} f$ sono prefasci quindi passando ad un raffinamento sono dei fasci.

In geometria algebrica viene spesso usata la seguente.

DEF. Successione Esatta di Fasci

Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ fasci per X. Allora la successione

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

è ESATTA se ϕ iniettiva, ψ surgettiva e $\ker(\psi) = \operatorname{Im}(\phi)$.

Si può trovare la seguente caratterizzazione che guarda le cose locali:

Proposizione (/Definizione)

Una successione $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ e' esatta se e solo se $\forall x \in X$ $0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0$ esatta.

Esempio Fondamentale

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa, $p \in X$ punto.

Allora c'e' la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_p \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

dove :
- $\mathcal{O}_X$ e' fascio delle funzioni olomorfe.
- $\mathbb{C}_p$ e' il fascio grattacielo in p.
- $\mathcal{I}_p$ e' tale che $\mathcal{I}_p(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfe} \mid f(p) = 0 \}$.

Le mappe invece sono:

$\Psi \equiv$ valutazione di f in p

$\Phi \equiv$ inclusione, o equivalentemente se localmente $p = \{z = 0\}$ la mappa manda $\mathcal{O}_X \ni f \longmapsto z \cdot f$.

[P.S: in dimensione più alta se $Y \subset X$ sottovarietà di codimensione 1 otterremo $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$.]

Coomologia di Čech

Un problema in geometria algebrica e' la costruzione di funzioni meromorfe. Per fare questo, prima risolviamo il problema localmente e poi si cerca di reincollare.

Sia $\mathcal{F}$ un fascio per $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento localmente finito.

- Definiamo le p- COCATENE di $\mathcal{F}$ rispetto ad $\mathcal{U}$ come

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_p \in A} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p})$$

quindi se $f \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, f e' collezione $\{f_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p})\}$.

- L' OPERATORE di COBORDO sarà

$$d = d_p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

dove $\forall f \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ abbiamo che $d_p f \in C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e' la famiglia $(d_p f)_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p+1}} := \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j f_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{p+1}}\big|_{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{p+1}}}$.

- OSS: $d^2 \equiv 0$ (x esercizio)

- Possiamo quindi definire COCICLI e COBORDI come:

$$Z_p := \ker d_p \qquad\qquad B_p := \operatorname{Im} d_{p-1}$$

Così facendo, la COOMOLOGIA di ČECH e'

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := Z_p / B_p .$$

- DEF.

Definiamo $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) := \lim_{\mathcal{U} < \mathcal{W}} \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$

dove $\mathcal{U} < \mathcal{W}$ e' limite diretto per raffinamento.

▶ **PROPOSIZIONE** (no DIM)

Sia X varietà complessa compatta e olomorfa. Allora ES. superfici di Riemann!

$$\check{H}^p(X,\mathbb{R}) \cong H^p_{DR}(X,\mathbb{R}) \cong H^p_{sing}(X,\mathbb{R}).$$

Cerchiamo ora un'interpretazione per il grado 0.

$$\boxed{H^0(X,\mathcal{F}) = ?}$$

Se $p=0$, notiamo che $C^{p-1}(X,\mathcal{F}) = \emptyset$. Quindi $B_0 = \{0\}$.

Ciò implica che basta vedere i cocicli:

$$Z_0 = \{\text{cocatene } f \text{ tali che } d_0(f) = 0\}$$
$$= \{(f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha))_{\alpha\in A} \mid (f_\alpha - f_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} \equiv 0 \ \forall \alpha,\beta\}$$

(siccome le f_α coincidono sulle loro intersezioni)

$$= \{f \in \mathcal{F}(X)\} = \{\text{sezioni globali}\}.$$

▶ **ESEMPIO**

Sia X superficie di Riemann compatta connessa. Allora

$$H^0(X,\mathcal{O}_X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ olomorfe}\} \cong \mathbb{C}.$$

Fasci di $\mathcal{O}_X$ - Moduli

DEF. Fascio Coerente

Un fascio $\mathcal{F}$ si dice COERENTE se $\forall x \in X \; \exists U \ni x$ tale che è esatta $\mathcal{O}_X^{R}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^{m}|_U \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow 0$.

rational, meromorphic

{ "Se questa cosa vi confonde, tutti i fasci buoni sono coerenti." CIT }

DEF. Supporto di un Fascio

Sia $\mathcal{F}$ un fascio. Il suo SUPPORTO è dato da:

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = \overline{\{p \in X \mid \mathcal{F}_p \neq 0\}}.$$

TEOREMA (no DIM)

Sia X varietà complessa compatta e olomorfa con $\mathcal{F}$ fascio coerente. Allora $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale finito-dimensionale e

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \forall\, p > \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Supp}(\mathcal{F})).$$

Torniamo ora al nostro caso.

Sia X superficie di Riemann compatta connessa ed $\mathcal{F}$ fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli coerente. Allora $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = 0 \;\; \forall p \geq 2$.

Gli unici eventualmente $\neq 0$ saranno $\check{H}^0$ ed $\check{H}^1$.

ESEMPIO

Sia $\mathcal{F} = \mathbb{C}_p$ fascio grattacielo. Allora

$$\check{H}^0(X,\mathbb{C}_p) = \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \check{H}^1(X,\mathbb{C}_p) = 0$$

Siccome $p = 1 > 0 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Supp}(\mathbb{C}_p))$.

Per la coomologia otteniamo anche una successione esatta lunga.

▸ **TEOREMA** Successione Esatta Lunga

Consideriamo $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{H} \to 0$ successione esatta corta di fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli coerenti.

Allora esiste una successione esatta lunga:

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{G}) \to H^1(\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} \text{ecc ecc...}$$

• DIM (idea per $H^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{F})$)

Scegliamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tale che

$$\forall \alpha \in A \qquad 0 \to \mathcal{F}(U_\alpha) \to \mathcal{G}(U_\alpha) \to \mathcal{H}(U_\alpha) \to 0 \text{ esatta } (*).$$

Quindi globalmente otteniamo una successione esatta:

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{H})$$

ma non possiamo mettere "$\to 0$" perchè non è detto che le mappe di un elemento in $H^0(\mathcal{G})$ si incollino bene in $H^0(\mathcal{H})$. Infatti ci inseriremo un $H^1(\mathcal{F})$. Vogliamo definire quindi:

$$\partial : H^0(\mathcal{H}) \to H^1(\mathcal{F}).$$

Consideriamo aperti: U_α, U_β, $\alpha, \beta \in A$ tali che per esattezza $(*)$:

$$\mathcal{G}(U_\alpha) \twoheadrightarrow \mathcal{H}(U_\alpha) \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(U_\beta) \twoheadrightarrow \mathcal{H}(U_\beta).$$

Sia allora $\sigma \in H^0(\mathcal{H})$ e poniamo $\sigma_\alpha := \sigma|_{U_\alpha}$ e $\sigma_\beta := \sigma|_{U_\beta}$.

Per la scelta di $\mathcal{U}$ fatta:

$$\exists\, s_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha),\ s_\beta \in \mathcal{G}(U_\beta) \text{ tali che } \begin{cases} \Psi(s_\alpha) = \sigma_\alpha \\ \Psi(s_\beta) = \sigma_\beta \end{cases}.$$

Poniamo (momentaneamente):

$$\tilde{\partial}(\sigma) := s_\alpha - s_\beta =: g_{\alpha\beta} \in \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Per costruzione allora $\Psi(g_{\alpha\beta}) = 0 \in \mathcal{H}(U_\alpha \cap U_\beta)$ poiché avevamo preso proprio $\Psi(s_\alpha) = \sigma_\alpha$ e $\Psi(s_\beta) = \sigma_\beta$.

Ne consegue che $\Psi(g_{\alpha\beta}) = 0 \Rightarrow g_{\alpha\beta} \in \ker(\Psi)$

$\Rightarrow \exists\, f_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ tale che $\Phi(f_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$.

Definiamo quindi:

$$\partial(\sigma)\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} := f_{\alpha\beta}$$

e in conclusione si ottiene che:

$$[\sigma \leftrightarrow \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}] \xrightarrow{\partial} [f_{\alpha\beta} \leftrightarrow \{(U_\alpha \cap U_\beta, f_{\alpha\beta})\}]$$

cioè abbiamo costruito la mappa indotta $H^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{F})$.
$$\sigma \longmapsto f_{\alpha\beta}$$

Analogamente per $H^1(\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^2(\mathcal{F}), \dots$ $\square$

Corollario

Data $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ esatta corta di fasci, allora $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H})$.

In particolare:

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim(H^i(\mathcal{F})) = \text{"caratteristica di Eulero-Poincaré Olomorfa"}.$$

FASCI INVERTIBILI

DEF. Fascio Invertibile

Un fascio $\mathcal{L}$ di $\mathcal{O}_X$-moduli si dice INVERTIBILE se esiste un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ tale che

- $\forall i \in I \ \exists \ \varphi_i : \mathcal{L}(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}(U_i)$ isomorfismo dove la
$$f \longmapsto \varphi_i \cdot f$$
funzione φ_i è locale e meromorfa.
- $\forall i,j \in I \ \exists \ f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ invertibile tale che $\varphi_i = f_{ij} \cdot \varphi_j$.

In altre parole:

$$\mathcal{L} \text{ fascio invertibile} \longleftrightarrow \begin{cases} \text{isomorfismi locali con } \mathcal{O}_X \\ \text{cocicli } f_{ij} \end{cases}$$

cioè "$\mathcal{L}|_{U_i} = \frac{1}{\varphi_i} f$" per f olomorfa.

OSS. vale che in $U_i \cap U_j \cap U_k$ $\ f_{ik} = f_{ij} \cdot f_{jk}$.

ESEMPIO

Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e ricoprimento $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ con coord. $z = \frac{z_1}{z_0}$

$U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ con coord. $w = \frac{z_0}{z_1}$.

Allora definiamo:

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ fascio invertibile tale che

i) $\phi_i : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)(U_i) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}(U_i) \quad \forall i$

ii) l'unico cociclo è $f_{10} = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^m$.

Infatti calcoliamo che: $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) =$ sezioni globali, cioè funzioni meromorfe.

Quindi:

- $\underline{n=0}$: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ poichè $f_{10} = 1$. Quindi:

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \{\text{funzioni globalmente olomorfe}\} = \mathbb{C}$$

- $\underline{n=1}$: sia $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Allora:

$$\begin{cases} \phi_0((s)|_{U_0}) =: f(z) \in \mathcal{O}(U_0) \\ \phi_1((s)|_{U_1}) =: g(w) \in \mathcal{O}(U_1) \end{cases}$$

Avviene qui l'isomorfismo φ_i: la sezione s si legge in carte come $s|_{U_0} = f$ e $s|_{U_1} = g$.

Come incolliamo f e g? Tramite il cociclo:

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = \left\{ (f(z), g(w)) \;\middle|\; f, g \text{ si incollano con } f_{10} = \frac{z_1}{z_0} \right\}$$

cioè in $U_0 \cap U_1$:

$$\underset{s|_{U_0}}{f(z)} = \underset{\text{cociclo}}{z} \cdot \underset{s|_{U_1}}{g\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Quindi:

$$f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i \qquad \text{e} \qquad g(w) = \sum_{j \geq 0} b_j w^j$$

così in $U_0 \cap U_1$ riscriviamo $w = \frac{1}{z}$ e otteniamo

$$g(w)|_{U_0 \cap U_1} = \sum_{j \geq 0} b_j z^{-j}.$$

La condizione di cociclo si può riscrivere:

quella "f" della def ora è $a_0 z_0 + a_1 z_1$ e $\varphi_0 = \frac{1}{z_0}$, $\varphi_1 = \frac{1}{z_1}$.

$$f(z) = z \cdot g\left(\frac{1}{z}\right) \iff \begin{cases} a_i = 0 \quad \forall i \geq 2 \\ b_j = 0 \quad \forall j \geq 2 \\ a_0 = b_1 \quad \wedge \quad a_1 = b_0 \end{cases}$$

In conclusione una sezione globale $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ equivale ad

$$\begin{cases} f(z) = a_0 + a_1 z & \text{in } U_0 \\ g(z) = a_0 w + a_1 & \text{in } U_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a_0 z_0 + a_1 z_1}{z_0} & \text{in } U_0 \\ \dfrac{a_0 z_0 + a_1 z_1}{z_1} & \text{in } U_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong \{\text{poly omogenei di grado } 1\}.$$

Più in generale:

→ $\underline{m>0}$: $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \cong \{\text{poly omogenei di grado } m\}$

→ $\underline{m<0}$: $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) = 0$.

▸ OPERAZIONI CON FASCI INVERTIBILI

Le operazioni che si possono compiere sono:

→ $\otimes$: $(\mathcal{L}, \mathcal{F}) \longmapsto \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{"}\mathcal{L} \leftrightarrow \text{cociclo } \ell_{ij} \\ \mathcal{F} \leftrightarrow \text{cociclo } f_{ij}\text{"} \end{array}\right| \longmapsto \text{"}\mathcal{L} \otimes \mathcal{F} \leftrightarrow \text{cociclo } \ell_{ij} \cdot f_{ij}\text{"}$$

▸ ESEMPIO

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m+n)$$

→ Inversione: $\mathcal{L}^{-1}$ e' il fascio tale che $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{O}_X$. Cioè:

$$\mathcal{L} \leftrightarrow \begin{cases} \ell_i \\ \text{cocicli } \ell_{ij} \end{cases} \quad \text{allora} \quad \mathcal{L}^{-1} \leftrightarrow \begin{cases} \ell_i^{-1} \\ \text{cocicli } \ell_{ij}^{-1} \end{cases}.$$

▸ ESEMPIO

$$[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)]^{-1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$$

— ∘ — ∘ —

Si ottiene la seguente Proposizione, come corrispondenza.

▸ PROPOSIZIONE

Sia X una varietà complessa (olomorfa) liscia. Allora

$$\{\text{fasci invertibili}\} \longleftrightarrow \{\text{fibrati in rette}\}.$$

Diamo le definizioni.

▸ **DEF. Fibrato in Rette (Line Bundle)**

Sia X varietà liscia. Un FIBRATO IN RETTE $\pi : F \to X$ è tale che $\exists\ \mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento di X con mappe olomorfe

$$\overline{f_i} : F|_{U_i} \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{C}$$
$$p \longmapsto (z, f_i(p)) \quad \text{con } z = \pi(p).$$

Inoltre $\forall\, i,j \in I\ \exists\ g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ tale che

$$f_i = g_{ij} \cdot f_j .$$

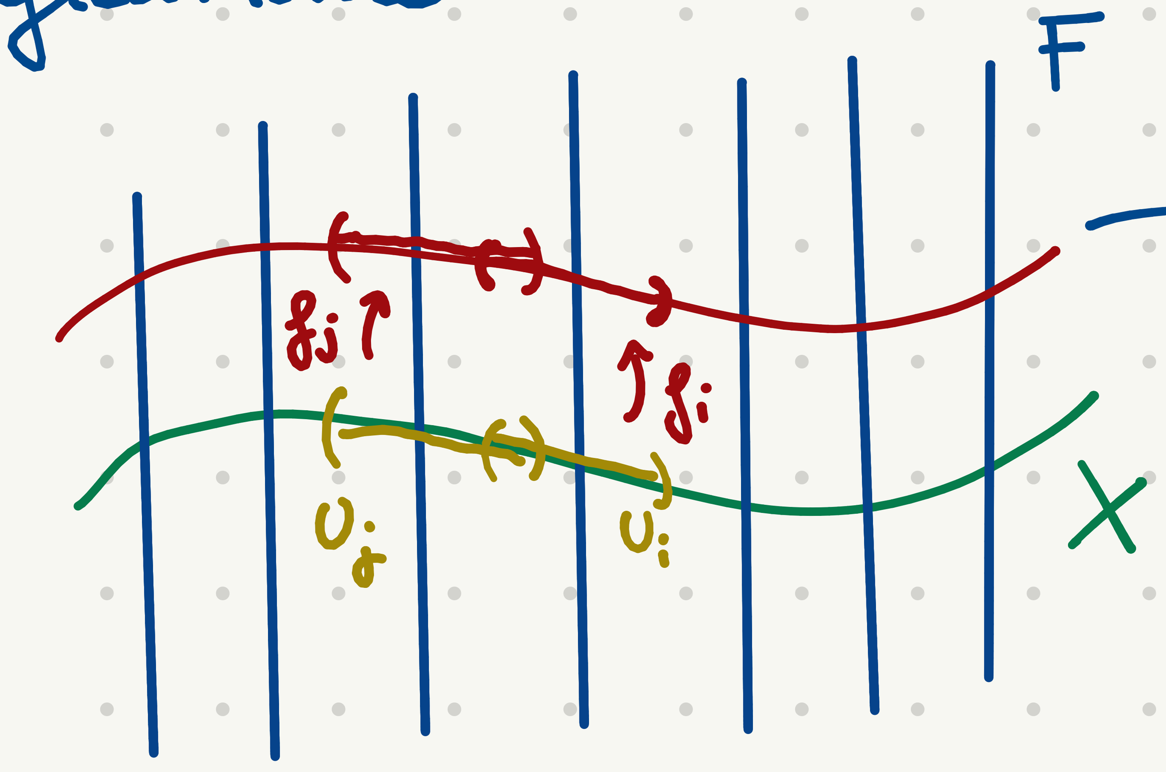
(le mappe g_{ij} fanno da "transizione")

▸ **DEF. Sezione di un Fibrato**

Una SEZIONE OLOMORFA di F fibrato è $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ tale che $\{U_i\}$ ricopre X ed
$$\begin{cases} f_i : U_i \to \mathbb{C} \text{ olomorfa} \\ f_i = g_{ij} \cdot f_j \quad \forall\, i,j \end{cases}$$

(cioè localmente f_i, f_j compatibili)

Graficamente:



sezione di F definita sui singoli intorni U_i.

▸ <u>FASCIO INVERTIBILE ASSOCIATO ad un LINE BUNDLE</u>

Possiamo costruire dato F fibrato in rette:

$\mathcal{F}$:= fascio delle sezioni di F

cioè troviamo una corrispondenza:

$$F \longleftrightarrow \{U_i, \overline{f_i}\} \quad \text{dove } \overline{f_i} = (z, f_i(z)).$$

In particolare allora

$$\mathcal{F}(U \cap U_i) = \{ f_i : U \cap U_i \to \mathbb{C} \text{ sez. olomorfa di } F \}$$

e otteniamo esattamente la condizione di cociclo $f_j = g_{ij} \cdot f_i$ per cui $\mathcal{F}$ fascio invertibile.

- **LINE BUNDLE ASSOCIATO ad un FASCIO INVERTIBILE**

Viceversa dato $\mathcal{F}$ fascio invertibile costruiamo F line bundle.

Dato $\mathcal{U} = \{U_i\}$ tale che $\mathcal{F}(U_i) \xrightarrow[\star]{\simeq} \mathcal{O}(U_i)$ con condizione di cociclo g_{ij}.

Allora si costruisce un isomorfismo locale:

$$F|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C} \qquad (z, f_i(z))$$

dove $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ è quella data dall'isomorfismo $\star$.

L'incollamento dei $U_i \times \mathbb{C}$ è dato dalle condizioni di cociclo g_{ij}.

Divisori

DEF. Divisore

Sia X superficie di Riemann compatta.

Un DIVISORE D su X e' una funzione $X \to \mathbb{Z}$ a supporto discreto, cioe':

(Nel libro si denota $n_p =: D(p)$)

$$D = \sum_{\text{finita}} n_p \cdot P \qquad \text{con } n_p \in \mathbb{Z} \text{ e } p \in X.$$

Definiamo il GRADO di D come $\deg(D) := \sum n_p$.

Per CULTURA

In dimensione più alta $D = \sum_{\text{finita}} n_{D_i} \cdot D_i$ con D_i sottovarietà di codimensione 1.

Denotiamo inoltre $\mathrm{Div}(X) := \{\text{divisori su } X\}$. Su questo insieme esiste l'operazione somma "+" data da:

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum D_1(p) \cdot p \\ D_2 &= \sum D_2(p) \cdot p \end{aligned} \implies D_1 + D_2 = \sum \big(D_1(p) + D_2(p)\big) \cdot p.$$

Si ottiene che $(\mathrm{Div}(X), +)$ e' un gruppo commutativo e la mappa $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ e' un omomorfismo di gruppi.

DEF. Divisore Effettivo

Un divisore D si dice EFFETTIVO (indicato $D \geq 0$) se $\forall p \in X \quad n_p \geq 0$.

Vogliamo arrivare ad una nuova corrispondenza coi fasci invertibili...

Divisori Principali

▸ **Ricordo**

Vale che $\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ meromorfa} \} \longleftrightarrow \{ f : X \to \mathbb{P}^1 \text{ olomorfa} \}$.

▸ **DEF.** $\operatorname{div}(f)$

Sia $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfa. Allora definiamo:

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p \; .$$

Per il Teorema dei Residui segue che $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

▸ **DEF.** Divisore Principale

$$\{ \text{divisori principali} \} := \{ \operatorname{div}(f) \mid f : X \to \mathbb{C} \text{ meromorfa} \}.$$

▸ **Esempio**

Sia $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ data da $f(z_0 : z_1) = \dfrac{z_1(z_0 - z_1)}{z_0^2}$.

Allora:

$$\operatorname{div}(f) = 1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 - 2 \cdot \infty$$

dove $P_0 = [1:0]$, $P_1 = [1:1]$ e $\infty = [0:1]$.

Si può specializzare ulteriormente la definizione sopra:

▸ **DEF.** $\operatorname{div}_0(f)$ e $\operatorname{div}_\infty(f)$

Sia $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfa. Allora:

$$\operatorname{div}_0(f) := \sum_{\substack{p \in X \\ \operatorname{ord}_p(f) > 0}} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p \qquad \text{DIVISORE degli ZERI}$$

$$\operatorname{div}_\infty(f) := -\sum_{\substack{p \in X \\ \operatorname{ord}_p(f) < 0}} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p \qquad \text{DIVISORE dei POLI}$$

Così possiamo scrivere:
$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f).$$

PROPOSIZIONE

Vale che $\operatorname{div}(f\cdot g) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$.

Possiamo quindi scrivere la corrispondenza.

FASCIO INVERTIBILE ASSOCIATO ad un DIVISORE

Fissiamo $D = \sum n_p \cdot p$. Allora:

DEF. Fascio $\mathcal{O}_X(D)$

Sia $\mathcal{O}_X(D)$ il fascio tale che:
$$[\mathcal{O}_X(D)](U) := \{ f \text{ meromorfe in } U \mid \operatorname{ord}_p(f) + n_p \geq 0 \ \forall p \in U \}.$$

Da questa definizione si scopre che...

PROPOSIZIONE

Il fascio $\mathcal{O}_X(D)$ e' invertibile.

- DIM.

Il divisore $D = \sum n_p \cdot p$ e' supportato da $\{P_1, -, P_d\}$.

Allora in $U_0 = X \setminus \{P_1, -, P_d\}$ si ha che $\mathcal{O}_X(D)|_{U_0} := \mathcal{O}_X(U_0)$.

Per i P_i scegliamo $U_i \cong \Delta$ intorno tale che $U_i \cap \operatorname{supp}(D) = \{P_i\}$.

Così facendo $D|_{U_i} = n_i P_i$.

Allora localmente $D = \operatorname{div}(\varphi_i)$ con $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^{n_i}$.

Quindi:
$$\mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow [\mathcal{O}_X(D)](U_i)$$
$$f \longmapsto \frac{1}{\varphi_i}\cdot f$$

Per costruzione serve esattam: $\operatorname{ord}_p\left(\frac{1}{\varphi_i} f\right) \geq 0$

Inoltre il cociclo in $U_i \cap U_j$ sarà $\varphi_{ij} = \frac{\varphi_j}{\varphi_i}$, mentre $\varphi_0 = 1$.

Corollario

Vale che $[\mathcal{O}_X(D)]^{-1} \cong \mathcal{O}_X(-D)$.

[$\mathcal{O}_X(D)$: merom su intorni
$H^0_X(D)$: meromorfe globali]

Vediamo ora le SEZIONI GLOBALI di $\mathcal{O}_X(D)$ ovvero

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{funzioni } f : X \to \mathbb{C} \text{ meromorfe tali} \\ \text{che } \mathrm{ord}_p(f) + n_p \geq 0 \ \forall p \end{array} \right\}$$

$$= \{ f : X \to \mathbb{C} \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \}$$

che nel libro di Miranda si scrive $L(D)$.

ESEMPIO $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con coordinate $(z_0 : z_1)$. Sia $P = (1:0)$.

Consideriamo $D = 1 \cdot P$ divisore. Come è fatto $\mathcal{O}_X(D)$?

[Intuitivamente saranno le meromorfe su X con al più un solo polo in P di ordine 1.]

In $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ con coordinate $z = \frac{z_1}{z_0}$ abbiamo il punto $P = 0 \in \mathbb{C} \cong U_0$. Ma allora:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)(U_0) = \{ f : U_0 \to \mathbb{C} \text{ meromorfe} : \mathrm{ord}_p(f) \geq -1 \text{ unico polo} \}$$

$$= \left\{ f(z) = \frac{1}{z} g(z) \mid g \text{ olomorfa in } U_0 \right\}.$$

In $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ con coordinate $z = \frac{z_0}{z_1}$ abbiamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)(U_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_1) = \{ h : U_1 \to \mathbb{C} \text{ olomorfa} \}.$$

Dobbiamo "incollarle" e perciò:

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)) = \begin{cases} \dfrac{g(z)}{z} & \text{in } U_0 \\ h(z) & \text{in } U_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{g(z)}{z} = h\left(\frac{1}{z}\right) \text{ in } U_0 \cap U_1 .$$

Uguagliando ora le serie di potenze troviamo

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + c_1$$

per cui segue che:

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)) \cong \left\{ \frac{c_0 z_0 + c_1 z_1}{z_1} \right\} \cong \{ c_0 z_0 + c_1 z_1 \}$$

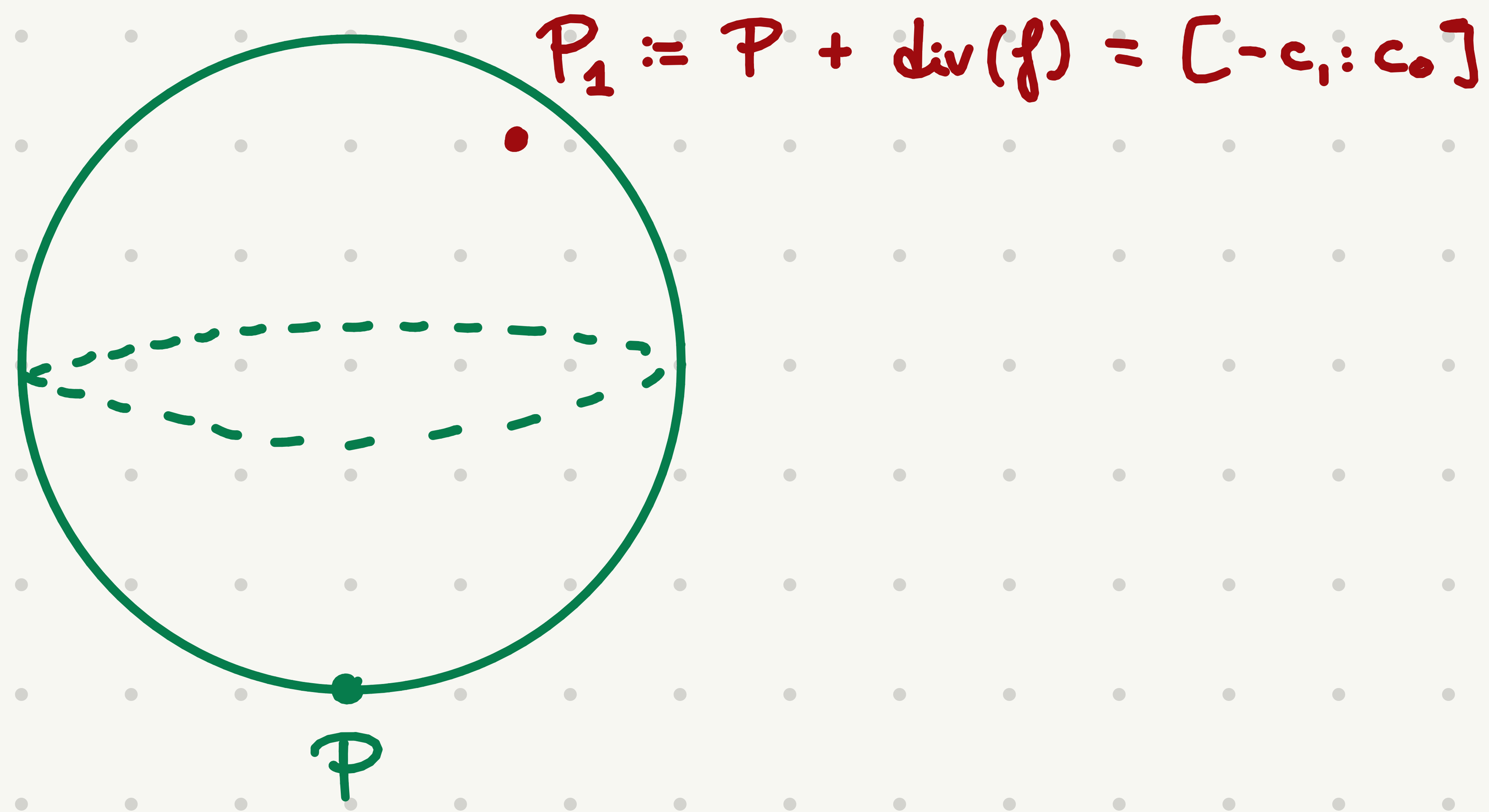
$$\cong \{ \text{polinomi omog di grado } 1 \} \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)).$$

<u>OSS</u>: se $f = \dfrac{c_0 z_0 + c_1 z_1}{z_1}$ allora si calcola che

perchè polo in P

$$\operatorname{div}(f) + D \overset{!}{=} \operatorname{div}(f) + [1:0] = [-c_1 : c_0] - [1:0] + [1:0] = [-c_1 : c_0]$$

Dall'osservazione capiamo che sul proiettivo al variare di f si "sposta" il punto P in P_1 sommando $\operatorname{div}(f)$ a P.



L'osservazione nell'esempio si generalizza.

► <u>TEOREMA</u> (dal Miranda)

Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e D divisore tale che $\deg(D) = d \geq 0$.

Allora per una fissata f_D meromorfa associata a D vale:

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)) = \{ g_z \cdot f_D \mid g_z \text{ polinomio di grado } \leq d \}.$$

- DIM.

Ripercorro i passi dell'esempio: sia $D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \lambda_\infty$,

dove $e_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i \in \mathbb{C} \cong U_0$ e $\lambda_\infty = [0:1]$.

Poniamo: $\quad f_D(z) := \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{-e_i}$ in $U_0 \cong \mathbb{C}$.

Per estendere a tutto $\mathbb{P}^1$ omogeneizziamo scrivendo

$$f_D(z_0, z_1) := \frac{g(z_0,z_1)}{h(z_0,z_1)}$$ con g, h polinomi dello stesso grado.

Allora:
$$\operatorname{div}(f_D) = \sum_{i=1}^{n} (-e_i) \cdot \lambda_i + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) \cdot \lambda_\infty}_{\text{per il Thm dei Residui.}}$$

▷ Scrivo $f(z) := g(z) \cdot f_D(z)$ in U_0 con g olomorfa.

Affinché $f \in H^0$ deve rispettare:

$$\operatorname{div}(g(z) \cdot f_D(z)) + D \geq 0 \longleftarrow [\text{Condizione su } \mathcal{O}_X(D)]$$

$$\operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f_D) + D \geq 0 \quad \text{in } U_0.$$

Cioè, sostituendo con il calcolo fatto:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} e_i + e_\infty - \underbrace{\overset{=\operatorname{ord}_\infty(g)}{\deg(g)}}\right) \cdot \infty \geq 0$$

il che è verificato quando $\deg(g) \leq d = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_\infty = \deg D$.

$\Rightarrow$ La condizione $\operatorname{div}(g \cdot f_D) + D \geq 0$ vista nel punto ∞

implica che $\deg g \leq \deg D$.

▷ Vediamo ora il viceversa.

Sia ora $h \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D))$ e consideriamo $\frac{h}{f_D} =: g$.

La tesi è che g è un polinomio di grado $\leq d$.

Vale che $\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(h) - \operatorname{div}(f_D)$ con $\operatorname{div}(h) \geq -D$.

Quindi otteniamo che:

$$\mathrm{div}(g) \geq -D - \mathrm{div}(f_D) = \left(-\sum_{i=1}^{n} e_i - e_\infty\right) \cdot \infty = \left(-\deg(D)\right) \cdot \infty$$

cioè:

$$\mathrm{div}(g) \geq -\deg(D) \cdot \infty$$

$\Rightarrow$ g ha un polo di ordine $\leq \deg(D)$ in ∞ e nessun polo in U_0

$\Rightarrow$ g è un polinomio in z di grado $\leq d$. ■

Il teorema estende l'idea di "spostare" i punti dei divisori tramite funzioni razionali. Formalizziamolo...

DEF. Divisori Linearmente Equivalenti

Siano D_1, D_2 divisori su X. Sono LINEARMENTE EQUIVALENTI se $\exists f : X \to \mathbb{C}$ meromorfa tale che $\mathrm{div}(f) = D_1 - D_2$.

Indicheremo $D_1 \sim D_2$ oppure $D_1 \equiv D_2$.

Se $D_1 \geq 0$ e $D_2 \geq 0$ allora:

$$D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f) \iff \begin{cases} D_1 \equiv \text{zeri di } f \\ D_2 \equiv \text{poli di } f \end{cases}.$$

ESEMPIO

Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1$ $\exists f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ meromorfa tale che $\mathrm{div}(f) = P_1 - P_2$.

Cioè:
- se $\begin{cases} P_1 \leftrightarrow \lambda_1 \\ P_2 \leftrightarrow \lambda_2 \end{cases}$ in $\mathbb{C} \cong U_0$ allora $f = \dfrac{z-\lambda_1}{z-\lambda_2}$.
- se $P_2 = \infty$ allora $f = z - \lambda_1$.

Sistemi Lineari

DEF. Sistema Lineare

Sia D divisore su X. Allora il SISTEMA LINEARE ASSOCIATO a D, denotato $|D|$ è:

$$|D| := \{ E \in \mathrm{Div}(X) \mid E \sim D \wedge E \geq 0 \}.$$

Idea: in $\mathbb{P}^2$ prendo una curva di grado 4. Prese tutte le curve di grado 3 trovo le intersezioni (divisori) di grado 12. L'idea è che queste intersezioni stanno tutte nella classe d'equivalenza, mi posso spostare da una all'altra.

Notare che se $\deg(D) < 0$ allora $|D| = \emptyset$.

Se $D \ngeq 0$ allora vale $D \notin |D|$.

PROPOSIZIONE

Sia D un divisore di X. Esiste una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))) &\longleftrightarrow |D| \\ [f] &\longleftrightarrow \mathrm{div}(f) + D . \end{aligned}$$

- DIM.

Per definizione $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{ f \text{ meromorfe} \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \}$.

Quindi $\mathrm{div}(f) + D$ definisce un divisore:

$$E := \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \quad \wedge \quad E \sim D .$$

Lavoriamo sul proiettivizzato $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$ perché

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{div}(\lambda \cdot f) = \mathrm{div}(f).$$

D'altra parte, sia $E \in |D|$ cioè $E \geq 0$ e $D \sim E$.

Allora $\exists\, f: X \to \mathbb{C}$ meromorfa con $E = \operatorname{div}(f) + D \geq 0$

ovvero $\operatorname{div}(f) = E - D \geq -D$ cioè $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Per concludere, se $\operatorname{div}(f) + D = \operatorname{div}(g) + D$ con le funzioni $f, g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ allora siccome $\operatorname{Div}(X)$ gruppo:

$$\operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g) = 0 \quad \text{cioè} \quad \operatorname{div}\left(\frac{f}{g}\right) = 0$$

$\Rightarrow f/g$ non ha né zeri né poli ovvero $f/g \equiv \lambda$ costante. $\blacksquare$

{ A cosa servono questi divisori?

Sia D divisore. $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ è uno spazio vettoriale di dim $< \infty$. Fissata una base duale $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ possiamo costruire una mappa razionale:

$$\varphi_{|D|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}\left(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))^\vee\right)$$
$$p \longmapsto (\sigma_1(p) : \ldots : \sigma_n(p))$$

ma ! ci sono problemi nel definire questa mappa.

▸ <u>OSS</u>: se $D_1, D_2 \in |D|$ allora $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \in |D|$.

Dati $D_1 = \operatorname{div}(f_1) + D$ e $D_2 = \operatorname{div}(f_2) + D$, definiamo:

$$\lambda_1 D_1 \text{"}+\text{"} \lambda_2 D_2 := \operatorname{div}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) + D \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Struttura additiva di SISTEMA LINEARE, non è l'addizione dei divisori!

▸ <u>ESEMPIO</u>

Sia $X = \mathbb{P}^1$ e $P_1 = [1:0]$, $P_2 = [0:1]$ e $D = P_1$.

Allore $P_2 \in |D|$ perchè:

$$P_2 = \operatorname{div}\left(\frac{z_0}{z_1}\right) + D = \operatorname{div}(z_0) = [0:1].$$

Quindi facendo combinazioni lineari:

$$\lambda_1 P_1 \text{ "+" } \lambda_2 P_2 \longleftrightarrow \operatorname{div}\left(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot \frac{z_1}{z_0}\right) + D =$$

$$= \operatorname{div}\left(\frac{\lambda_1 z_0 + \lambda_2 z_1}{z_0}\right) + D$$

$$= \operatorname{div}(\lambda_1 z_0 + \lambda_2 z_1) = [-\lambda_2 : \lambda_1].$$

ovvero $\lambda_1 P_1 \text{ "+" } \lambda_2 P_2 =: P$ punto.

Diciamo che $|D| \cong \mathbb{P}(\underbrace{H^0(X, D)})$ è SISTEMA LINEARE COMPLETO. abbreviazione di $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

▶ **DEF. Sottosistema Lineare**

Un SOTTOSISTEMA LINEARE (o SERIE LINEARE) è

$V \subseteq |D|$ indotto da $\overline{V} \subseteq H^0(X, D)$ sottospazio vettoriale.

nel senso della bigezione "sist. lineari" $\longleftrightarrow \mathbb{P}(H^0_X(D))$.

▶ **DEF. Punto Base di Sottosistema**

Un $P \in X$ è PUNTO BASE per $V \subseteq |D|$ se

$\forall E \in V$ divisore vale che $P \in E$ (ovvero $E - P \geq 0$).

Una condizione per punti base si ottiene col seguente risultato.

▶ **PROPOSIZIONE**

Sia $V \subseteq |D|$ sistema lineare indotto da $\overline{V} \subseteq H^0(X, D)$. Allora

$$P \text{ punto base per } V \iff \forall f \in \overline{V} \quad f(P) = 0.$$

• DIM.

Vale che $\forall E = \operatorname{div}(f) + D$ si ha:

$$E + P \geq 0 \iff f(P) = 0.$$

■

Mappa $X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ associata a $|D|$

Ritornando al risultato-obiettivo enunciato in "~·~", questa definizione risolve il problema della mappa razionale.

Sia $\{\sigma_0, \_, \sigma_n\}$ base di $H^0(X, D)$ (oppure di $\bar{V}$ in generale).

Abbiamo definito
$$\begin{aligned} \varphi_{|D|} : X &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\longmapsto (\sigma_0(P) : \_ : \sigma_n(P)) \end{aligned}$$

Questa definizione ha <u>problemi</u>:

① se esiste $p \in X$ tale che $\sigma_i(P) = 0 \ \forall i$, $\varphi_{|D|}(p)$ non è definita in $\mathbb{P}^n$.

② σ_i sono funzioni meromorfe aventi dei poli.

La <u>soluzione</u> a ① è considerare $|D|$ privo di punti base, ovvero b.p.f. (base-point free).

Questo non è un problema: se $P_1, \_, P_k$ sono punti base di D scriviamo $|D| = \mathrm{Fix}(D) + \mathrm{Mov}(D) = (P_1 + \_ + P_k) + |D'|$.

SPOILER! Lo vedremo più avanti ed è una cosa "culturale": funziona se alla fine $|D'| \neq \emptyset$.

Sia $|D|$ privo di punti base. Sia $\{\sigma_0, \_, \sigma_n\}$ base di $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Si definisce allora:
$$\begin{aligned} \varphi_{|D|} : X &\longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X,D)^\vee) \\ p &\longmapsto (\sigma_0(p) : \_ : \sigma_n(p)) \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE

Sia $P \in X$. Allora P non è punto base per $|D|$ se e solo se $H^0(\mathcal{O}_X(D)) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_p \cong H^0(X, \mathbb{C}_p)$.

Ovvero la successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

(ottenuta tensorizzando la successione per fasci grattacielo data da $0 \to \mathcal{I}_p \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathbb{C}_p \to 0$) è esatta sugli H^0.

- DIM.

P è un punto base per $H^0(X,D) \iff \forall f \in H^0(X,D) \ f(p) = 0$

$\iff H^0(X,D) \longmapsto 0 \in \mathbb{C}_p$.

Questo conclude. ■

Da questo risultato segue che

$$\varphi_{|D|}(P) = [D_P^\vee] \in \mathbb{P}(H^0(X,D)^\vee)$$

dove $D_p = \{ f \in H^0(X,D) \mid f(p) = 0 \}$.

La soluzione a ② si ottiene con il seguente lemma.

LEMMA

Sia $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ con $\phi = (\sigma_0, -, \sigma_n)$ meromorfe.
Supponiamo $\forall p \in X \ \exists \sigma_i$ tale che $\sigma_i(p) \neq 0$.
Allora ϕ si estende ad una mappa OLOMORFA $\overline{\Phi} : X \to \mathbb{P}^n$.

- DIM.

Se $p \in X$ non è polo, $\phi(p) = \overline{\Phi}(p)$ ben definita.

Sia $p \in X$ con p polo per qualche σ_i. Supponiamo:

$$n = \min_i \{ \mathrm{ord}_p(\sigma_i) \} \qquad \underline{\text{NB}}: \ n < 0.$$

Consideriamo un intorno U di p tale che p è l'unico polo di $\sigma_i|_U$ $\forall i$. Localmente $\sigma_i = \dfrac{h_i}{z^{n_i}}$ con h_i olomorfa.

Poniamo allora $g_i := z^{-n} \cdot \sigma_i$.

Per costruzione g_i è olomorfa $\forall i$ ed esiste un indice j tale che $g_j(p) = \text{cost.} \neq 0$ per scelta di tale n.

Inoltre, nell'intorno U usando coordinata z:

Con queste scritture si sottointende $p \mapsto 0$ in coordinate, cioè $z \neq 0$.

$$\overline{\Phi}(z) := [g_0(z) : \_ : g_n(z)] = \begin{cases} z^{-n} [\sigma_0(z) : \_ : \sigma_n(z)] & z \neq p \\ [g_0(z) : \_ : g_n(z)] & z = p \end{cases}$$

Così facendo, $\overline{\Phi}$ estende Φ a tutto X. ■

ESEMPIO

Sia $X = \mathbb{P}^1$ e $D = 2P$ dove $P = (1:0)$. Allora $H^0(X, D) = ?$

Consideriamo il ricoprimento $\{U_0, U_1\}$ dove

$$U_0 \cong \mathbb{C} \text{ con } z = \frac{z_1}{z_0} \quad \text{e} \quad U_1 \cong \mathbb{C} \text{ con } w = \frac{z_0}{z_1}.$$

Il Teorema visto su $H^0(X, D)$ dimostra che:

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D)) \cong \left\{ \frac{1}{z^2} p(z) \ : \ p(z) \text{ polinomio di grado } \leq 2 \right\}$$

$$\cong \left\{ \frac{c_0 z_0^2 + c_1 z_0 z_1 + c_2 z_1^2}{z_1^2} \right\}$$

Prendiamo allora come base di $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D))$:

$$\sigma_0 \equiv \frac{z_0^2}{z_1^2}, \qquad \sigma_1 = \frac{z_0 z_1}{z_1^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{z_1^2}{z_1^2}.$$

Allora $\varphi_{|D|} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$p \longmapsto (\sigma_0(p) : \sigma_1(p) : \sigma_2(p))$

e per il Lemma si può estendere "eliminando il denominatore" cioè

$$\varphi_{|D|} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$
$$(z_0 : z_1) \longmapsto (z_0^2 : z_0 z_1 : z_1^2)$$

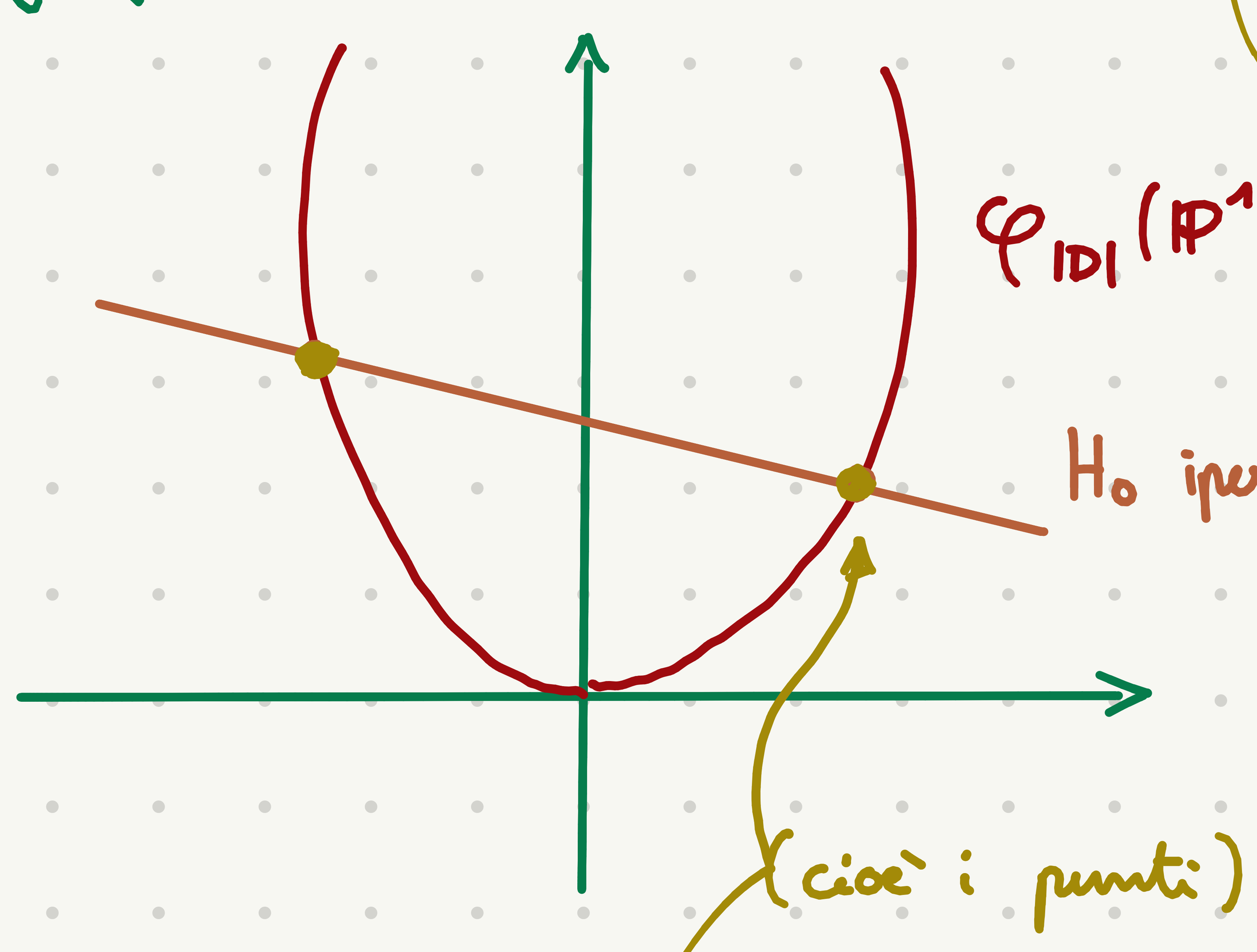
" IMMERSIONE di VERONESE ".

Chi è $\varphi_{|D|}(\mathbb{P}^1)$? Considerando le coordinate $(y_0 : y_1 : y_2)$ su $\mathbb{P}^1$

allora $\varphi_{|D|}(\mathbb{P}^1) = V(y_0 y_2 - y_1^2)$.

(è il supporto: $\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}(H^0(X,D)^\vee)$ dove il duale coincide con il supporto di un funzionale.)

Graficamente:



cioè se consideriamo H retta in $\mathbb{P}^2$ (ovvero H iperpiano) con

$$H = (b_0 y_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2)$$

allora:

$$\varphi_{|D|}(E) = H \cap \varphi_{|D|}(\mathbb{P}^1) \quad \xleftrightarrow{\text{corrisponde}} \quad E \in |D|.$$

OSS: c'è una relazione tra $E \in |D|$ e gli iperpiani intersecanti $\varphi_{|D|}(|D|)$.

DIVISORE ASSOCIATO A MORFISMO $X \to \mathbb{P}^n$

Viceversa, sia $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ morfismo e $H \subseteq \mathbb{P}^n$ iperpiano.

Possiamo allora definire il PULLBACK di H nel seguente modo.

Siano $y_0, \dots, y_n$ coordinate di $\mathbb{P}^n$ ed $h = \sum b_i y_i$ forma lineare,

che definisce $H = \mathrm{div}(h)$. Sia $Q = \varphi(P)$ e consideriamo un'altra

Ben def. perchè in dimensioni $n > 2$ divisore è Σ iperpiani.

forma lineare $h^0 = \sum b_i^{(0)} y_i$ tale che $h^0(Q) \neq 0$.

Così facendo $H = \frac{h}{h^0}$ come funzione su $\mathbb{P}^n$.

DEF. Pullback di H iperpiano

Sia $\varphi^*(H) := \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P\left(\frac{h}{h_0} \circ \varphi\right) \cdot P$.

LEMMA

Sia $\varphi = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) : X \to \mathbb{P}^n$ senza punti base. Poniamo allora

$$D := -\sum_{p \in X} \left[\min_i \{\operatorname{ord}_p(\sigma_i)\}\right] \cdot p.$$

Dato $H = \sum b_i y_i$ iperpiano, allora:

$$\varphi^*(H) = \operatorname{div}\left(\sum_i b_i \sigma_i\right) + D.$$

- **DIM.**

Sia $P \in X$ e σ_j tale che $\operatorname{ord}_P(\sigma_j) = -\operatorname{ord}_P(D)$.

Poniamo allora $h_0 = y_j$. Segue che:

$$\frac{h}{h_0} \circ \varphi = \frac{\sum b_i \sigma_i}{\sigma_j}.$$

σ_i e' la i-esima coordinata, per cui $\sigma_i = y_i \circ \varphi$

Quindi $\operatorname{ord}_p(\varphi^*(H)) = \operatorname{ord}_p(\sum b_i \sigma_i) - \operatorname{ord}_p(\sigma_j)$

$$= \operatorname{ord}_p(\sum b_i \sigma_i) + \operatorname{ord}_p(D).$$

In conclusione $\varphi^*(H) = \operatorname{div}(\sum b_i \sigma_i) + D$. ■

Corollario

Vale che $\varphi^*(H) \in |D|$.

Guardando ESEMPIO, si spostano i punti di D guardando a $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^n$, prendendo un iperpiano in $\mathbb{P}^n$ e facendo il pullback $\varphi^*_{|D|}$. Così si ottiene $\varphi^*(H)$ equivalente a D cioè $\varphi^*(H) \in |D|$.

Con la discussione fatta finora abbiamo dimostrato...

TEOREMA

C'è una corrispondenza biunivoca:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sistemi lineari } \bar{V} \subseteq H^0(X, D) \text{ dove:} \\ \bullet\ \bar{V} \text{ è b.p.f.} \\ \bullet\ \deg(D) = d \\ \bullet\ \dim(\bar{V}) = n+1 \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{mappe olomorfe non degeneri} \\ \varphi : X \to \mathbb{P}^n \\ \text{tali che } \deg(\varphi^*(H)) = d \end{array} \right\}$$

- <u>DIM.</u>

($\Rightarrow$) $\overline{V}$ induce $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ non degenere.

($\Leftarrow$) Dato $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ non degenere, preso H iperpiano abbiamo che $\varphi^*(H)$ è un divisore di grado d. La famiglia $\{\varphi^*(H)\}_H$ si dimostra essere un sistema lineare. (vedi: APPENDICE) $\blacksquare$

Collegheremo questa teoria con le prossime definizioni...

Si rivede sotto la def. di <u>pullback</u>!

Immagine Inversa di Divisori

Sia X superficie di Riemann compatta ed $f : X \to Y$ olomorfa. Sia $q \in Y$.

▸ **DEF.** $f^*(q) / f^*(D)$

Nelle ipotesi sopra si definisce:

$$f^*(q) := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{molt}_p(f) \cdot P \quad \text{come divisore su } X.$$

Quindi dato $D = \sum n_q \cdot q$ divisore su Y, si definisce

$$f^*(D) := \sum n_q \cdot f^*(q) \quad \text{divisore su } X.$$

▸ **PROPOSIZIONE**

Valgono i seguenti risultati.

(1) $f^* : \text{Div}(Y) \to \text{Div}(X)$ è omomorfismo di gruppi.

(2) Data $g : Y \to \mathbb{C}$ meromorfa:

$$f^*(\text{div}(g)) = \text{div}(f^*(g)) = \text{div}(g \circ f).$$

(3) Vale che $\deg(f^*(D)) = (\deg f) \cdot (\deg D)$.

(4) Vale che $f^*(\mathcal{O}_Y(D)) = \mathcal{O}_X(f^*(D))$.

Otteniamo anche la seguente...

▸ **DEF.** Divisore di Ramificazione

Data $f : X \to Y$ il DIVISORE DI RAMIFICAZIONE di f è

$$R = R_f := \sum_{p \in X} (\text{molt}_p(f) - 1) \cdot p.$$

Queste nozioni si ricollegano coi precedenti risultati...

TEOREMA

Sia $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ mappa olomorfa non degenere e supponiamo (per semplicità) che $\varphi(X) =: Y$ sia una curva algebrica di grado d. Allora

$$\deg(\varphi^*(H)) = \deg(Y) \cdot \deg(\varphi : X \to Y)$$

dove $H = (h=0) \cap Y$ con h "forma lineare generica".

Abbiamo la seguente definizione di $\deg(Y)$:

DEF. $\deg(Y)$

Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ curva algebrica. Poniamo:

$$\deg(Y) := \deg(H \cap Y) \quad \text{come divisore su } Y.$$

- **DIM Teorema**

Sia $p \in X$. Sia H iperpiano passante per $q = \varphi(p) \in \mathbb{P}^n$. Scelto h_0 forma lineare tale che $h_0(q) \neq 0$, avevamo definito il pullback $\varphi^*(H)$ e allora:

$$\operatorname{ord}_p(\varphi^*(H)) = \operatorname{ord}_p\left(\frac{h}{h_0} \circ \varphi\right) = \operatorname{molt}_p(\varphi) \cdot \operatorname{ord}_{\varphi(p)}\left(\frac{h}{h_0}\right).$$

Quindi:

$$\sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\varphi^*(H)) = \sum_{p \in X} \operatorname{molt}_p(\varphi) \cdot \operatorname{ord}_{\varphi(p)}(H) \cdot p$$
$$= \sum_{q \in Y} \sum_{p \in \varphi^{-1}(q)} \operatorname{molt}_p(\varphi) \cdot \operatorname{ord}_q(H)$$
$$= \left[\deg(\varphi : X \to Y)\right] \cdot \left[\sum_q \operatorname{ord}_q(H)\right]$$
$$\overset{!}{=} \deg(\varphi) \cdot \deg(Y).$$

∎

L'idea da tenere a mente ora è quella di un rivestimento $X \xrightarrow{\deg\varphi : 1} Y$ ramificato sull'immagine.

Corollario

Se $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ è un embedding (come varietà differenziabili: φ iniettiva + $d\varphi$ iniettiva, il fatto che φ sia propria segue da X compatto), allora $\deg(\varphi) = 1$.

Quindi $\deg(\varphi^*(H)) = \deg(\varphi(X))$.

Se φ è indotta da $|D|$ con $\deg(D) = d$, allora segue che $d = \deg(\varphi(X))$.

ESEMPIO

Sia $X = \mathbb{P}^1$ e $D = 2P$ dove $P = [1:0]$.

Allora $\deg(D) = 2$ e tramite $\varphi_{|D|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ è la immersione di Veronese, cioè $\varphi_{|D|}(X)$ è una conica.

Nel caso particolare di $\deg(\varphi : X \to Y) > 1$ rientrano le superfici iperellittiche...

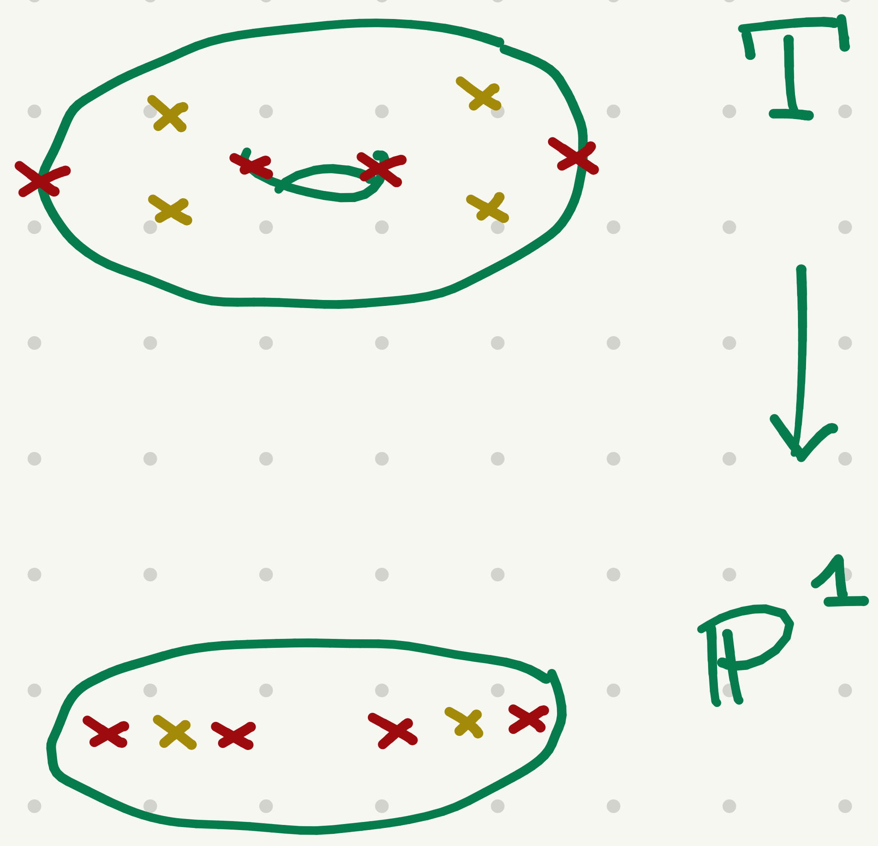
DEF. Superficie Iperellittica

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa. Si dice IPERELLITTICA se esiste

$$\varphi : X \to \mathbb{P}^1 \text{ olomorfa con } \deg\varphi = 2.$$

Degli esempi di tali superfici sono:

- $g = 1$: il toro è un'ipersuperficie tramite la mappa



nel disegno a sx. Dato $q \in \mathbb{P}^1$:

$$\varphi^*(q) = \begin{cases} P_1 + P_2 \\ 2P \end{cases}$$

al variare di tale q.

$\rightsquigarrow$ La mappa sopra si descriverà più avanti!

... ora entrerà in gioco il "nostro eroe"...

Divisore Canonico

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa.

Abbiamo definito:

$$\Omega^1_X := \text{fascio delle 1-forme su } X$$

dove localmente in $U = U(p)$ con coordinata z, una 1-forma $\omega \in \Omega^1_X(U)$ si scrive $\omega = f(z)\,dz$ con f olomorfa in U.

- <u>OSS</u>. Ω^1_X fascio invertibile

Vale che $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ implica Ω^1_X è un fascio invertibile:

$$\begin{aligned} \Omega^1_X(U) &\simeq \mathcal{O}_X(U) \\ f(z)\,dz &\longmapsto f(z) \end{aligned}.$$

Un fascio invertibile è caratterizzato dal <u>cociclo</u>: andiamo a cercarlo.

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ricoprimento di X, con

$$\varphi_i : U_i \to V_i \cong \Delta \subseteq \mathbb{C} \quad \text{carta locale}.$$

Preso $\omega \in \Omega^1_X$ in carte scriveremo $\begin{cases} \omega_i|_{U_i} = f_i\, dz_i \\ \omega_j|_{U_j} = f_j\, dz_j \end{cases}$

e su $U_i \cap U_j$ scriviamo la mappa di transizione

$$\varphi_{ij} : z_i \longmapsto z_j = \varphi_{ij} \cdot z_i \,.$$

Quindi $f_j(z_j) \cdot dz_j = f_j(\varphi_{ij}(z_j)) \cdot \varphi_{ij}' \cdot dz_i$, che individua proprio il cociclo φ_{ij}'.

Abbiamo il seguente risultato:

▸ **PROPOSIZIONE**

Siano $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1_X(X)$. Allora $\exists!$ funzione meromorfa g tale che $\omega_2 = g \cdot \omega_1$.

IDEA: in questo caso tutto funziona perchè su U_i abbiamo coord. fissate e per ω_1, ω_2 abbiamo gli stessi cocicli.

• DIM.

Consideriamo $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ricoprimento ed in U_i scriviamo:

$$\omega_1|_{U_i} = f_i^{(1)} dz_i \qquad e \qquad \omega_2|_{U_i} = f_i^{(2)} dz_i .$$

Poniamo $g|_{U_i} := f_i^{(2)} / f_i^{(1)}$. Verifichiamo che così definita la mappa g si "incolla bene". In $U_i \cap U_j$:

$$\frac{f_i^{(2)}}{f_i^{(1)}} = \frac{\varphi_{ij}' f_j^{(2)}}{\varphi_{ij}' f_j^{(1)}} = \frac{f_j^{(2)}}{f_j^{(1)}} \qquad \text{come volevamo.}$$

Quindi g è funzione meromorfa globale su X. ■

Si arriva così alla definizione ...

▸ **DEF. Divisore Canonico**

Un DIVISORE CANONICO su X è il divisore associato ad una 1-forma $\omega \in \Omega^1_X$.

Se localmente $\omega = f(z) dz$ allora $\operatorname{div}(\omega) := \operatorname{div}(f)$.

Poniamo anche $\operatorname{ord}_p(\omega) := \operatorname{ord}_p(f)$ localmente, per cui

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot P .$$

La Proposizione sopra dice che due divisori canonici sono in realtà LINEARMENTE EQUIVALENTI. Infatti:

$$\omega_2 = g \cdot \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\omega_2) = \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(\omega_1) .$$

In altre parole, la classe di divisori canonici è la stessa in $\mathrm{Div}(X)/_\sim$ (quoziente per sistemi equivalenti, lo vedremo più avanti).

▸ NOTAZIONE

Un (il) divisore canonico su X si denota con K_X.

Calcoli Espliciti di K_X

$\boxed{1}$ $X = \mathbb{P}^1$

omettto il pto P siccome sono linearm. equivalenti!

Vale che $K_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2 \cdot P)$ con $P = [1:0]$.

Per vederlo, sia $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ con

U_0 coordinate $z = \frac{z_1}{z_0}$ e U_1 coordinate $w = \frac{z_0}{z_1}$.

Scriviamo allora $\omega|_{U_0} = f_0(z)\, dz$ e $\omega|_{U_1} = f_1(w)\, dw$.

Nell'intersezione $U_0 \cap U_1$ vale che $w = \frac{1}{z}$ quindi si trova che $dw = w'(z)\, dz = -\frac{1}{z^2}\, dz$.

Avendo il cociclo $-\frac{1}{z^2}$, si ottiene che:

$$f_0(z)\, dz = f_1\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz.$$

Segue che il cociclo (funz. di transizione) che caratterizza il fascio invertibile Ω^1_X è $\frac{1}{z^2} = z^{-2}$.

Quindi $\Omega^1_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$.

Con un esempio, se $\omega = 1 \cdot dz$ allora

$$\mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -2 \cdot P \quad \text{con } P = (1:0).$$

$\boxed{2}$ $X = \text{Toro} = \mathbb{C}/\Lambda$

Si ha che X superficie di Riemann di genere $g = 1$.

Scelgo $\omega = 1 \cdot dz$. Siccome X è quoziente di $\mathbb{C}$ con l'azione data da traslazioni, le mappe di transizione sono sempre 1. $\rightsquigarrow$ Ci aspettiamo che K_X = mappe costanti.

Formalmente, consideriamo il rivestimento universale $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$.

Ma allora dati intorni U_1, U_2 traslati di un certo $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\omega|_{U_1} = 1 \cdot dz \quad \text{e} \quad \omega|_{U_2} = 1 \cdot d(z+\alpha) = 1 \cdot dz.$$

Segue che cociclo $\longleftrightarrow$ traslazioni per cui:

$\Rightarrow$ K_X è il divisore associato alla funzione 1 costante.

$\Rightarrow$ $K_X = 0$ cioè $\Omega^1_X \cong \mathcal{O}_X$.

Riscriviamo con le nuove definizioni il teorema...

▶ TEOREMA Riemann – Hurwitz (pt. 2)

Siano X, Y superfici di Riemann compatte connesse.

Dato $\pi : X \to Y$ morfismo non costante, si trova che

$$K_X \sim \pi^*(K_Y) + R$$

dove R = ramificazione di π.

• DIM.

{ Idea: se $z \mapsto z^n$ allora $dz \mapsto z^{n-1} dz$ con $z^{n-1} = R$. }

Sia
$$\begin{array}{ccc} U \subseteq X & \xrightarrow{\pi} & Y \supseteq V \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ p & \longmapsto & q \end{array}$$
dove $\begin{cases} U & \text{coordinata } z \\ V & \text{coordinata } w \end{cases}$.

Localmente vale che $\pi: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ z & \longmapsto & z^n = w \end{array}$.

Sia $\omega \in \Omega^1_Y$ una 1-forma con $\omega|_V = f(w) \cdot dw$.

Così facendo: $\pi^*\big(f(w)\,dw\big)$ corrisponde a $\pi^*(\mathrm{div}(\omega))$.

(sto facendo pullback)

Calcolo

$$\pi^*(f(w)\,dw) = \big(n \cdot f(z^n)\big) \cdot z^{n-1}\,dz$$

per cui

$$\mathrm{div}(\pi^*(\omega))[U] = \underbrace{\pi^*(\mathrm{div}(\omega))}_{\pi^*(K_Y)} + \underbrace{[\mathrm{ord}_p(\pi) - 1] \cdot P}_{R}$$

e questo conclude.

Se localmente in V $K_Y(V) = \mathrm{div}(f(w))$, allora

$$\begin{cases} \pi^*(K_Y)(U) = \mathrm{div}(f(z^n)) \\ R(U) = \mathrm{div}(z^{n-1}) \quad \text{ramificazione.} \end{cases}$$

Questo conclude. ■

Corollario

Vale che $\deg(K_X) = 2g - 2$.

RECAP: X superficie di Riemann.

Abbiamo $\Omega^1_X :=$ fascio dei differenziali olomorfi.

Cioè localmente $\omega = f(z)\,dz$ con f olomorfa.

- Oss.

Abbiamo una corrispondenza:

$$\Omega^1_X \longleftrightarrow \text{FIBRATO COTANGENTE}$$

fascio invertibile — fibrato in rette

Infatti abbiamo che

$$\omega = f(z_1)\,dz_1 \quad \text{in } U_1 \qquad e \qquad \omega = f(z_2)\,dz_2 \quad \text{in } U_2$$

da cui $f(z_2)\,dz_2 = f(g_{12}(z_1))\,g_{12}'\,dz_1$. (Come si collega??)

- DA RICORDARE: Slogans

→ K_X è "intrinseco" alla varietà X.

→ K_X si comporta bene "in famiglie", cioè dato D disco:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & & \mathcal{X}_t = \text{sup di Riemann di genere } g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \ni & t \end{array}$$

cioè se le fibre sono sup. di Riemann, il divisore canonico si comporta bene su queste "restrizioni", i.e. deriva da un divisore più generale.

→ $\mathcal{O}_X(K_X)$ è un "fascio dualizzante". si vedrà più avanti...

FORMULA di RIEMANN - ROCH

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa.

Dato D divisore su X, vogliamo studiare:

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) =: H^i(X, D) =: H^i(D).$$ (abbreviamo notaz.)

▸ DEF. Caratteristica di Eulero-Poincaré Olomorfa (Algebrica)

Definiamo:
$$\chi(D) := \sum_i (-1)^i \cdot h^i(X, D)$$
dove $h^i = \dim H^i$.

▸ OSS: se X superficie di Riemann, $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$.

Ma allora per proprietà dei fasci coerenti $h^i(D) = 0 \ \forall i \geq 2$.

Quindi $$\chi(D) := h^0(D) - h^1(D).$$

▸ ESEMPIO Caso $D = 0$

Sia $D = 0$. Allora
$$\chi(X) = h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X).$$
Se X superficie di Riemann compatta connessa $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$.

Questo motiva la seguente definizione.

▸ DEF. Genere

Il GENERE ARITMETICO di X è
$$p_a(X) = 1 - \chi(\mathcal{O}_X).$$

Nel caso in cui X compatta connessa vale che:
$$p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X).$$

Dopo questo preambolo, enunciamo:

TEOREMA di RIEMANN-ROCH (v. 1)

Sia X superficie di Riemann compatta connessa e D divisore su X. Allora:

$$\chi(D) = \deg(D) + \chi(X)$$

dove $\begin{cases} \chi(D) = h^0(D) - h^1(D) \\ \chi(X) = \chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) = 1 - p_a(X). \end{cases}$

Quindi si può riscrivere il Teorema:

$$h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - p_a(X).$$

Vediamo per la dimostrazione il seguente risultato.

LEMMA 1

Dato $p \in X$ e D divisore, esistono le successioni esatte:

① $0 \to \mathcal{I}_p \cong \mathcal{O}_X(-P) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$

② $0 \to \mathcal{O}_X(D-P) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p \longrightarrow 0.$

• DIM.

Ricordiamo: $\mathcal{I}_p = \{f \in \mathcal{O}_X : f(p) = 0\} = \ker\left(\mathcal{O}_X \xrightarrow{val_p} \mathbb{C}_p\right)$

$\cong \mathcal{O}_X(-P) = \{f \text{ meromorfe} : \operatorname{div}(f) - P \geq 0\}$

Questo motiva ①. Per ②, tensorizzo con $\mathcal{O}_X(D)$ ①: si ottiene che $\begin{cases} \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-P) \cong \mathcal{O}_X(D-P) \\ \mathbb{C}_p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) \cong \mathbb{C}_p \end{cases}$

L'esattezza segue dal fatto che i fasci sono invertibili, quindi $\otimes\, \mathcal{O}_X(D)$ è esatto. ∎

(è un FASCIO GRATTACIELO concentrato in P, dove al posto di $\mathbb{C}$ ho $\mathbb{C}[[z]]/z^n$.)

LEMMA 2

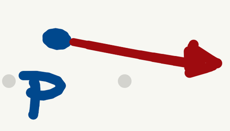
Dato $P \in X$ ed $n \in \mathbb{N}^+$, poniamo $\mathcal{O}_\Delta \cong \mathbb{C}[[z]]/_{z^n}$.

Cioè Δ "=" nP come divisore di molteplicità n.

Allora esiste una successione esatta:

$$0 \to \mathcal{O}_X(-nP) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_\Delta \to 0.$$

In particolare, $(\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$ è il FASCIO GRATTACIELO CONCENTRATO in P:

- se $\underline{n=1}$: $\mathbb{C}_P \rightsquigarrow$ 
- se $\underline{n=2}$: $\mathbb{C}[[x]]/_{x^2} \rightsquigarrow$ 

cioè i coefficienti degli ordini superiori mi descrivono le "derivate superiori". Se queste derivate ulteriori si annullano, segue un aumento della molteplicità di zero in P:

$$f \text{ si annulla in } P \iff f = a_1 z + \dots$$

$$f \text{ si annulla di ordine 2 in } P \iff f = a_2 z^2 + \dots$$

$$\vdots$$

- DIM Lemma 2

Osserviamo che $\mathcal{O}_X(-nP) = \{ f \in \mathcal{O}_X : f \text{ si annulla di ordine} \geq n \text{ in } P \} \overset{!}{=} \ker\left(\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]/_{z^n}\right)$

e da questo si conclude l'esattezza. ■

- DIM Teorema di Riemann-Roch

① Supponiamo che D sia un divisore effettivo: $D = \sum n_i P_i \geq 0$

cioè $n_i \geq 0 \ \forall i$. Facciamo un'induzione su $\deg D$:

- $\underline{\deg D = 0}$: siccome $D \geq 0$, segue che $D = 0$. Ma allora abbiamo $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X$. Quindi $\chi(D) = \chi(X)$ per definizione e allora il Teorema e' verificato.

- $\deg D = d > 0$: siccome $d > 0$, $\exists\ P \in \mathrm{Supp}(D)$.

Scriviamo allora $D = D' + P$: così D' e' divisore effettivo e $\deg D' = d-1$. Inoltre per Lemma 1 è esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D') \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_P \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

Ricordiamo che $\mathbb{C}_P$ è fascio grattacielo, per cui:

$$H^0(\mathbb{C}_P) = \mathbb{C} \qquad \text{mentre} \qquad H^1(\mathbb{C}_P) = 0.$$

$\left[\begin{array}{l} H^i = 0 \\ \forall\, i > \dim(\text{Supporto}) \end{array} \right.$

Per le proprietà di χ abbiamo allora che l'esattezza di $(*)$ implica $\chi(D) = \chi(D') + \chi(\mathbb{C}_P)$ (siccome $(*)$ induce successioni esatte in omologia, dove le dimensioni degli H^i si sommano come desiderato). Pertanto:

$$\begin{cases} \chi(D) = \chi(D') + 1 \\ \deg(D) = \deg(D') + 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{induzione}} \text{Formula di Riemann-Roch.}$$

Questo conclude per D effettivo.

② In generale per D divisore scriviamo $D = D_1 - D_2$ con $D_1, D_2 \geq 0$.

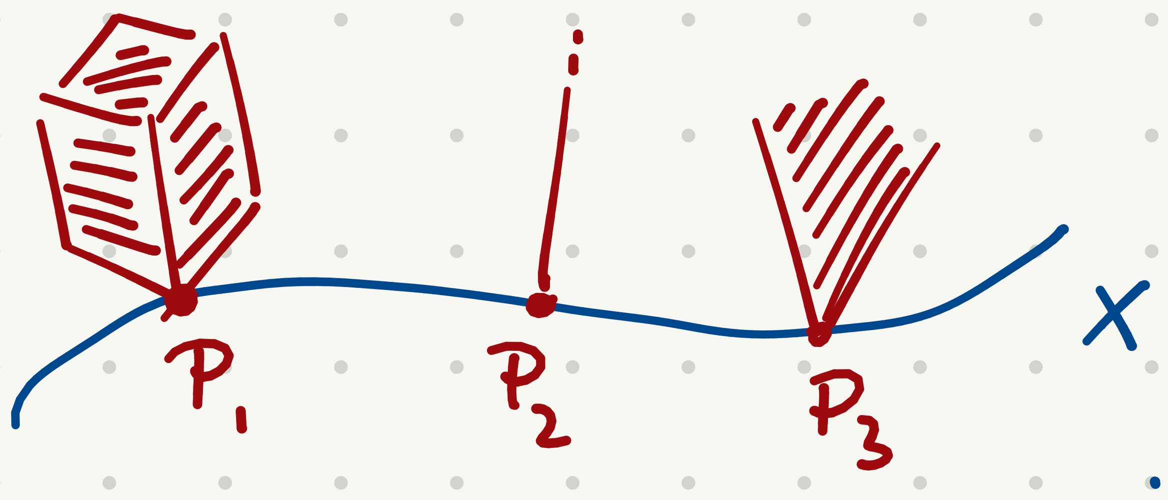
Allora per il Lemma 2 esiste una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_2} \longrightarrow 0$$

dove se $D_2 = \sum n_i P_i$, poniamo:

$$\mathcal{O}_{\Delta_i^{(2)}} := \mathbb{C}[[z]]/(z^{n_i}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{O}_{D_2} := \bigoplus_i \mathcal{O}_{\Delta_i^{(2)}}.$$

Graficamente, in ogni punto $\mathcal{O}_{D_2}$ è nullo apparte per i punti P_i nel supporto di D_2:



Abbiamo che $\mathcal{O}_{D_2}$ è un fascio grattacielo, quindi:

$$h^0(\mathcal{O}_{D_2}) = \sum n_i = \deg(D_2) \quad e \quad h^1(\mathcal{O}_{D_2}) = 0.$$

Per il caso ① abbiamo che:

$$\chi(D_1) = \deg(D_1) + \chi(X)$$

e per quanto visto $\chi(\mathcal{O}_{D_2}) = \deg(D_2)$. Ma

$$\deg(D) = \deg(D_1) - \deg(D_2)$$

per cui segue:

$$\chi(D) = \chi(D_1) - \chi(\mathcal{O}_{D_2}) = \deg(D_1) + 1 - p_a(X) - \deg(D_2).$$

Questo conclude. ■

Vediamo l'enunciato classico del Teorema, per cui serve...

▸ **DUALITÀ di SERRE** ⇝ dimostrazione più avanti...

K_X è un fascio dualizzante. Cioè in dimensione 1:

$$\forall D \text{ divisore} \qquad H^1(D)^\vee \cong H^0(K_X - D).$$

Allora si può enunciare Riemann-Roch come:

▸ **TEOREMA di RIEMANN-ROCH (v.2)**

Vale che:

operativamente nel calcolo delle dim delle olomorfe con div = D, c'è questo "scarto".

$$h^0(D) - h^0(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

· DIM.

Segue dal Teorema v.1 unito alla dualità di Serre e uguaglianza di generi che enunciamo sotto. ■

Il risultato che banalizza la precedente dimostrazione è...

▸ UGUAGLIANZA dei GENERI

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa. Definiamo:

$$g := \text{genere topologico} = \frac{1}{2}\dim(H_1(X,\mathbb{R})).$$

$$p_g := \text{genere geometrico} = h^0(K_X).$$

$$p_a := \text{genere aritmetico} = 1 - \chi(\mathcal{O}_X) = h^1(\mathcal{O}_X).$$

Abbiamo allora la seguente proposizione.

▸ PROPOSIZIONE

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa. Allora

$$g = p_g = p_a.$$

• DIM.

La Dualità di Serre applicata a $D=0$ implica che:

$$p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X) \overset{D.S.}{=} h^0(K_X) = p_g.$$

Per Riemann-Hurwitz $\deg(K_X) = 2g-2$.

Per Riemann-Roch v. 1 con $D = K_X$ allora:

$$h^0(K_X) - h^1(K_X) = \deg(K_X) + 1 - p_a(X) \qquad (*)$$

ma d'altra parte per Dualità di Serre

$$h^0(K_X) = p_g = p_a \qquad e \qquad h^1(K_X) = h^0(\mathcal{O}_X) - 1$$

e unendo i risultati con $(*)$:

$$p_g - 1 = 2g - 2 + (1 - p_a) \implies p_a + p_g = 2g. \qquad \blacksquare$$

▸ OSS. Curva Singolare $\Rightarrow$ Genere Cambia

Se $X \subseteq \mathbb{P}^2$ curva singolare di grado d, allora preso

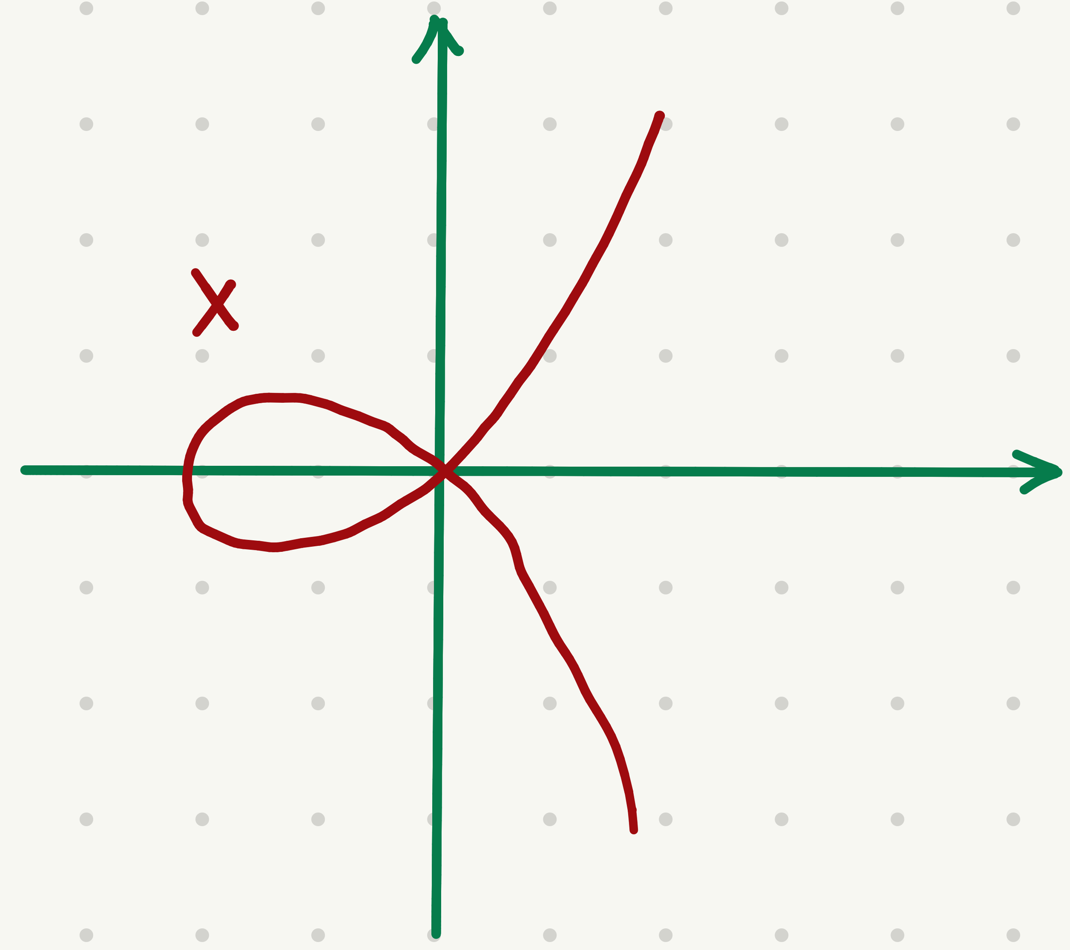
$$X^\nu \longrightarrow X \qquad \text{desingolarizzazione}$$

troviamo che $g(X^\nu) = p_a(X^\nu) \neq p_a(X)$.

Cioè il genere può cambiare.

ESEMPIO

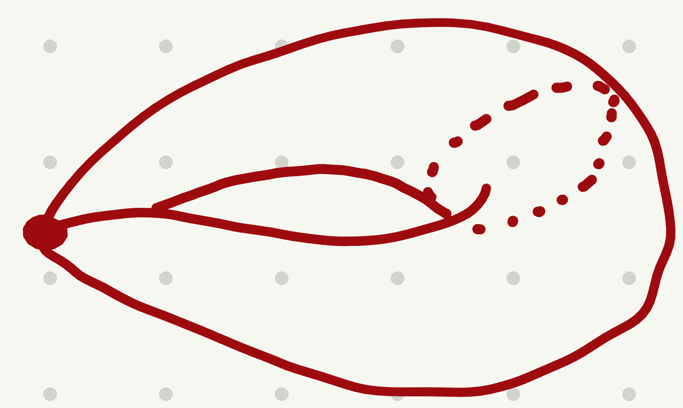
Data una cubica singolare in $(0,0)$:



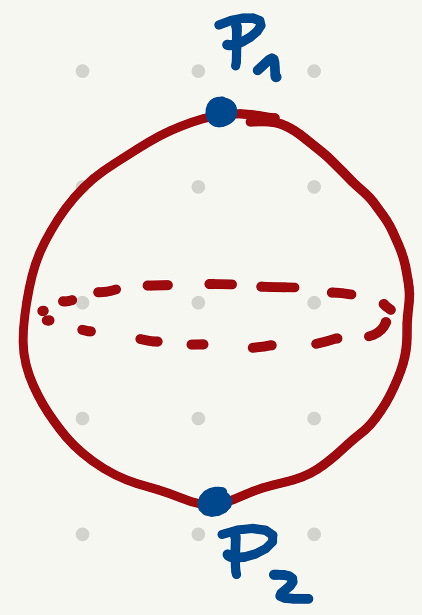
$$X: \ y^2 = x^2(x+1).$$

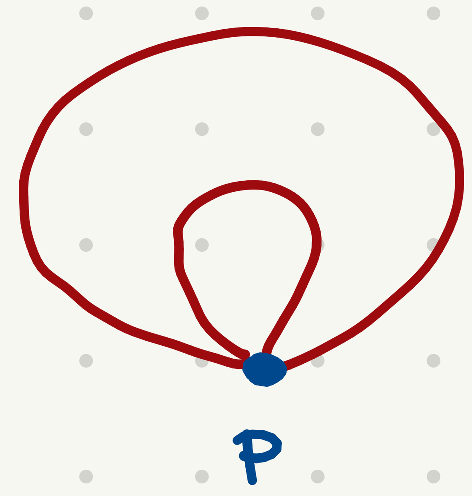
Considero la chiusura proiettiva $\overline{X} \subset \mathbb{P}^2$

allora topologicamente si ottiene:

$$X \cong_{top}$$  .

Come visto a inizio corso si può allora desingolarizzare:

$X^\nu =$ 

$\xrightarrow{P_1 \equiv P_2}$ 

$= X$

per cui il grado geometrico p_g non coincide con p_a ...

Dualità di Serre

ORIGINE: Il Problema di Mittag-Leffler

Sia X superficie di Riemann e $\{P_i\} \subseteq X$. Cercare, se esiste, una funzione meromorfa su X tale che

- f olomorfa fuori da $\{P_i\}$
- $\forall P_i$ la parte principale di polo di f è un $h_i(z)$ fissato, dove $h_i(z)$ è polinomio polare $h_i = \sum_{k=-n_i}^{-1} a_k z^k$.

Osserviamo che localmente questo si può sempre fare, ma non è detto che tale funzione meromorfa esisti globalmente.

▸ DEF. Coda di Laurent

Una CODA DI LAURENT in p è:

$$r_p(z) = \sum_{k=-n_p}^{h} a_k z^k \qquad \text{con } z \text{ coordinata locale in } p.$$

Poniamo $\deg(r_p) = h$.

Andiamo ora ad interpretare $H^0(\mathcal{O}_X(D))$ e $H^1(\mathcal{O}_X(D))$ mediante le code di Laurent. Così facendo, si può rispondere al problema di Mittag-Leffler.

▸ DEF. Divisore di Code di Laurent

Un DIVISORE di CODE di LAURENT è una sommatoria formale del tipo $\sum_{\text{finita}} r_p \cdot P$.

Se $D = \sum n_i P_i$ è un divisore:

▸ **DEF.** Fascio delle code di Laurent

Fissato D come sopra, si definisce il FASCIO delle CODE di LAURENT indotte da D, $\mathcal{T}(D)$, come:

$$[\mathcal{T}(D)](U) = \left\{ \sum r_p \cdot P \mid \forall P_i \quad \deg(r_{P_i}) < -n_i \right\}.$$

▸ **ESEMPIO**

Sia $D = \emptyset$. Allora

$$[\mathcal{T}(\emptyset)](U) = \left\{ \sum r_p \cdot P \mid \forall P \quad \deg(r_p) < 0 \right\}.$$

Poniamo inoltre $\mathcal{T}(X) = \{$ divisori di code di Laurent $\}$.

Fissato D divisore, allora esiste la "mappa di TRONCAMENTO"

$$t_D : \mathcal{T}(X) \longrightarrow \mathcal{T}(D)$$
$$r_p = \sum_{k=-n}^{h} a_k z^k \longmapsto t_D(r_p) = \sum_{k=-n}^{-n_i-1} a_k z^k .$$

Consideriamo $\mathcal{M}$ = fascio delle funzioni meromorfe, dove

$$\mathcal{M}(U) = \{ \text{fascio delle funzioni meromorfe su } U \}.$$

Fissato quindi $D = \sum n_i P_i$, poniamo:

$$\alpha_D : \mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{T}(D)(U)$$
$$f \longmapsto \sum r_{P_i}(f) \cdot P_i$$

dove se f in P_i si scrive $f = \sum_{k \geq -n} a_k z^k$, allora

$$r_{P_i}(f) = \sum_{k=-n}^{-n_i-1} a_k z^k .$$

Così facendo, per costruzione abbiamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{i_D} \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha_D} \mathcal{T}(D) \longrightarrow 0 .$$

L'esattezza segue dal fatto che:

$\ker \alpha_D = \{ f$ meromorfe tale che $\mathrm{ord}_{p_i}(f) \geq -n_i \}$

e quindi coincide con $\mathcal{O}_X(D)$. Ma allora:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X(D)) \to H^0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}(X) \to H^0(\mathcal{T}(D)) \to$$
$$\to H^1(\mathcal{O}_X(D)) \to H^1(\mathcal{M}) \to \dots$$

ma vale il seguente

FATTO $H^1(\mathcal{M}) = 0$.

In altre parole, per $z \in \mathcal{T}(D)$ vale che $z \in \mathrm{Im}\,\alpha_D$ se e solo se in $H^1_X(D)$ la sua classe è 0.
$\Rightarrow$ Posso trovare la soluzione al problema di Mittag-Leffler se e solo se ho 0 in $H^1(D)$.

Quindi per esattezza segue che:

$$\begin{cases} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \ker \alpha_D \\ H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = \mathrm{coker}\,\alpha_D = H^0(\mathcal{T}(D)) / \mathrm{Im}\,\alpha_D \end{cases} .$$

Consideriamo ora:

(cioè $\mathrm{div}(\omega) - D \geq 0$)

$$\mathcal{O}_X(K_X - D) \cong \Omega^1_X(-D) = \left\{ \begin{array}{l} \omega = f(z)dz \text{ localmente,} \\ \text{tale che } \mathrm{ord}_{p_i}(f) \geq n_i \end{array} \right\} .$$

def. di div. canonico come 1-forme.

Vogliamo costruire ora un PAIRING del tipo:

$$H^0(K_X - D) \times H^1(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

così da ottenere la dualità cercata.

DEF. Mappa di Serre

Definiamo $\mathrm{Res}: H^0(K_X - D) \times H^0(\mathcal{T}(D)) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\omega, T) \longmapsto \mathrm{Res}(\omega, T)$$

dove $\omega \in H^0(K_X - D) = \{ \omega \text{ 1-forma} \mid \mathrm{div}(\omega) - D \geq 0 \}$ e

$\forall P_i \in Supp(D)$ sia U_i intorno di P_i tale che

$$\omega/_{U_i} = \left(\sum_{k \geq -m_i} c_k z^k \right) dz .$$

Inoltre $T \in H^0(\mathcal{T}(D))$ con T in U_i che si scrive

$$T/_{U_i} = \sum_{k=-n}^{-m_i-1} a_k z^k .$$

Allora il RESIDUO in P_i è $Res_{P_i}(\omega, T) = \sum_{k \geq m_i} a_{-k-1} \cdot c_k$,

ovvero il coeff di $[z^{-1}]$ del prodotto locale $T \cdot \omega$.

Segue che $Res(\omega, T) := \sum_{P_i \in supp(D)} Res_{P_i}(\omega, T)$.

A questo punto, l'idea dietro alla dualità di Serre è:

(1) la mappa $H^0(K_X - D) \times Im(\alpha_D) \longmapsto 0$, cioè

$\forall \omega \in H^0(K_X - D)$ $\forall T \in Im(\alpha_D)$ $Res(\omega, T) = 0$.

Si considera allora la mappa indotta:

$$H^0(K_X - D) \times H^0(\mathcal{T}(D)) / Im(\alpha_D) \longrightarrow \mathbb{C} .$$

Per la precedente successione esatta si ottiene

$$H^0(\mathcal{T}(D)) / Im(\alpha_D) = coker(\alpha_D) \cong H^1(\mathcal{O}_X(D)).$$

(2) la mappa di Serre indotta

$$Res : H^0(K_X - D) \times H^1(\mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è un PERFECT PAIRING, ovvero $Res(\omega, T)$ è una forma bilineare non degenere.

Abbiamo con questi step dimostrato:

TEOREMA Dualità di Serre

C'è un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res} : H^0(K_X - D) &\xrightarrow{\sim} H^1(D)^\vee \\ \omega &\longmapsto \mathrm{Res}(\omega, -) . \end{aligned}$$

APPLICAZIONI della Dualità di Serre

RICORDO:

- se $\deg(D) < 0$ allora $H^0(D) = 0$ $(\Leftrightarrow |D| = \emptyset)$.
- $\deg K_X = 2g - 2$ (per mappa di Riemann-Hurwitz)

Segue da questi fatti che:

$$\deg(K_X - D) = 2g - 2 - \deg(D)$$

per cui, unendo con Serre...

Corollario

Se $\deg(D) > 2g - 2$ allora $H^1(D) = 0$.

- DIM.

Per dualità $(H^1(D))^\vee \cong H^0(K_X - D)$ e nelle ipotesi del Corollario $\deg(K_X - D) < 0$, per cui $H^0(K_X - D) = 0$.

Un' altra applicazione si trova nel prossimo capitolo...

Divisori di Grado Alto

- **DEF.** Divisore Molto Ampio

Un divisore D su una varietà complessa X si dice MOLTO AMPIO se $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^n$ è un embedding. Cioè:

0) $|D|$ è senza punti base.

1) $\varphi_{|D|}$ è iniettiva.

2) $d\varphi_{|D|}$ è iniettivo.

Ricordiamo che se $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$ base di $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ allora

$$\begin{aligned} \varphi_{|D|} : X &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\longmapsto (\sigma_0(p) : \dots : \sigma_n(p)) \end{aligned}$$

- **PROPOSIZIONE** $\varphi_{|D|}$ embedding

(0) $\varphi_{|D|}$ è morfismo $\iff$ $|D|$ senza punti base

$\iff$ $\forall p \in X \ \exists \sigma \in H^0(D)$ tale che $\sigma(p) \neq 0$.

(1) Sia $\varphi_{|D|}$ ben definito (cioè vale (0)). $\varphi_{|D|}$ è iniettiva se

$\forall P \neq Q : \ \exists \sigma \in H^0(D)$ tale che $\sigma(P) = 0 \wedge \sigma(Q) \neq 0$.

(2) Il differenziale $d\varphi_{|D|}$ è iniettivo in P se e solo se

$\exists \sigma \in H^0(D)$ tale che $\sigma(P) = 0$ e $\mathrm{ord}_P(\sigma) = 1$.

- DIM.

(0) Già visto in precedenza, per definire $\varphi_{|D|}$.

(1) $\varphi_{|D|}$ iniettiva se $\forall P \neq Q$ $\varphi_{|D|}(P) \neq \varphi_{|D|}(Q)$.

Fissato $P \in X$, $\{\sigma \mid \sigma(P) = 0\}$ ha codimensione 1.

Scegliamo $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$ tale che $\sigma_0(P) = 1$ e $\sigma_i(P) = 0 \ \forall i \geq 1$.

Allora $\varphi_{|D|}(P) = (1:0:\_:0)$ e siccome $\varphi_{|D|}(P) \neq \varphi_{|D|}(Q)$

$\exists\, i>0$ tale che $\sigma_i(Q) \neq 0$.

(2) Lo spazio tangente ad X in P è $\cong \left(\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \right)^\vee$ (visto ad EGA) dove indichiamo:

$$\mathfrak{m}_P = \mathcal{I}_P \text{ ideale max di } \mathcal{O}_{X,P} = \{ f : f(P) = 0 \}.$$

Quindi $d\varphi_{|D|} : T_{X,P} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n, \varphi(P)}$ è iniettivo $\iff$

$$T_{X,P} \cong \mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}} X} \qquad T_{\mathbb{P}^n,\varphi(P)} \cong \mathbb{C}^n \cong \ker\{ H^0(D) \to \mathbb{C}_P \}$$

$\iff \ker(H^0(D) \to \mathbb{C}_P) \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$ | dim finita: inj se $\dim_{\mathbb{C}} X \leq n$.

$\iff \exists\, \sigma \in H^0(D)$ che si annulla in P con ordine 1. ■

► DEF. Divisore Ampio

Un divisore D si dice AMPIO se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che nD è molto ampio.

Otteniamo un risultato più specifico per X SdR...

► TEOREMA

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa. Sia D un divisore su X e $|D|$ sistema lineare associato a D. Definiamo $\varphi = \varphi_{|D|}$ la mappa indotta. Allora:

(1) $|D|$ senza punti base $\iff \varphi_{|D|}$ è morfismo

$\iff \forall P \in X \quad h^0(D-P) = h^0(D) - 1$.

(2) D è molto ampio $\iff \forall P, Q \in X$ (eventualmente anche $P=Q$)

$h^0(D-P-Q) = h^0(D) - 2$.

• <u>DIM.</u>

(1) Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_P = \mathcal{O}_X(-P) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{C}_P \longrightarrow 0$$

e tensorizziamo con $\mathcal{O}_X(D)$ per trovare:

$$0 \to \mathcal{O}_X(D-P) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathbb{C}_P \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) \cong \mathbb{C}_P \to 0. \quad (*)$$

Per il criterio visto sopra allora:

$|D|$ senza punti base $\iff \forall P \in X \quad val_P : H^0(\mathcal{O}_X(D)) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_P$

$\iff \ker(val_P)$ ha codim $= 1$.

Ma $\ker(val_P) \cong H^0(\mathcal{O}_X(D-P))$ per la successione esatta $(*)$.

Quindi: P non è punto base $\iff h^0(D-P) = h^0(D) - 1$.

(2) Sia D tale che $h^0(D-P) = h^0(D) - 1 \quad \forall P \in X$,

altrimenti non ha senso parlare di embedding di φ.

($\Leftarrow$) supponiamo per assurdo che $\varphi_{|D|}(P) = \varphi_{|D|}(Q)$ per $P, Q \in X$.

Allora $H^0(D-P) = H^0(D-Q)$ e quindi | Come sist. lineare si ragiona su $(*)$.

$$H^0(D-P-Q) = H^0(D-P) = H^0(D-Q)$$

perchè se f si annulla sia in P che in Q, sta in tutti i gruppi sopra. Allora $h^0(D-P-Q) = h^0(D) - 1$. ↯

($\Rightarrow$) Viceversa, se $\exists\, P, Q \in X : \quad h^0(D-P-Q) = h^0(D) - 1$

allora dalla successione esatta

$$0 \to H^0(D-P-Q) \to H^0(D-Q) \to \mathbb{C}_P \qquad (*)$$

abbiamo che $H^0(D-P-Q) \cong H^0(D-Q)$ perchè hanno la stessa dimensione. Quindi tutte le sezioni che si annullano in Q

si annullano anche in P. Equivalentemente:

$$0 \to H^0(D-P-Q) \to H^0(D) \to \mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q .$$

Abbiamo visto che:

$$\varphi_{|D|} \text{ iniettiva} \overset{\text{Prop.}}{\iff} \forall P,Q \in X \quad \exists\ \sigma_1, \sigma_2 \in H^0(D) \text{ tali che}$$

$$\begin{cases} \sigma_1(P) = 0 \\ \sigma_1(Q) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sigma_2(P) = 1 \\ \sigma_2(Q) = 0 \end{cases}.$$

$$\iff H^0(D) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q .$$

$$\iff \ker\{H^0(D) \to \mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q\} \text{ ha codim } 2.$$

Ma $\ker\{H^0(D) \to \mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q\} \cong H^0(D-P-Q)$, come volevamo.

Inoltre, per concludere che $\varphi_{|D|}$ embedding:

$$d\varphi_{|D|} \text{ iniettivo} \overset{\text{Prop.}}{\iff} H^0(D)/\mathbb{C}_P \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$$

$$\iff T_{X,P} = \left(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2\right)^\vee \hookrightarrow T_{\mathbb{P}^n, \varphi(P)} \cong \left(H^0(D)/\mathbb{C}_P\right)^\vee$$

?

$$\iff H^0(\mathcal{O}_X(D)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_\Delta) = \mathcal{O}_\Delta \cong \mathbb{C}[[z]]/(z^2)$$

dove Δ concentrato in P, z coord locale, $P \leftrightarrow z=0$.

(cioè almeno una sezione si annulli di ordine esattamente 1, così "c'è un tangente non nullo".)

Però $\ker\{H^0(\mathcal{O}_X(D)) \to \mathcal{O}_\Delta\} = H^0(D-2P)$, quindi ciò accade se e solo se $h^0(D-2P) = h^0(D) - 2$. $\blacksquare$

(Miranda pag. 163: argomento intuitivo).

TEOREMA

Sia X sup. di Riemann compatta connessa e D divisore su X.

Sia g il genere di X. Allora:

(1) $\deg D \geq 2g-1 \Rightarrow h^1(D) = 0$

(2) $\deg D \geq 2g \implies |D|$ senza punti base.
(3) $\deg D \geq 2g+1 \implies D$ è molto ampio.

- DIM.

(1) Visto già che $H^1(D)^\vee \cong H^0(K_X - D) = 0$ poichè $\deg(K_X - D) < 0$.

(2) Per ogni $P \in X$ si considera
$$0 \to H^0(D-P) \to H^0(D) \xrightarrow{val_P} \mathbb{C}_P \cong H^0(\mathbb{C}_P) \to H^1(D-P).$$
Se $\deg(D) \geq 2g$ allora $\deg(D-P) \geq 2g-1$ cioè $H^1(D-P) = 0$.
Quindi $H^0(D) \overset{val_P}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}_P$ è surgettiva. Il Teorema conclude.

(3) Per ogni $P, Q \in X$:
$$0 \to H^0(D-P-Q) \to H^0(D) \to \mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q \to H^1(D-P-Q)$$
e se $\deg(D) \geq 2g+1$ allora $\deg(D-P-Q) \geq 2g-1$ per cui si ottiene $h^1(D-P-Q) = 0$. Segue che $H^0(D) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q$.
Analogamente si ottiene $H^1(D-2P) = 0$ quindi
$$h^0(D-2P) = h^0(D) - 2 \quad \text{da cui segue la tesi.}$$
Alternativamente: la Formula di Riemann-Roch implica che:
$$h^0(D-P-Q) = \deg(D-P-Q) + 1 - g = \deg(D) + 1 - g - 2 = h^0(D) - 2.$$
Stessa cosa per $h^0(D-P)$ ed $h^0(D-2P)$. ■

Abbiamo i seguenti corollari.

- **Corollario**

Sia X sup. di Riemann compatta e connessa.
Se D divisore di X ha $\deg(D) > 0$ allora D è ampio.

Corollario

Sia X sup. di Riemann compatta connessa e $g = 0$.
Fissiamo $D = 1 \cdot P$ con $P = [1:0]$ (o un qualsiasi punto).
Allora $\varphi_{|D|} : X \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^1$.

• DIM.

Siccome $\deg(D) = 1 \geq 2g + 1$, D e' molto ampio.
Inoltre per Riemann-Roch $h^0(D) = 2$. Allora

$$\varphi_{|D|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(D)^\vee) \cong \mathbb{P}^1$$

ed e' anche morfismo tra superfici di Riemann, quindi surgettivo.
Alternativamente, $\deg(D) = 1 \Rightarrow \deg \varphi_{|D|} = 1 \Rightarrow \varphi_{|D|}$ e' iso. ∎

Vediamo ora un altro risultato.

TEOREMA

Sia X sup. di Riemann compatta connessa di genere g e
D divisore di grado $d \geq 2g + 1$.
Allora $\varphi_{|D|}(X) \subset \mathbb{P}^{d-g}$ e' una curva algebrica, cioe'

$$\varphi_{|D|}(X) = V(g_1, \dots, g_r)$$

dove g_i polinomi omogenei in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{d-g}]$.

• DIM.

Dato D consideriamo $R(D) := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(nD)$.
Si trova che $R(D)$ e' un'algebra graduata, ovvero

$$R(D)_i = H^0(X, iD)$$

ed esiste un'operazione di prodotto:

$$H^0(nD) \otimes H^0(mD) \longrightarrow H^0((n+m)D)$$
$$s \otimes t \longmapsto s \cdot t \ .$$

Localmente in $P \in X$, se

$$\begin{cases} \operatorname{div}(s) \geq -n_p D(p) \\ \operatorname{div}(t) \geq -m_p D(p) \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{div}(s \cdot t) \geq -(n_p + m_p) D(p)$$

ovvero gli ordini di zero/polo si "sommano". A questo punto:

<u>TEOREMA</u> di Castelnovo - Mumford (lo vedremo in seguito...)

Sia $\deg(D) \geq 2g+1$. Allora:

$R(D)$ è generato in grado 1

ovvero $\forall n \geq 1$ $\quad H^0(D)^{\otimes n} \twoheadrightarrow H^0(nD)$

$$s_1 \otimes \dots \otimes s_n \longmapsto s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \ .$$

<u>OSS.</u> vale che:

$H^0(D)^{\otimes n} \twoheadrightarrow H^0(nD) \iff$ surgettiva sui tensori simmetrici

$\iff \operatorname{Sym}^n(H^0(D)) \twoheadrightarrow H^0(nD)$

poichè per definizione gli alternanti devono andare a 0.

Ma ora $\mathbb{P}(H^0(D)^\vee) = \mathbb{P}^N$ con $N = d - g$ e scegliendo una base $x_0, \dots, x_n$ di $H^0(D)$ (viste come equazioni degli iperpiani):

$$\operatorname{Sym}^n(H^0(D)) = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_n \ .$$

Quindi $\varphi_{|D|}(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ ed esiste una mappa surgettiva

$$\alpha : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N] \twoheadrightarrow R(D)$$

omomorfismo di algebre.

Poniamo $I := \ker(\alpha)$ ideale omogeneo e $Z = V(I)$, ovvero

$$Z = \{ P \in \mathbb{P}^N \mid g(P) = 0 \quad \forall g \in I \}.$$

Siccome α surgettiva, segue che $R(D) = \mathbb{C}[x_0, -, x_n]/_I$ e $\varphi_{|D|}(X) \subseteq Z$, poiché i polinomi in I si annullano su $R(D)$ tramite l'isomorfismo (i.e. $\forall g \in I$, g si annulla su $\varphi_{|D|}(X)$).

Vediamo ora che in realtà vale $\varphi_{|D|}(X) = Z$.

Siccome X compatta connessa, $R(D)$ non ha divisori di zero non banali (sezioni non banali che hanno prodotto nullo non esistono).

Quindi I ideale primo, cioè Z irriducibile.

Vogliamo vedere che $\dim_{\mathbb{C}} Z = 1$: lo strumento più veloce che possiamo usare è il polinomio di Hilbert:

DEF. Polinomio di Hilbert

Sia $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, -, x_N]$ ideale omogeneo e siano:

$$R = \mathbb{C}[x_0, -, x_N]/_I \qquad \text{dove} \qquad R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d .$$

Posto anche $Z := V(I)$, il POLINOMIO di HILBERT associato a Z

$$p_Z(t) \in \mathbb{Q}[t]$$

è l'unico polinomio tale che:

$$\forall t \gg 0, \ t \in \mathbb{N} : \qquad p_Z(t) = \dim_{\mathbb{C}} R_t .$$

Si ottiene che...

TEOREMA di Hilbert-Serre

Vale che $\dim(Z) = 1 \iff p_Z(t)$ ha grado 1.

Nel nostro caso $R(D) = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} H^0(tD)$. Per Riemann-Roch vale allora che:

$$\begin{cases} h^0(tD) = t \cdot \deg(D) + 1 - g \\ h^1(tD) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \geq 1$$

ovvero il polinomio di Hilbert di $Z = V(I)$ associato ad R è

$$p_Z(t) = \deg(D) \cdot t + (1-g).$$

Usando il Teorema di Hilbert-Serre, allora $\dim(Z) = 1$.

Siccome $\varphi_{|D|}(X) \subseteq Z$ hanno entrambe dimensioni 1 e Z è irriducibile, quindi connessa.

Vorremmo dire che vale $=$.

Non segue subito, $\varphi_{|D|}(X)$ non sappiamo essere algebrica e Z non sappiamo essere liscia.

Sia $\mathrm{Sing}(Z) = \#$ finito di punti. Quindi $Z \setminus \mathrm{Sing}(Z)$ connessa e $\varphi_{|D|}(X) \setminus \mathrm{Sing}(Z) \subseteq Z - \mathrm{Sing}(Z)$ è aperto per definizione di superficie di Riemann e perché $\subseteq$ inclusione è una mappa aperta.

Inoltre, è chiuso perché $\varphi(X) \subseteq Z$ immagine di compatto, quindi chiuso.

Allora $\varphi(X) \setminus \mathrm{Sing}(Z) = Z \setminus \mathrm{Sing}(Z)$, quindi $\varphi(X) = Z$.

In conclusione, $\varphi_{|D|}(X) = Z$ curva algebrica liscia.

?

In alternativa, il polinomio di Hilbert dice che $\deg(Z) = \deg(D)$.

Ma allora $D =$ pullback di sezione iperpiana. Quindi:

$\forall H$ iperpiano $\quad H \cap \varphi_{|D|}(X) \subseteq H \cap Z$ con lo stesso grado.

Segue che coincidono. ∎

~ o ~

Per cultura: questo è un caso particolare del Teorema di Chow...

TEOREMA di Chow

Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ sottovarietà analitica. Allora:

1) Y è una varietà algebrica.

2) ogni funzione meromorfa su Y è una funzione razionale.

Inoltre, vale anche il seguente:

G.A.G.A. PRINCIPLE ("Geometrie Analitique, Geometrie Algebrique")

Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ varietà algebrica liscia di dimensione n e irriducibile. Allora Y ha una struttura di:

VARIETÀ ALGEBRICA	$\sim$	VARIETÀ ANALITICA (compatta & Hausdorff)
Topologia di Zariski	$\longleftrightarrow$	Topologia di Hausdorff (analitica)
$\mathcal{O}_X^{alg} = \{f : X \to \mathbb{C}$ algebriche o razionali$\}$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{O}_X^{h} = \{f : X \to \mathbb{C}$ meromorfe$\}$

In particolare:

TEOREMA di Serre

Esiste un funtore per $\mathcal{F}$ fascio di $\mathcal{O}_X^{alg}$-moduli:

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^h := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X^{alg}} \mathcal{O}_X^h$$

che induce un isomorfismo:

$$H^i_{Zar}(X, \mathcal{F}) \cong H^i_{Haus}(X, \mathcal{F}^h).$$

Tornando alle superfici di Riemann, esiste un'equivalenza tra le categorie:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Superfici di Riemann} \\ \text{compatte e connesse}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Curve algebriche e} \\ \text{lisce su } \mathbb{C}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Campi } \mathbb{C}(X) \text{ con grado} \\ \text{di trascendenza 1 su } \mathbb{C}\end{array}\right\}$$

• DIM. (Idea)

- Abbiamo visto che data X sup. di Riemann e preso D con $\deg \geq 2g+1$ allora $\varphi_{|D|}(X)$ è una curva algebrica.
- Viceversa, data $X \subset \mathbb{P}^N$ curva algebrica liscia, per il Teorema del Rango (vedi più avanti) allora X ha struttura di sup. di Riemann.
- Data X superficie di Riemann, questa va in $\mathcal{M}(X)$ campo delle funzioni meromorfe su X. Invece data X curva algebrica, vi possiamo associare $\mathbb{C}(X)$ campo delle funzioni razionali su X.

In particolare il funtore $X \mapsto \mathcal{M}(X)$ è essenzialmente surgettivo, cioè dato $\mathcal{M}$ campo di grado di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$ e allora

$$\mathcal{M} = \mathrm{Frac}\left(\mathbb{C}[x,y]/(F)\right) \quad \text{con } F \text{ irriducibile.}$$

Così facendo, $F = F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ permette di costruire una $Y = V(F) \subseteq \mathbb{C}^2$ e la sua superficie di Riemann associata.

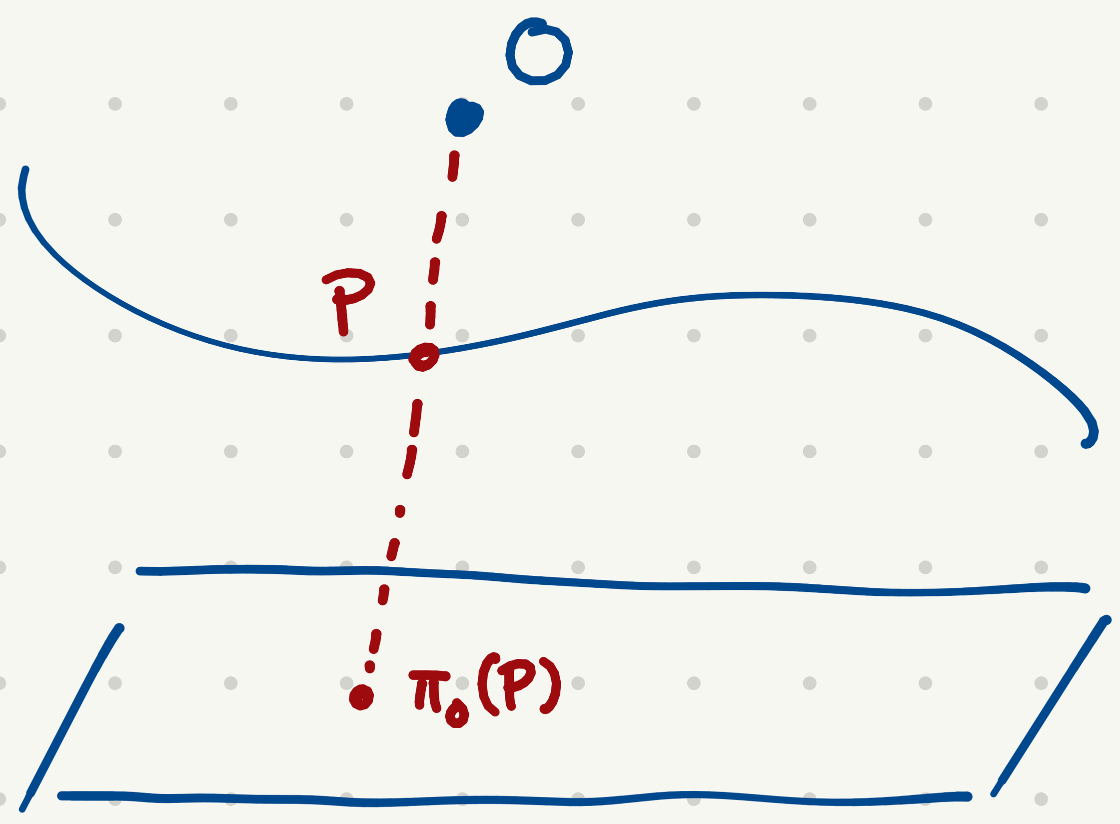
Allora $f: X \to Y$ induce $f^*: \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$
$\mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$. $\square$

PROIEZIONI $\mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^3$

PROPOSIZIONE

Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ con $N \geq 4$ curva algebrica liscia.
Allora esiste $O \in \mathbb{P}^N \setminus X$ tale che $\pi_O : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ proiezione induce un isomorfismo $X \cong \pi_O(X)$.

In particolare per proiezione intendiamo, in coordinate, che se



Iperpiano duale

$$O := [1:0:\ldots:0]$$

allora la proiezione e'

$$\pi_O : \mathbb{P}^N \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$$
$$(x_0 : \ldots : x_N) \longmapsto (x_1 : \ldots : x_N).$$

- **DIM.**

L' idea e' considerare la ...

DEF. Varietà delle Secanti

Se $X \subset \mathbb{P}^N$ superficie, allora la VARIETA' delle SECANTI e'

$$\mathrm{Sec}(X) := \overline{\bigcup_{\substack{P,Q \in X \\ P \neq Q}} \ell(P,Q)}^{Zar} \subseteq \mathbb{P}^N.$$

Vediamo che esiste un morfismo:

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \times (X \times X \setminus \{diag\}) \longrightarrow \mathrm{Sec}(X)$$
$$([\lambda_0 : \lambda_1], (P,Q)) \longmapsto \lambda_0 P + \lambda_1 Q$$

tale che $\mathrm{Sec}(X) = \overline{\mathrm{Im}(\varphi)}$, quindi in particolare

$$\dim(\mathrm{Sec}(X)) \leq 1 + 2\dim(X).$$

Nel caso di X curva algebrica, $\dim(Sec(X)) \leq 3$.

Siccome però $X \subseteq \mathbb{P}^N$ con $N \geq 4$, $Sec(X)$ è un chiuso proprio e quindi $\exists\, O \in \mathbb{P}^N \setminus Sec(X)$.

Questo punto O soddisfa le richieste, infatti:

$$\pi_O|_X : X \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1} \quad \text{iniettiva}$$

poiché $\pi_O(P) = \pi_O(Q) \iff \underset{[x_1^P:\_:x_n^P]-[x_1^Q:\_:x_n^Q]=[0:\_:0]}{\overset{}{O \overset{}{\in}}} \ell(P,Q)$.

Inoltre, poniamo:

$$Tan(X) := \text{varietà delle rette tangenti ad } X = \bigcup_{p\in X} T_{X,p}$$

Allora $\dim(Tan(X)) \leq 2\dim(X) = 2$ nel caso di X curva.

Infatti: localmente:

$$\forall p \in X \quad Tan(X) = \operatorname{Im}\varphi \quad \text{con} \quad \varphi : \mathbb{C}\times X \longrightarrow \mathbb{C}^N \subset \mathbb{P}^N, \quad (t,p) \longmapsto p + t\cdot v$$

dove $T_{X,p} = \langle v \rangle$.

Introduciamo $Tan(X)$ perché in questo insieme potrebbe esserci π_O con differenziale non invertibile.

Consideriamo allora $O \in \mathbb{P}^N \setminus (Sec(X) \cup Tan(X))$: ora il differenziale di π_O è invertibile, $d(\pi_O)_p \neq 0 \ \forall p \in X$.

Così facendo $\pi_O : X \longrightarrow \pi_O(X)$ è un embedding. ■

Corollario

Sia X superficie di Riemann compatta connessa. Essa è isomorfa ad una curva algebrica in $\mathbb{P}^3$.

Divisori di Grado Basso

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa, D divisore.

▸ **Proposizione**

Vale che $h^0(D) \leq \deg(D) + 1$.

Supponendo $\deg(D) \geq 1$, allora

$$h^0(D) = \deg(D) + 1 \iff X \cong \mathbb{P}^1.$$

• DIM.

Facciamo un'induzione su $\deg(D)$.

→ $\deg(D) = 0$: allora $h^0(D) \neq 0 \iff |D| \neq \emptyset \iff D = 0$

cioè $h^0(D) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$.

→ $\deg(D) \geq 1$: dato $P \in \mathrm{Supp}(D)$ consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(D-P) \longrightarrow H^0(D) \longrightarrow \mathbb{C}_P$$

e siccome per hp induttiva $\deg(D-P) < \deg(D)$, allora segue

che $h^0(D-P) \leq \deg(D-P) + 1 = \deg(D)$.

Per esattezza allora

$$h^0(D) \leq h^0(D-P) + h^0(\mathbb{C}_P) \leq \deg(D) + 1.$$

Se inoltre vale che $h^0(D) = \deg(D) + 1$.

Siccome $h^0(D-P) \leq \deg(P)$, allora necessariamente

$$0 \to H^0(D-P) \longrightarrow H^0(D) \xrightarrow{f} \mathbb{C}_P \longrightarrow 0$$

perchè visto $H^0(D-P)$ come ker di f, siccome $h^0(D-P) < h^0(D)$

allora f non nulla. Per dimensione e' quindi surgettiva.

Segue $h^0(D-P) = \deg(D-P) + 1 = \deg(D)$.

Viceversa, se $X \cong \mathbb{P}^1$ con Riemann-Roch

$$h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1$$

e allora dalla dualità di Serre $H^1(D) = H^0(K_X - D) = 0$ quando $\deg(D) > 0$. ■

In particolare, allora, se $g(X) \geq 1$ e $P \in X$:

$$h^0(\mathcal{O}_X(P)) = 1.$$

Proprietà caratt. $\mathbb{P}^1$: i punti sono "collegati" ovvero polo-zero da funzioni meromorfe: $h^0(P) = 2$.

Reintroduciamo la seguente definizione.

DEF. Superficie Iperellittica

La superficie X si dice IPERELLITTICA se esiste D divisore tale che $\deg(D) = 2$ e $h^0(D) = 2$.

Sia $g(X) \geq 1$ con X iperellittica: $|D|$ è senza punti base perché

$$0 \to H^0(D-P) \to H^0(D) \to \mathbb{C}_p \to 0 \quad \forall p \in X$$

poiché $h^0(D-P) = 1 = h^0(D) - 1$ siccome $\deg(D-P) = 1$ (non può essere né 0 né 2).

Quindi ritroviamo la vecchia definizione, ovvero:

$$\varphi_{|D|} : X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$$

$\deg D = 2 \Rightarrow |D|$ b.p.f. $\Rightarrow \varphi_{|D|}$ definito
$h^0(D) = 2 \Rightarrow \varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$ siccome $\mathbb{P}(H^0(D)^\vee) \simeq \mathbb{P}^1$

cioè $\varphi_{|D|}$ è un morfismo di grado 2 su $\mathbb{P}^1$, cioè in notazione g^1_2.

DEF. Punti di Weierstrass

I punti di ramificazione si chiamano PUNTI di WEIERSTRASS.

Usando le formula di Riemann - Hurwitz si trovano in questo caso

$2 \cdot g(X) + 2$ punti di ramificazione.

- <u>OSS.</u>

Sia $g(X) = 2$. Allora X è iperellittica.

Infatti il divisore canonico K_X verifica che:

$$\deg(K_X) = 2g - 2 = 2 \qquad \text{e} \qquad h^0(K_X) = g = 2$$

dove per Riemann-Roch si trovava $h^0(K_X) = 2 - (g+1) - h^1(K_X)$.

Se $g(X) \geq 3$ esistono superfici di Riemann non iperellittiche e anzi la generica <u>non</u> è iperellittica.

- <u>ESERCIZIO</u>

Sia X superficie iperellittica con $g(X) \geq 2$.

Allora il morfismo $X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ è unico.

Equivalentemente, se esistono D, D' divisori tali che

$$\deg(D) = \deg(D') = 2 \qquad \text{e} \qquad h^0(D) = h^0(D') = 2$$

allora in realtà $|D| = |D'|$.

- <u>Svolg</u> (idea)

Sia $P \in X$. Allora se $h^0(D) = 2$, esiste $D_1 \in |D|$ passante per P, cioè $D_1 = P + Q$.

Analogamente, esiste $D_1' \in |D'|$ tale che $D_1' = P + R$.

Studiamo $L := P + Q + R$. Assumendo $|D| \neq |D'|$, allora va dimostrato $h^0(L) = 3$ [x esercizio!] e inoltre L molto ampio.

Unendo i fatti "$\deg L = 3$" + "$h^0(L) = 3$" + "L molto ampio":

$$\varphi_{|L|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

dove $\varphi_{|L|}(X)$ è cubica, poichè la sezione iperpiana ha grado 3.

Questo è <u>assurdo</u>, perchè avremmo $g(X) = 1$ ↯ (?) $\square$

Mappa Canonica

Sia X superficie di Riemann compatta connessa di genere $g \geq 2$.

Sia K_X il divisore canonico.

- **TEOREMA**

Sia X come sopra, $g \geq 2$. Allora:

1) $|K_X|$ è senza punti base.

2) K_X è molto ampio $\iff$ X non è iperellittica.

- DIM.

(1) Sia $P \in X$. Consideriamo la successione esatta lunga

$$0 \to H^0(K_X - P) \to H^0(K_X) \to H^0(\mathbb{C}_P) \to H^1(K_X - P) \to H^1(K_X) \to 0$$

dove per Dualità di Serre:

$$H^1(K_X) \cong H^0(\mathcal{O}_X)^\vee = \mathbb{C} \qquad e \qquad H^1(K_X - P) \cong H^0(P)^\vee.$$

e inoltre $h^0(P) = 1$ poiché $\deg(P) = 1$ & $g \geq 2$.

Ma allora per dimensione e esattezza $H^1(K_X - P) \xrightarrow{\sim} H^1(K_X)$

per cui $H^0(K_X) \twoheadrightarrow H^0(\mathbb{C}_P)$. Ovvero $|K_X|$ senza punti base.

(2) Siano $P, Q \in X$. Consideriamo la successione esatta

$$0 \to H^0(K_X - P - Q) \to H^0(K_X) \to H^0(\mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q) \to H^1(K_X - P - Q) \to H^1(K_X) \to 0$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\varphi_{|K_X|} \text{ iniettiva} &\iff H^0(K_X) \twoheadrightarrow H^0(\mathbb{C}_P \oplus \mathbb{C}_Q) \quad \forall P, Q \\
&\iff H^1(K_X - P - Q) \xrightarrow{\sim} H^1(K_X) \quad \forall P, Q \\
&\overset{\text{Dua Serre}}{\iff} h^0(P + Q) = 1 \quad \forall P, Q \\
&\iff X \text{ non è iperellittica.}
\end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga nel caso $2P$:

$$d\varphi_{|K_X|} \text{ iniettivo in } P \iff h^0(2P) = 1. \qquad \blacksquare$$

Cosa succede se invece X è iperellittica?

PROPOSIZIONE

Sia X come sopra ma iperellittica. Allora $\varphi_{|K|}$ si può fattorizzare come:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi_{|K_X|}"] \arrow[dr, "*"', "2:1"'] & & \mathbb{P}^{g-1} \\ & \mathbb{P}^1 \arrow[ur, hook, "\nu_{1,g-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$*$ è data da $\varphi_{|D|}$ con D verificante la def. di iperellittica.

dove $\nu_{1,g-1} : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ è la $(g-1)$-esima mappa di Veronese.

DIVISORI di GRADO BASSO ~ pt. 2

LEMMA *{Ricordiamo $|D| \simeq \mathbb{P}(H^0(D))$ quindi $\dim |D| = h^0(D) - 1$ }

Sia X superficie di Riemann compatta connessa e D un divisore su X. Allora

$$\dim |D| \geq k \iff \forall \{P_1, \dots, P_k\} \subseteq X \ \exists D_1 \in |D|$$

(si intende dim. proiettiva *) tale che $D_1 \ni P_i \ \forall i = 1, \dots, k$.

Equivalentemente, si richiede che $\sum_{i=1}^{k} P_i \leq D_1$.

- DIM.

($\Leftarrow$) Induzione su k.

- $k=0$: allora $\dim |D| \geq 0 \iff |D| \neq \emptyset$.
- $k>0$: supponiamo che $\forall$ k-upla $\{P_1, \dots, P_k\}$

$$\exists D_1 \in |D| \text{ tale che } D_1 - \sum P_i \geq 0 \ \text{ o } \ D_1 \supset \{P_1, \dots, P_k\}.$$

(i.e. P_{k+1} no pto base)

Scegliamo $P_{k+1} \notin$ luogo base di $|D|$.

Consideriamo allora $D' := D - P_{k+1}$. Per ipotesi su D':

$$\exists D_2 \in |D'| \text{ tale che } D_2 \supset \{P_1, \dots, P_k\}$$

quindi per hp induttiva $\dim |D'| \geq k$.

Poichè P_{k+1} non è punto base di $|D|$, allora

$$\dim |D| = \dim |D'| + 1 \geq k + 1$$

usando la solita successione esatta.

($\Rightarrow$) Supponiamo $\dim |D| \geq k$. Consideriamo $P_1, \dots, P_k \in X$ e poniamo $\Delta = P_1 + \dots + P_k$ e $\Delta' = P_1 + \dots + P_{k-1}$.

Se P_k è punto base per $|D|$ allora $|D - P_k| + P_k = |D|$

perchè $\quad 0 \to H^0(D-P_k) \xrightarrow{\sim} H^0(D) \to 0 \in \mathbb{C}_{P_k}$.

Facciamo un'induzione su $\deg(D)$: applicando l'hp induttiva su $|D-P_k|$ per trovare che, siccome $\dim|D| = \dim|D-P_k|$, vale la tesi.

Se invece P_k non è un punto base, allora

$$\dim|D-P_k| = \dim|D| - 1 \geq k-1.$$

Quindi per induzione $\forall P_1, \dots, P_{k-1} \in X$

$$\exists\, D_2 \in |D-P_k| \quad \text{tale che} \quad D_2 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \geq 0.$$

Segue che $D_2 + P_k \in |D|$ e contiene $\{P_1, \dots, P_k\}$. $\blacksquare$

Segue da questo lemma che:

PROPOSIZIONE 1

Se D_1, D_2 divisori su X, allora

$$\dim|D_1| + \dim|D_2| \leq \dim|D_1 + D_2|.$$

- DIM.

Sia $\dim|D_1| = k_1$ e $\dim|D_2| = k_2$. Consideriamo $k_1 + k_2$ punti e li suddividiamo in $\{P_1, \dots, P_{k_1}\} \cup \{Q_1, \dots, Q_{k_2}\}$.

Per il Lemma, esistono $\begin{cases} D_1' \in |D_1| & : \quad D_1' - \sum_{i=1}^{k_1} P_i \geq 0 \\ D_2' \in |D_2| & : \quad D_2' - \sum_{i=1}^{k_2} P_i \geq 0 \end{cases}$

quindi $D_1' + D_2' \in |D_1 + D_2|$ e

$$D_1' + D_2' - \left(\sum P_i + \sum Q_i \right) \geq 0.$$

Sempre per il Lemma, segue che $\dim|D_1 + D_2| \geq k_1 + k_2$. $\blacksquare$

Alternativamente...

PROPOSIZIONE 2

Sia X irriducibile e consideriamo

$$\begin{aligned} \psi : H^0(D_1) \otimes H^0(D_2) &\longrightarrow H^0(D_1 + D_2) \\ s_1 \otimes s_2 &\longmapsto s_1 \cdot s_2 \end{aligned}.$$

Allora $\dim(\operatorname{Im}(\psi)) \geq h^0(D_1) + h^0(D_2) - 1$.

- DIM (idea)

?

Per X irriducibile: $\langle 1 \otimes s_2 \rangle \hookrightarrow H^0(D_1 + D_2)$

$\langle s_1 \otimes 1 \rangle \hookrightarrow H^0(D_1 + D_2)$

poichè $s_1 \otimes s_2 \mapsto s_1 \cdot s_2 \equiv 0$ su X e' impossibile quando X irriducibile. $\square$

Raggiungiamo così il seguente risultato...

TEOREMA di Clifford

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa, D divisore su X con $\deg(D) = d \leq 2g - 2$ dove $g \geq 2$ e' genere di X.

Allora vale che $\dim |D| \leq \frac{1}{2} \deg(D)$.

Inoltre $\dim |D| = \frac{1}{2} \deg(D)$ se e soltanto se $(D = 0, K_X)$ oppure (X iperellittica e $D = r \cdot g^1_2$).

- DIM.

Se $h^1(D) = 0$, il teorema segue da Riemann-Roch + ipotesi sul grado:

$$h^0(D) = \deg(D) + 1 - g$$

si può riscrivere come $\dim|D| = h^0(D) - 1 = \deg(D) - g$.

Se $h^1(D) \neq 0$ allora per Dualità di Serre $H^0(K_X - D) \neq 0$.

Quindi possiamo costruire una mappa:

$$|D| + |K_X - D| \longrightarrow |K_X|.$$

Per la proposizione sopra segue che:

$$\dim |D| + \dim |K_X| \leq \dim |K_X| = g-1 \qquad ①$$

e da Riemann-Roch risulta:

$$\dim |D| - \dim |K_X - D| = \deg(D) + 1 - g \qquad ②.$$

Unendo ① + ② si ottiene che $2 \dim |D| \leq \deg(D)$.

Per la seconda parte del teorema vediamo:

($\Leftarrow$) se $D = 0, K_X$ il teorema segue da Riemann-Roch + Dualità.

Se $D = r \cdot g^1_2$ allora $D = r \cdot (D_1)$ con $\deg D_1 = 2$ e $\dim |D_1| = 1$ (cioè $D_1 = g^1_2$). Quindi:

(per Proposizione)

$$\deg D = 2r \quad \text{e} \quad \dim |D| = r$$

{ Si usa il fatto che quando $\deg D = 2$ e $h^0(D) = 2$, $|D|$ è b.p.f. per cui nel lemma $\forall P_1, \dots, P_r \in D_1, \dots, D_r$ con $D_i \in |D|$ t.c. $P_i \in D_i$ si ottiene $P_1 + \dots + P_r \in D_1 + \dots + D_r$. ? }

($\Rightarrow$) Supponiamo $\deg(D) > 0$ e $D \neq 0, K_X$.

Lavoriamo per induzione su $\deg D = 2n$:

- $\underline{\deg(D) = 2}$: se $\dim D = 1$ allora D è g^1_2 ed X iperellittica per definizione.
- $\underline{\deg(D) \geq 4}$: siccome $\dim |D| = \frac{1}{2} \deg(D)$, $h^1(D) \neq 0$.

  Quindi per Serre esiste un divisore $E \in |K_X - D|$, $E \neq 0$.

  Siano $P, Q \in X$ tali che $P \in \operatorname{supp}(E)$, $Q \notin \operatorname{Supp}(E)$.

  Consideriamo anche $\bar{D} \in |D|$ tale che $P \notin \operatorname{Supp}(\bar{D})$ ma $Q \in \operatorname{Supp}(\bar{D})$.

(Per rimozione dal supporto credo si possa fare, vedere ipotesi lemma.)

Poniamo $F := \sum_{R \in X} \min\{ \operatorname{ord}_R \overline{D}, \operatorname{ord}_R E \} \cdot R$ " $= \overline{D} \cap E$ ".

Per costruzione $F \subsetneq E$ ed $F \subsetneq \overline{D}$. Costruiamo la successione esatta

Jacobiana e Schema di Picard

DEF. Insieme di Picard

Sia X superficie di Riemann. Definiamo:
$$\mathrm{Pic}(X) := \{\text{fasci invertibili}\}/_{\text{isomorfismo}} .$$

PROPOSIZIONE

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa. Allora
$$\mathrm{Div}(X)/_{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X) \quad \text{è isomorfismo.}$$

• DIM.

Abbiamo visto che, dato D divisore di X, $\mathcal{O}_X(D)$ è un fascio invertibile.
Viceversa, se $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile:
$$\mathcal{L} \longleftrightarrow \{(U_\alpha, f_\alpha)\}_\alpha \quad \text{con cociclo } \{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*\}$$
Ma allora $\mathcal{L}$ si può associare a D divisore tale che
$$D|_{U_\alpha} = \mathrm{div}(f_\alpha) \quad \forall \alpha.$$
Questo divisore è ben definito poiché in $U_\alpha \cap U_\beta$ vale $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$ con $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*$, quindi $\mathrm{div}(f_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \mathrm{div}(f_\beta)_{U_\alpha \cap U_\beta}$.
Inoltre, se $D \sim D'$ allora $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(D')$ poiché quando $D \sim 0$ vale che $D = \mathrm{div}(f)$ con f meromorfa globale e quindi può essere scelto $f_\alpha := f|_{U_\alpha}$ con $g_{\alpha\beta} = 1$. Il fatto che $g_{\alpha\beta} = 1 \ \forall \alpha, \beta$ implica in particolare che $\mathcal{O}_X(D)$ è il fascio banale (i.e. fibrato banale) cioè $\mathcal{O}_X$. ■

- <u>OSS.</u>

Più in generale, c'è la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{M}_X^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0$$

dove $\begin{cases} \mathcal{M}^* = \text{"fascio delle meromorfe mai nulle"} \\ \mathcal{O}^* = \text{"fascio delle olomorfe mai nulle"}. \end{cases}$

Quando X è liscia allora vale che

info sugli 1-cocicli

$$\mathrm{Div}(X) \cong H^0\left(\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{Pic}(X) \cong H^1(\mathcal{O}_X^*).$$

divisori di Cartier

▸ STRUTTURA di $\mathrm{Pic}(X)$

Sia X superficie di Riemann compatta e connessa. Allora

$$\mathrm{Pic}(X) \cong \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^d(X)$$

dove $\mathrm{Pic}^d(X) := \{\text{fasci invertibili di grado } d\}$.

Fissato $P_0 \in X$, per ogni d si trova:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}^d(X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(X) \\ \mathcal{O}_X(D) &\longmapsto \mathcal{O}_X(D - dP_0). \end{aligned}$$

Quindi guardando al solo grado 0, si trova come sopra che

$$\mathrm{Pic}^0(X) \cong \mathrm{Div}^0(X)/\sim .$$

divisori di grado 0.

L'obiettivo è dare a $\mathrm{Pic}^0(X)$ una struttura di varietà (oltre alla struttura di gruppo già associata a $\mathrm{Pic}^0(D)$).

Lo strumento che useremo a questo scopo è la JACOBIANA.

JACOBIANA

Sia X superficie di Riemann compatta connessa.

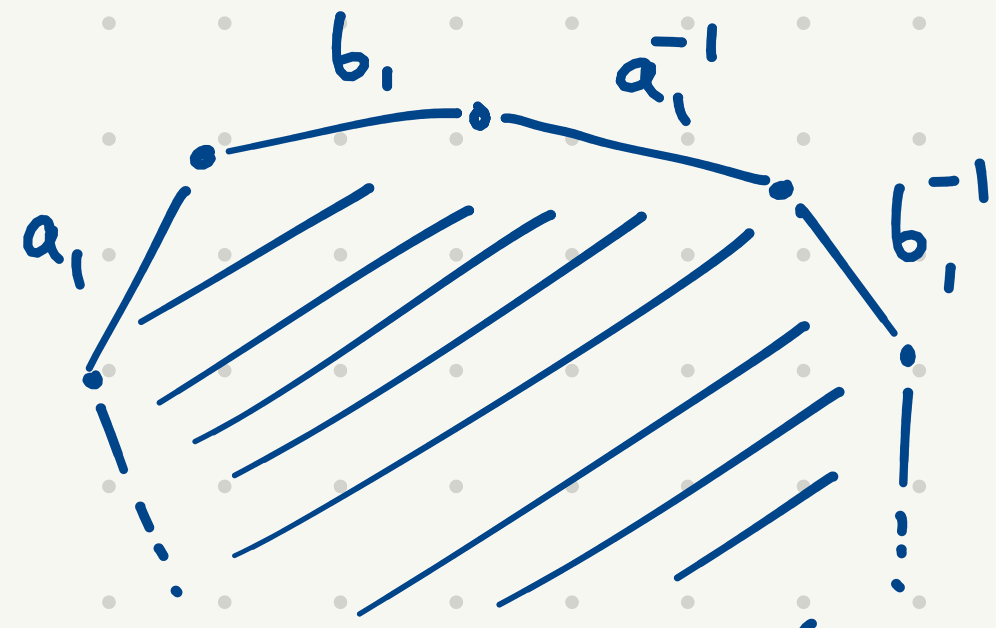
Consideriamo una base simplettica di $H_1(X;\mathbb{Z})$: se $g(X)=g$ allora in particolare $\mathrm{rk}(H_1(X;\mathbb{Z}))=2g$. In altre parole ("alla G2"):

Base Simplettica $\longleftrightarrow$ $\{a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g\}$ tali che

$$a_i\cdot b_i = 1 \quad \text{mentre} \quad a_i b_j = a_i a_j = b_i b_j = 0.$$

con l'intuizione di g-superficie

$$X \cong \Delta/_{\text{incollamento}}.$$

$\Delta =$ 

Vogliamo integrare 1-forme olomorfe lungo i cammini di $H^1(X;\mathbb{Z})$:

$$\Omega^1_X(X) := \{\text{1-forme differenziali olomorfe globali su } X\} \cong H^0(K_X).$$

DEF. Periodo

Si dice PERIODO di X un funzionale:

$$\Omega^1(X) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{dove } [e]\in H_1(X,\mathbb{Z}) \overset{\text{ab}}{=} \pi_1(X)^{ab}.$$

$$\omega \longmapsto \int_{[e]}\omega$$

cammino in X

DEF. Matrice dei Periodi / Mappa dei Periodi

Fissata una base simplettica $\{a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g\}$ di $H_1(X;\mathbb{Z})$ e una base $\{\omega_1,\dots,\omega_g\}$ di $H^0(K_X)\cong\Omega^1_X(X)$, si può definire la MATRICE dei PERIODI

$$\left[\ \int_{a_i}\omega_j \ \middle|\ \int_{b_i}\omega_j\ \right] \quad \text{di taglia } g\times 2g.$$

La MAPPA dei PERIODI $\Omega^1_X(X)\longrightarrow\mathbb{C}^{2g}$ è data da

$$\omega \longmapsto \left(\int_{a_1}\omega,\dots,\int_{a_g}\omega,\int_{b_1}\omega,\dots,\int_{b_g}\omega\right). \quad !$$

Lezione nuova, diversa definizione:

DEF. Mappa dei Periodi

La MAPPA dei PERIODI è data da

$$\begin{aligned} H_1(X,\mathbb{Z}) &\longrightarrow (\Omega^1(X))^\vee \\ [\mathcal{C}] &\longmapsto \int_{[\mathcal{C}]} \cdot \end{aligned}$$

Fissate le basi come fatto sopra, cioè $\omega_1, \dots, \omega_g$ per $\Omega^1(X)$ e $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ base simplettica per X, si ottiene la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \int_{a_1}\omega_1 & \cdots & \int_{a_g}\omega_1 & \int_{b_1}\omega_1 & \cdots & \int_{b_g}\omega_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1}\omega_g & \cdots & \int_{a_g}\omega_g & \int_{b_1}\omega_g & \cdots & \int_{b_g}\omega_g \end{array}\right) =: (A \mid B)$$

MATRICE dei PERIODI

Abbiamo il seguente:

LEMMA

1) Le matrici A e B sono invertibili.
2) I vettori colonna di $(A \mid B)$ sono $\mathbb{R}$-linearmente indip. in $\mathbb{C}^g$.
3) $A^T \cdot B = B^T \cdot A$. (Condizione di Cauchy-Riemann...)

Il lemma implica che, posto:

$$\Lambda := \text{reticolo generato dalle colonne di } (A,B) \overset{!}{=} \left\{ \sum_i m_i A_i + \sum_j n_j B_j \;\middle|\; m_i, n_j \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{C}^g$$

allora possiamo definire la JACOBIANA:

$$\mathrm{Jac}(X) := \Omega^1(X)^\vee / \Lambda$$ è un TORO complesso di dim $= g$.

Con questo strumento si può studiare...

MAPPA di ABEL-JACOBI

Fissiamo un punto $P_0 \in X$. Definiamo la MAPPA di ABEL-JACOBI come:

$$A_{P_0} : X \longrightarrow Jac(X)$$
$$P \longmapsto \begin{pmatrix} \int_{P_0}^{P} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{P_0}^{P} \omega_g \end{pmatrix} \mod \Lambda$$

dove $\int_{P_0}^{P} \omega_i := \int_{\gamma} \omega_i$ con $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma(1) = P_1$.

- OSS

Siccome stiamo andando mod Λ, A_{P_0} non dipende dalla scelta della curva γ: dati γ, δ che collegano P_0 e P:

$$\left(\int_{\gamma + \delta^{-1}} \omega_i \right)_i \in \Lambda$$

Si può poi estendere per linearità A_{P_0} ad una mappa su $Div(X)$ ottenendo che

$$Div(X) \longrightarrow Jac(X)$$
$$\sum_i n_i P_i \longmapsto \sum_i n_i A_{P_0}(P_i)$$

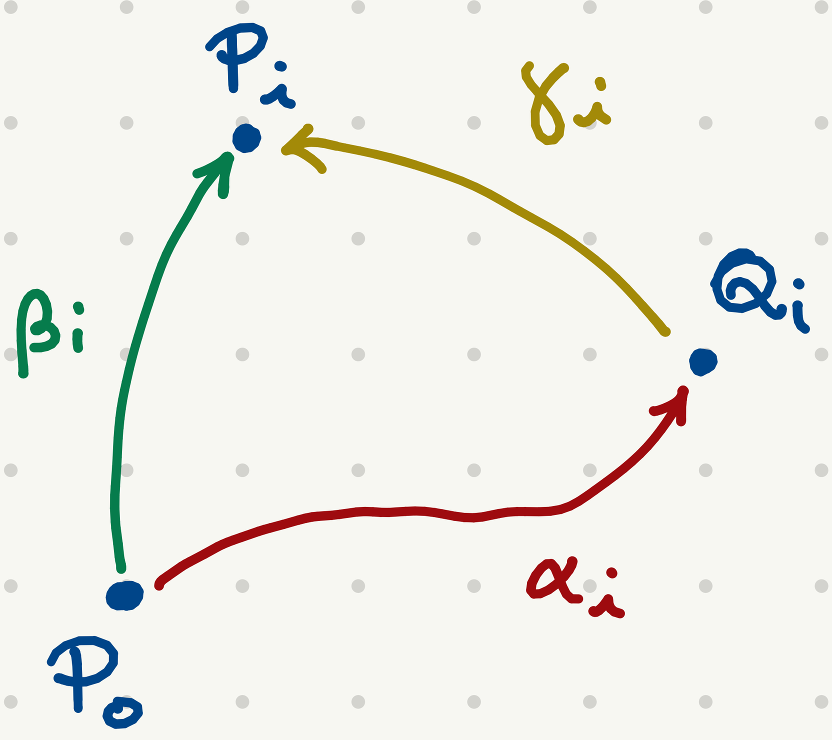
e restringiamo il dominio al solo $Div^0(X)$.

- PROPOSIZIONE

La mappa $A_{P_0} : Div^0(X) \to Jac(X)$ e' indipendente dalla scelta del punto P_0, viene quindi denotata A_0.

- DIM.

Per linearità, e' sufficiente considerare $D \overset{\text{siccome } \deg D = 0.}{=} \sum_i (P_i - Q_i)$ e lavorare con una sola coppia $P_i - Q_i$. Per ogni i fissato:



si considerano i cammini in figura.

Denotiamo $\eta_i = \alpha_i + \gamma_i - \beta_i \in H_1(X, \mathbb{Z})$.

Quindi $\begin{pmatrix} \int_{\eta_i} \omega_1 \\ \cdots \\ \int_{\eta_i} \omega_g \end{pmatrix} \in \Lambda$ da cui segue

che:
$$A_{P_0}(P_i - Q_i) \equiv \begin{pmatrix} \int_{\beta_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\beta_i} \omega_g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_{\alpha_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\alpha_i} \omega_g \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \int_{\gamma_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_i} \omega_g \end{pmatrix} \bmod \Lambda$$

cioè $A_{P_0}(P_i - Q_i) = \left(\int_{\gamma_i} \omega_j\right)_j$ è indipendente dal punto P_0. ■

Questo risultato dice che è ben definita la mappa:

$$A_0 : \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X).$$

— o —

Per divisori di grado più alto, la mappa di Abel-Jacobi si definisce usando $\mathrm{Div}^d_+(X) := \{ D \text{ divisore} \mid D \geq 0 \text{ e } \deg D = d \}$.

Allora:
$$\begin{aligned} A_d : \mathrm{Div}^d_+(X) &\longrightarrow \mathrm{Jac}(X) \\ D &\longmapsto A_0(D - dP_0) \end{aligned}$$

dove $P_0 \in X$ fissato. (Questa volta la dipendenza non si toglie!)

— o —

Questa mappa viene caratterizzata dai seguenti.

▸ TEOREMA di ABEL (non dimostrato...)

OBS: se $g = 0$, $\mathrm{Jac}(X) = \{*\}$ e allora $\mathrm{Div}^0(X) = \{0\}$.

Sia $D \in \mathrm{Div}^0(X)$. Allora:

$$A_0(D) \equiv 0 \text{ in } \mathrm{Jac}(X) \iff D = \mathrm{div}(f) \text{ con } f \text{ meromorfa}$$
$$\iff D = 0.$$

Una conseguenza immediata è ...

Corollario 1

Si può fattorizzare

$$A_0 : \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Div}^0(X)/_\sim \cong \mathrm{Pic}^0(X) \hookrightarrow \mathrm{Jac}(X).$$

D'altra parte un teorema è...

TEOREMA di JACOBI ⇝ DIMOSTRATA per $g=0/g=1$, vedi OSS sotto...

Fissato $P_0 \in X$, $\forall \lambda \in \mathrm{Jac}(X)$ $\exists P_1, \dots, P_g \in X$ tali che

$$A_0\left(\sum_{i=1}^{g}(P_i - P_0)\right) = \lambda.$$

Inoltre per λ generico ($\forall i \neq j$ $P_i \neq P_j$) $D = \sum P_i$ è unico.

Corollario 2

Se X è superficie di Riemann compatta connessa, allora

$$\mathrm{Jac}(X) \cong \mathrm{Pic}^0(X).$$

Oss. 3

Il Teorema di Abel dice che, considerando la mappa

$$A_d : \mathrm{Div}^d_+(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

e preso $\lambda \in \mathrm{Im}(A_d)$, allora la sua controimmagine sarà

$$A_d^{-1}(\lambda) = |D| \qquad \text{dove } A_d(D) = \lambda.$$

- **DIM.** Teorema di Jacobi

Consideriamo la varietà "gruppo simmetrico g-volte per X" ovvero:

$$X^{(g)} = \underbrace{X \times \dots \times X}_{g\text{-volte}} \Big/ \sigma_g \qquad \text{dove } \sigma_g \text{ gruppo simmetrico.}$$

Questo perchè non ci interessa l'ordine dei g punti in X.

Vale che $X^{(g)}$ è una varietà complessa di $\dim = g$ e inoltre, (in realtà: sempre, siccome $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$)

localmente, $X^{(g)}$ è liscia fuori dalle diagonali $(\exists i \neq j \; P_i \neq P_j)$.

Allora $\begin{aligned} \mathrm{Div}_+^g(X) &\longrightarrow X^{(g)} \\ \sum_{i=1}^{g} P_i &\longmapsto (P_1, \dots, P_g) \end{aligned}$ è isomorfismo locale fuori dalla diagonale.

Definiamo la mappa di Abel-Jacobi:

$$\begin{aligned} A^{(g)} : X^{(g)} &\longrightarrow \mathrm{Jac}(X) \\ (P_1, \dots, P_g) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^{g} \int_{P_0}^{P_i} \omega_j \right)_{j=1,\dots,g} \end{aligned}$$

che fattorizza $A_g : \mathrm{Div}_+^g(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$.

"punti generici"

Considerato l'insieme $\{P_i \neq P_j\} \subseteq X^{(g)}$, prendiamo una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^1(X) \cong H^0(K_X)$. Per $(P_1, \dots, P_g)$ "generico" possiamo scegliere coordinate tali che

$$\omega_i = f_i \, dz_i \quad \text{e} \quad \left(f_i(P_j)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$ triangolare superiore.

Ora vediamo perché si può fare ...

Se $g = 0/1$ la descrizione è esplicita (vedi OSS sotto).

Supponendo $g \geq 2$, $|K_X|$ non ha punti base. Preso P_1 allora

$$\exists \; \omega_1 = f_1 \, dz_1 \quad \text{tale che} \quad f_1(P_1) \neq 0.$$

Applico l'algoritmo di Gauss: $\omega_j(P_1) = f_j(P_1) = 0 \quad \forall j > 1$.

Reitero considerando P_2: se $\omega_j(P_2) = 0 \; \forall j$ allora "muovo" il punto P_2 mandandolo in P_2' tale che $\omega_2(P_2') \neq 0$.

Il luogo in cui $\omega_j(P_2) = 0$ per ogni j è un chiuso di Zariski.

Equivalentemente, l'insieme:

$$\{(P_1, \dots, P_g) : h_j(P_i) \text{ è linearmente dipendente}\} \text{ chiuso di Zariski.}$$

Considero $U \subset X^{(g)}$ tale che:

$$U = \{P_i \neq P_j \;\; \forall i \neq j\} \cap \{\mathrm{rk}(\omega_i(P_j))_{ij} = g\}.$$

Qui scelgo la tupla $(P_1, \dots, P_g)$ e ω_j in modo che $(\omega_j(P_i))_{i,j}$ sia una matrice triangolare superiore.

Studio la mappa dei periodi e ne faccio il differenziale in un certo senso.

Calcoliamo $\frac{\partial}{\partial z_i}(A^{(g)})(P_1, \dots, P_g)$:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(A^{(g)})(P_1, \dots, P_g) = \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\sum_{k \neq i} \int_{P_0}^{P_k} \omega_j + \int_{P_0}^{P_i + z_i} f_j \, dz_j\right)_{j=1,\dots,g}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(P_i) \\ \vdots \\ f_g(P_i) \end{pmatrix}.$$

(z_i e' i-esima coordinata di $X^{(g)}$, cioe' anche la coordinata in P_i)

Pertanto, la matrice Jacobiana associata ad $A^{(g)}$ nel punto $(P_1, \dots, P_g)$ e' data da $(\omega_j(P_i))_{i,j}$ e ha rango g per costruzione.

In conclusione, la mappa $A^{(g)}: X^{(g)} \to \mathrm{Jac}(X)$ e' una mappa olomorfa (definita dagli integrali di forme olomorfe).

Inoltre, $\forall (P_1, \dots, P_g)$ generico $d(A^{(g)})$ ha rango $= g$. Segue che

$$\dim X^{(g)} = g = \dim(\mathrm{Jac}(X))$$

e allora ho un isomorfismo locale dato da $A^{(g)}$ $\forall (P_1, \dots, P_g) \in U$.

Quindi $\forall \lambda \in A^{(g)}(P_1, \dots, P_g)$ con $(P_1, \dots, P_g) \in U$:

$$(A^{(g)})^{-1}(\lambda) = (P_1, \dots, P_g).$$

siccome $(A^{(g)})^{-1}(\lambda) = |P_1 + \dots + P_g|$ per Abel, ma $A^{(g)}$ isom. locale.

Per la surgettività, notiamo che $A^{(g)}: X^{(g)} \to \mathrm{Jac}(X)$ e' olomorfa e localmente invertibile, quindi aperta. Inoltre $X^{(g)}$ compatto, per cui $\mathrm{Im}\, A^{(g)}$ e' un chiuso. Per $\mathrm{Jac}(X)$ connessa, si ottiene $A^{(g)}$ surgettiva.

Ora, la mappa $A^{(g)}: X^{(g)} \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$ passa alla mappa che coincide

$$A_g : \mathrm{Div}_+^g(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$
$$\sum_{i=1}^g P_i \longmapsto \left(\int_{P_0}^{P_i} \omega_j\right).$$

In conclusione A_g è surgettiva ed è isomorfismo locale in
$$U = \{P_i \neq P_j \ \forall i \neq j\} \cap \{ rk(\omega_j(P_i))_{i,j} = g\}$$
ovvero se $\lambda \in Jac(X)$ è generico, allora
$$A_g^{-1}(\lambda) = |P_1 + \_ + P_g| \quad \text{e} \quad h^0(P_1 + \_ + P_g) = 1$$
come volevamo, perchè ciò implica $A_g^{-1}(\lambda) = \{P_1 + \ldots + P_g\}$.

OSS: l'aperto U dipende a priori dalle coordinate scelte.

Ma notiamo che $\dim(A_g^{-1}(\lambda))$ è semicontinua superiormente in λ.

Allora ad ogni modo $\{\lambda \in Jac(X) \mid \dim(A_g^{-1}(\lambda)) \geq 1\}$ è chiuso. ■

OSS.

Da Riemann-Roch, se $\deg(D) = g$ e $D \in Div_+^g(X)$, cioè $h^0(D) \geq 1$, allora $h^0(D) - h^1(D) = g - g + 1 = 1$.

Quindi:

A_g è isomorfismo locale $\iff h^0(D) = 1 \iff h^1(D) = 0$.

Alternativamente $\dim(A_g^{-1}(\lambda)) \geq 1 \iff h^1(D) \neq 0$.

OSS. Caso $g=0$

Se $g = 0$, allora $X \cong \mathbb{P}^1$ per cui $Pic(X) \cong \mathbb{Z}$.

Un fascio invertibile è quindi univocamente determinato dal grado, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ con cociclo $\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^d$.

Quindi $Jac(X) = \{0\}$.

OSS. Caso $g=1$

Se $g = 1$, allora tramite $\iota : H_1(X, \mathbb{Z}) \to \Omega^1(X)^\vee$:

$$\mathrm{Jac}(X) = \Omega^1(X)^\vee / H_1(X,\mathbb{Z}) = H^0(K_X) / \iota(H_1(X,\mathbb{Z})) \simeq \mathbb{C} / \iota(H_1(X,\mathbb{Z})).$$

$\Omega^1(X)$ è generato da $1 \cdot dz$ e per questo, equivalentemente

$$H^0(K_X) = H^0(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}.$$

Fissato un $P_0 \in X$, per calcolare Jac vediamo che $\forall P \in X$

$$\int_{P_0}^{P} 1 \cdot dz \text{ definisce un punto in } \mathbb{C}/\iota(H_1(X,\mathbb{Z})).$$

Ora, poichè $X = \mathbb{C}/\Lambda$ nel caso $g = 1$, si trova che

$$P \bmod \Lambda \longmapsto P \bmod \iota(H_1(X,\mathbb{Z})) \text{ è isomorfismo.}$$

Ciò che si ottiene è che Teorema Abel + Teorema Jacobi su X superficie di Riemann di genere $g \geq 1$ implicano

$$\mathrm{Pic}^0(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Jac}(X) \text{ è gruppo algebrico} \quad \text{(no dim)}$$

con una struttura di tipo

$$\mathrm{Jac}(X) = H^0(K_X)^\vee / \iota(H_1(X,\mathbb{Z})) = \mathbb{C}^g / \Lambda$$

cioè un toro di dimensione g.

PROPOSIZIONE

Sia $g(X) \geq 1$ e $P_0 \in X$ fissato. La mappa

$$A_{P_0} : X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$
$$P \longmapsto A_0(P - P_0)$$

è INIETTIVA, i.e. posso immergere X nel toro complesso $\mathrm{Jac}(X)$.

- **DIM.**

Vale che $A_{P_0}(P) = A_{P_0}(Q) \iff A_0(P-Q) = 0$ per le proprietà di $\int \omega$ su $Jac(X)$. Questo vale se e solo se

$$P - Q = \mathrm{div}(f) \quad \text{con } f \text{ meromorfa (per Thm di Abel).}$$

Ma questo è impossibile: siccome $g \geq 1$, i punti non sono linearmente equivalenti:

$$P - Q = \mathrm{div}(f) \iff \mathcal{O}_X(P) \cong \mathcal{O}_X(Q)$$

$$\overset{''}{\iff} h^0(\mathcal{O}_X(P)) \geq 2 \quad (\rightsquigarrow \text{ASSURDO per } g \geq 1)$$

oppure $\exists f : X \to \mathbb{C}$ con polo semplice Q e zero semplice P $\iff$ $X \overset{f}{\cong} \mathbb{P}^1$.''

Questo conclude. ∎

▸ APPLICAZIONI

(Vedo il divisore in $Jac(X)$ dove avevamo definito punti generici: $D = \sum P_i$ con $P_i \in X$ generici.)

▸ TEOREMA

Sia X superficie di Riemann compatta connessa con genere g.
Sia D divisore generico di grado d. Allora:

(A) se $\deg(D) \geq g$ segue $h^1(D) = 0$.

(B) se $\deg(D) \geq g+1$ vale $|D|$ senza punti base.

• DIM.

(A) Per dualità di Serre:

$$H^1(D) \neq 0 \iff H^0(K_X - D) \neq 0$$

$$\iff \exists \text{ divisore effettivo } E \text{ di grado } d_2 := (2g-2) - d$$

$$\text{tale che } E \sim K_X - D.$$

In altre parole abbiamo che

$$\exists \ \psi : \mathrm{Div}_+^{d_2}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^d(X) .$$
$$E \longmapsto \mathcal{O}_X(K_X - E)$$

Ma ora, da quanto visto:

Vero soltanto per divisori effettivi!

$$\mathrm{Pic}^d(X) \cong \mathrm{Jac}(X) \quad \text{ha dimensione } g$$

$$\mathrm{Div}_+^{d_2}(X) \quad \text{ha dimensione } d_2 < g-1 \quad \text{per ipotesi}$$

per cui si conclude che

| $\mathrm{Im}\,\psi$ chiuso in $\mathrm{Jac}(X)$ ma D era in posizione generale. |

$$H^1(D) \neq 0 \implies \mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Im}\,\psi \subsetneq \mathrm{Jac}(X). \text{ Assurdo.}$$

(B) Sia D tale che $H^1(D) = 0$. Abbiamo che:

$$P \text{ punto base per } D \iff H^0(D) \to 0 \in \mathbb{C}_P$$

$$\iff H^1(D-P) \neq 0.$$

Come prima, $H^1(D-P) \neq 0 \iff H^0(K_X - D + P) \neq 0$.

Posto $E \sim K_X - D$ di grado $d_2 = 2g-2-d$, per argomento analogo si trova che $\exists\, \psi : \mathrm{Div}_+^{d_2}(X) \times X \longrightarrow \mathrm{Pic}^{d+1}(X)$

$$(E,P) \longmapsto \mathcal{O}_X(K_X - E + P)$$

e osserviamo $\dim\left(\mathrm{Div}_+^{d_2}(X) \times X\right) = d_2 + 1 < g = \dim \mathrm{Pic}^{d+1}(X)$.

Allora $\mathrm{Im}\,\psi \subsetneq \mathrm{Pic}^{d+1}(X)$ è un chiuso proprio.

Segue che per $\mathcal{O}_X(D)$ generico in $\mathrm{Pic}^d(X) \cong \mathrm{Jac}(X)$ si ha la tesi. ∎

- Interpretazione Geometrica

Sia H di grado $2g+1$. Allora:

$$\varphi_{|H|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g+1}.$$

Preso $E = P_1 + \ldots + P_g$ e $D = H - E = Q_1 + \ldots + Q_{g+1}$ dove H è sezione generica e $P_1, \ldots, P_g$ generici. Otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_X(E) \longrightarrow \mathcal{O}_X(H) \longrightarrow \mathbb{C}_{P_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}_{P_g} \to 0$$

e siccome $h_1(E) = 0$, la mappa $\mathcal{O}_X(H) \to \mathbb{C}_{P_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}_g$ in grado coomologico 0 è surgettiva, ovvero:

$$H^1(E) = 0 \iff H^0(H) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_{p_g}.$$

Ora identificando $P_1, \dots, P_g$ con le immagini in $\mathbb{P}^{g+1} = \mathbb{P}(H^0(H)^\vee)$, la surgettività è equivalente a dire che $P_1, \dots, P_g$ impongono condizioni indipendenti sugli iperpiani, i.e. $P_1, \dots, P_g$ linearmente in posizione generale.

Step 5. The fiber of $A^{(g)}$ is isomorphic to the linear system $|p_1 + \dots + p_g|$, and this is isomorphic to the projectivization of the global sections, i.e.,

$$|p_1 + \dots + p_g| \cong \mathbb{P}\left(H^0\left(X, \mathcal{O}_X[p_1 + \dots + p_g]\right)\right).$$

Since $A^{(g)}$ is a local isomorphism, it turns out that the dimension of the fiber is zero and hence there exists one and only one divisor $p_1 + \dots + p_g$ (if a projective subspace contains two points, then it contains the whole line between them). □

Un' altra applicazione ci porta al seguente risultato:

▸ **TEOREMA** Castelnuovo - Mumford

Sia X superficie di Riemann compatta connessa di genere g.
Se H è un divisore di grado $d \geq 2g+1$ allora

$$\bigoplus_n H^0(nH) \text{ è generato in grado } 1.$$

Per la dimostrazione servono i seguenti...

[$\dim|E|$ = dimensione del sist. proj. lin. associato in $\mathbb{P}^1(H^0(X,D))$
= $\dim H^0(E) - 1$]

▸ **LEMMA** Base Point Free Pencil Trick

Supponiamo E divisore tale che $\dim|E| = 1$ (o in generale tale che $V \subset H^0(E)$ con $\dim(V) = 2$) ed $|E|$ senza punti base (in generale V senza punti base). Dato H divisore, allora:

$$\ker\left(H^0(E) \otimes H^0(H) \longrightarrow H^0(E+H)\right) \cong H^0(H-E).$$

• DIM. Lemma

Sia $\{s_1, s_2\}$ una base di $H^0(E)$.

$$\ker \longleftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in H^0(H) \text{ tali che } \alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_2 = 0$$

$$\text{cioè } \alpha_1 \cdot s_1 = -\alpha_2 \cdot s_2.$$

Il "trick" è che s_1, s_2 non hanno zeri in comune dato che il sistema $|E|$ è base-point-free. Ma da sopra:

$$\begin{cases} \alpha_1 \text{ si annulla in } \operatorname{div}(s_2) \\ \alpha_2 \text{ si annulla in } \operatorname{div}(s_1) \end{cases} \quad \text{cioè } \exists\, \eta \in H^0(H-E) \text{ t.c. } \begin{cases} \alpha_1 = -s_2 \cdot \eta \\ \alpha_2 = s_1 \cdot \eta . \end{cases}$$

Questo dà l'isomorfismo cercato. ■

Più in generale: (Si collega anche la coomologia di Koszul...)

LEMMA

Sia E divisore tale che:

$$H^1(E) = 0 \quad , \quad |E| \text{ base point free} \quad , \quad H^1(H-E) = 0 .$$

Allora $H^0(H) \otimes H^0(E) \twoheadrightarrow H^0(H+E)$.

- DIM. Lemma

Consideriamo, per $E = \sum_i n_i P_i$ e $\Delta = \bigoplus_i \mathbb{C}[[z]]/(z^{n_i})$, la successione

$$0 \to \mathcal{O}(H-E) \longrightarrow \mathcal{O}(H) \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0 .$$

Se E generico, allora $E = \sum_i P_i$ e $\Delta = \mathbb{C}_{P_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_{P_d}$.

Dato che $H^1(H-E) = 0$, segue l'esattezza di

$$0 \to H^0(H-E) \to H^0(H) \to H^0(\mathcal{O}_\Delta) \to 0 .$$

Tensorizzo allora con $H^0(E)$ per ottenere: (sono spazi vettoriali, si conserva l'esattezza)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(H-E)\otimes H^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "m_1"] & H^0(H)\otimes H^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "m_2"] & H^0(\mathcal{O}_\Delta)\otimes H^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "m_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(H) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(H+E) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathcal{O}_\Delta \otimes \mathcal{O}(E)) \cong H^0(\mathcal{O}_\Delta) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_3 &
\end{tikzcd}$$

che completiamo al diagramma con le mappe di moltiplicazione.

Notiamo che m_3 surgettiva perchè Δ è 0-dimensionale per cui

$$\mathcal{O}_\Delta \cong \mathcal{O}_\Delta \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(E) \qquad \text{e} \qquad |E| \text{ senza punti base.}$$

Abbiamo inoltre questo trucco:

$$\begin{tikzcd}
 & & H^0(H) \otimes H^0(E) \\
H^0(H) \arrow[urr] \arrow[d] & \alpha \arrow[r, mapsto] & \alpha \otimes s \quad \forall s \in H^0(E) \arrow[d, mapsto] \\
 & & \alpha \cdot s \in H^0(H+E) \arrow[d, mapsto] \\
C_1 \arrow[uur, dotted] \arrow[rr, "=0", red] & & 0 \in C_2
\end{tikzcd}$$

sollevo ogni elemento di C_1 ad $H^0(H)$

Esatta, quindi doppia composizione è nulla.

quindi la mappa indotta $C_1 \to C_2$ tra conuclei è identicamente nulla. Ma m_3 surgettiva implica $C_3 = 0$, $C_1 \overset{0}{\twoheadrightarrow} C_2$.

Segue che $C_2 = 0$. $\blacksquare$

- <u>DIM.</u> Teorema

Scelgo $d-(g+1)$ punti generici $P_1, -, P_{d-g-1}$ e pongo allora

$$\Delta = \bigoplus_i P_i \qquad \text{ed} \qquad E = H - \sum_i P_i \quad \text{con grado } g+1.$$

cioè $\mathcal{O}_\Delta = \bigoplus_i \mathbb{C}_{P_i}$

Per la Proposizione su $Jac(X)$ abbiamo che:

Somma g punti $\Rightarrow \dim|P_1 + \ldots + P_g| = 0$.
In questo caso sono $g+1$.

$$H^1(E) = 0, \quad |E| \text{ non ha punti base}, \quad \dim|E| = 1, \quad H^1(H-E) = 0.$$

Voglio ora studiare $H^0(H) \otimes H^0(H) \to H^0(2H)$. Come nell'ultimo lemma, considero la successione esatta

$$0 \to H^0(E) \to H^0(H) \to H^0(\mathcal{O}_\Delta) \to 0$$

e tensorizzando con $H^0(H)$ trovo che

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(E) \otimes H^0(H) \arrow[r] \arrow[d, "m_1"] & H^0(H) \otimes H^0(H) \arrow[r] \arrow[d, "m_2"] & H^0(\mathcal{O}_\Delta) \otimes H^0(H) \arrow[r] \arrow[d, "m_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(E+H) \arrow[r] & H^0(2H) \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_\Delta \otimes \mathcal{O}(H)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ma:
- m_3 surgettiva perchè Δ 0-dimensionale e H molto ampio.
- m_1 surgettiva per il "Base point free pencil trick":

$$\begin{cases} \dim(H^0(E)) = 2 \text{ e } \dim(H^0(H)) = d-g+1 \\ \dim(H^0(H+E)) = d+(g+1)-g+2 = d+2 \\ \dim(H^0(H-E)) = d-(g+1)-g+1 = d-2g \end{cases}$$

Guardando alle dimensioni, segue che m_1 surgettiva.

Quindi $m_2 : H^0(H) \otimes H^0(H) \to H^0(2H)$ è surgettiva.

Per $n \geq 2$ abbiamo invece che in modo analogo

$$H^0(H) \otimes H^0(nH) \twoheadrightarrow H^0((n+1)H)$$

usando l'ultimo lemma o il pencil trick con calcolo dimensionale, dove questa volta $E = H - \sum_i P_i$ e $\deg E = g+1$ e si tensorizza per $H^0(nH)$ per questa volta. $\blacksquare$

APPENDICE

In questa sezione voglio inserire alcuni pezzi del libro di Rick Miranda o ulteriori ragionamenti personalmente utili a capirci qualcosa (soprattutto data la mia ignoranza in geometria algebrica ☺).

▸ Sui SISTEMI LINEARI (vedi pag. 80)

Pullback

DEFINITION 1.16. Let $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q$ be a divisor on Y. The *pullback of D to X*, denoted by $F^*(D)$, is the divisor

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q F^*(q).$$

In other words, thinking of divisors as functions, we have

$$F^*(D)(p) = \mathrm{mult}_p(F) D(F(p)).$$

Pullbacks behave very nicely with respect to most operations on divisors.

Proprietà Pullback

LEMMA 1.17. *Let $F : X \to Y$ be a nonconstant holomorphic map between Riemann surfaces. Then:*

(a) *The pullback is a group homomorphism $F^* : \mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X)$.*
(b) *The pullback of a principal divisor is principal. Indeed, if f is a meromorphic function on Y, then $F^*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(F^*(f)) = \mathrm{div}(f \circ F)$.*
(c) *If X and Y are compact, so that divisors have degrees, we have*

$$\deg(F^*(D)) = \deg(F) \deg(D).$$

Warning: the pullback of a canonical divisor is not necessarily canonical; we shall see a bit later what the difference is.

Intersection Divisors

X curva liscia
G poly omog $\neq 0$.
Vogliamo calcolare dove G si annulla su X.

Intersection Divisors on a Smooth Projective Curve. Let X be a smooth projective curve, that is, a Riemann surface holomorphically embedded in projective space $\mathbb{P}^n$. We will write the homogeneous coordinates in $\mathbb{P}^n$ as $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$. Fix a homogeneous polynomial $G(x_0, \ldots, x_n)$ which is not identically zero on X.

We want to define the ~~intersection divisor div(G)~~ on X, which records the points where $G = 0$ on X. Of course there are multiplicities (i.e., orders of vanishing) and we must take these into account.

Fix a point $p \in X$ where G vanishes, and choose a homogeneous polynomial H of the same degree as G, which does not vanish at p. (One way to do this is to choose a coordinate x_i which is not zero at p, and use $H = x_i^d$.)

In this case the ratio G/H is a meromorphic function on X, which vanishes at p. We define the integer $\mathrm{div}(G)(p)$ to be the order of this meromorphic function at p. Note that since G vanishes at p and H does not, this order is strictly positive.

At points q where $G \neq 0$ we set $\mathrm{div}(G)(q) = 0$.

LEMMA 1.20. *This divisor* $\mathrm{div}(G)$ *does not depend on the choice of the nonvanishing homogeneous polynomial H, and is therefore well defined.*

PROOF. If another polynomial H' is used, then the meromorphic function G/H changes to G/H', which is just G/H multiplied by the nonzero function H/H'. Since multiplication by a meromorphic function having order 0 does not change the order, we see that the order of G/H and of G/H' is the same, and is determined only by G. □

Intersection Divisor

DEFINITION 1.21. The divisor $\operatorname{div}(G)$ is called the *intersection divisor* of G on X.

Note that

$$\operatorname{div}(G_1G_2) = \operatorname{div}(G_1) + \operatorname{div}(G_2) \tag{1.22}$$

if G_1 and G_2 are both homogeneous polynomials.

Hyperplane Divisor

Of particular importance is when G has degree one. In this case the intersection divisor is called a *hyperplane divisor*.

There is a nice relationship between intersection divisors and principal divisors. Suppose that G_1 and G_2 are two homogeneous polynomials *of the same degree*. Then we may form the meromorphic function $f = G_1/G_2$ on the smooth projective curve X.

LEMMA 1.23. *With the above notation, if G_1 and G_2 are homogeneous polynomials of the same degree, then the divisor of $f = G_1/G_2$ is the difference of the two intersection divisors:*

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(G_1) - \operatorname{div}(G_2).$$

PROOF. Given a point $p \in X$, choose a homogeneous polynomial H of the same degree as G_1 and G_2 which does not vanish at p. Then $\operatorname{div}(G_1)(p)$ and $\operatorname{div}(G_2)(p)$ are equal to the order of the functions G_1/H and G_2/H at p. Since $f = G_1/G_2 = (G_1/H)/(G_2/H)$, we have $\operatorname{ord}_p(f) = \operatorname{ord}_p(G_1/H) - \operatorname{ord}_p(G_2/H)$ as required. □

In particular, we see that the difference between any two hyperplane divisors is a principal divisor.

2. Linear Equivalence of Divisors

One notices that in many of the natural constructions of divisors, it is often the case that any two of the divisors differ by a principal divisor. For example, the difference between any two canonical divisors is a principal divisor. This seemingly harmless idea will become the primary way in which divisors are organized.

The Definition of Linear Equivalence. The relationship of "differing by a principal divisor" is important enough to be extracted and given a name:

Equivalenza Lineare

DEFINITION 2.1. Two divisors on a Riemann surface X are said to be *linearly equivalent*, written $D_1 \sim D_2$, if their difference is a principal divisor, i.e., if their difference is the divisor of a meromorphic function.

There are several elementary remarks to be made:

LEMMA 2.2. *Let X be a Riemann surface. Then:*

(a) *Linear equivalence is an equivalence relation on the set* $\operatorname{Div}(X)$ *of divisors on X.*
(b) *A divisor is linearly equivalent to 0 if and only if it is a principal divisor.*
(c) *If X is compact, then linearly equivalent divisors have the same degree: if $D_1 \sim D_2$ then* $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

PROOF. Statement (b) is practically the definition of linear equivalence: $D \sim 0$ if and only if $D - 0 = D$ is a principal divisor. Statement (a) then follows immediately, since we see that linear equivalence is simply the relation of being in the same coset for the subgroup $\operatorname{PDiv}(X)$ of principal divisors. A linear equivalence class is therefore exactly a coset for $\operatorname{PDiv}(X)$.

If X is compact, then principal divisors have degree 0 (Lemma 1.5). Therefore if $D_1 = \operatorname{div}(f) + D_2$, then $\deg(D_1) = \deg(\operatorname{div}(f)) + \deg(D_2) = \deg(D_2)$, which proves (c). □

We have the following examples of linearly equivalent divisors, all taken from the examples of the last section.

LEMMA 2.3. *Let X be a Riemann surface. Then:*

(a) *If f is a meromorphic function on X which is not identically zero, then the divisor of zeroes of f is linearly equivalent to the divisor of poles of f:* $\operatorname{div}_0(f) \sim \operatorname{div}_\infty(f)$.
(b) *Any two canonical divisors on X are linearly equivalent, and any divisor linearly equivalent to a canonical divisor is a canonical divisor.*
(c) *If X is the Riemann Sphere $\mathbb{C}_\infty$, then any two points on X are linearly equivalent.*
(d) *If $F : X \to Y$ is a holomorphic map, and D_1 and D_2 are linearly equivalent divisors on Y, then the pullbacks $F^*(D_1)$ and $F^*(D_2)$ are linearly equivalent divisors on X.*

(e) *If* $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ *is a holomorphic map, then the inverse image divisors* $F^*(\lambda)$ *are all linearly equivalent.*

(f) *If* X *is a smooth projective curve, and* G_1 *and* G_2 *are two homogeneous polynomials in the ambient variables of the* same *degree, then their intersection divisors* $\operatorname{div}(G_1)$ *and* $\operatorname{div}(G_2)$ *are linearly equivalent. In particular, any two hyperplane divisors on* X *are linearly equivalent.*

PROOF. Statement (a) is immediate from the equation (1.9), which says that for a meromorphic nonzero function f, $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f)$. Statement (b) is the content of Corollary 1.13.

To see (c), let λ_1 and λ_2 be two points in $\mathbb{C}_\infty$, neither equal to ∞. Then $f(z) = (z - \lambda_1)/(z - \lambda_2)$ is a meromorphic function with $\operatorname{div}(f) = 1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2$. If $\lambda_2 = \infty$, then simply use $f(z) = z - \lambda_1$.

To prove (d), suppose that $D_1 - D_2 = \operatorname{div}(f)$ on Y, for some meromorphic function f on Y. Then by Lemma 1.17, $F^*(D_1) - F^*(D_2) = \operatorname{div}(F^*(f))$, where $F^*(f) = f \circ F$ is the composition of f with the map F. Statement (e) now follows immediately from (c) and (d).

Finally (f) is immediate from Lemma 1.23. □

Idea Intuitiva!

The linear equivalence class of the canonical divisors is called the *canonical class* of divisors.

The terminology of linear equivalence comes from property (e) above; λ is varying on a *line* (which the Riemann Sphere is considered to be for this purpose). If we have a principal divisor D, we may write $D = \operatorname{div}(f)$ as $D = P - N$, where both P and N are nonnegative with disjoint support. Thus P is the divisor of zeroes of f and N is the divisor of poles of f. We see immediately from the definition that P and N are linearly equivalent. Now view f not as a meromorphic function but as a holomorphic map F from X to the Riemann Sphere. The divisor P is the inverse image divisor $F^*(0)$, and N is the inverse image divisor $F^*(\infty)$. One can imagine "interpolating" between P and N by the other inverse image divisors $F^*(\lambda)$ as λ passes from 0 to ∞. This gives a family of divisors on X, varying with $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$.

Calcolo / Proprietà dei Divisori

Fascio $\mathcal{O}_X(D)$

- Il FASCIO associato a $D \in \mathrm{Div}(X)$ è:

$$\mathcal{O}_X(D) := \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ meromorfe con } D + \mathrm{div}(f) \geq 0 \}$$

È un fascio invertibile con $[\mathcal{O}_X(D)]^{-1} \simeq \mathcal{O}_X(-D)$.

- **PROPOSIZIONE $X = \mathbb{P}^1$**

Sia $X = \mathbb{P}^1$ e $\deg(D) = d > 0$. Allora se f_D meromorfa tale che $\mathrm{div}(f_D) = D$, si ottiene:

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)) \simeq \{ g \cdot f_D \mid g \text{ poly omog grado} \leq d \}.$$

Sistemi Lineari

- **PROPOSIZIONE**

Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$. Allora:

$$|D| \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$$

- **PROPOSIZIONE**

P non p.b. per $|D| \iff H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_p \quad \forall p \in X$

- **PROPOSIZIONE**

Sia $|D|$ b.p.f. Allora $\varphi_{|D|} : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, D)^\vee)$ è ben definita.

Pullback di $f : X \to Y$

- Sia $g : Y \to \mathbb{C}$. $\quad f^*(\mathrm{div}(g)) = \mathrm{div}(g \circ f)$.
- Vale che $f^* \mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}_X(f^*(D))$.

- Vale che $\deg(f^*D) = (\deg f)\cdot(\deg D)$.

Divisore Canonico

Definiamo $K_X = \mathrm{div}(\omega)$ con $\omega \in \Omega^1(X)$.

- **TEOREMA** Riemann - Hurwitz

  Sia $\pi : X \to Y$ morfismo non costante, X, Y SdR c.c.

  $$K_X \sim \pi^*(K_Y) + R$$

- **Corollario**

  Sia X SdRcc : $\deg(K_X) = 2g - 2$.

Riemann - Roch

- **TEOREMA**

  Sia X SdRcc, $D \in \mathrm{Div}(X)$.

  $$\chi(D) = \deg(D) + \chi(X)$$

  $$h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - g$$

  $$h^0(D) - h^0(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g$$

Dualità di Serre

- **TEOREMA**

  Vale che $H^1(D) \simeq H^0(K_X - D)$.

- **Corollario**

  Se $\deg(D) < 0$ allora $H^0(D) = 0$.

  Se $\deg(D) \geq 2g+1$ allora $H^1(D) = 0$.

Divisori di Grado Alto

- **PROPOSIZIONE**

  $|D|$ è b.p.f. $\iff$ $\forall P \in X$ $h^0(D-P) = h^0(D) - 1$.

  D molto ampio $\iff$ $\forall P, Q \in X$ $h^0(D-P-Q) = h^0(D) - 2$.

- **PROPOSIZIONE**

  $\deg(D) > 2g-1 \Rightarrow h^0(D) = 0$.

  $\deg(D) \geq 2g \Rightarrow |D|$ è b.p.f.

  $\deg(D) \geq 2g+1 \Rightarrow D$ è molto ampio.

- **PROPOSIZIONE**

  Sia $g(X) = 0$ e $D = 1 \cdot P$. Allora $\varphi_{|D|} : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$.

- **TEOREMA**

  Sia X SdRcc e $g(X) = g$, $\deg(D) = d \geq 2g+1$. Allora

  $$\varphi_{|D|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^{d-g} \text{ embedding}$$

  tale che $\varphi_{|D|}(X) = V(g_1, \dots, g_r)$ curva algebrica con g_i omogenei in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{d-g}]$.

Divisori di Grado Basso

- **PROPOSIZIONE**

  Vale che $h^0(D) \leq \deg(D) + 1$.

  L'uguaglianza è verificata se e solo se $X \simeq \mathbb{P}^1$.

  LEMMA

  Sia X SdRcc e $D \in \mathrm{Div}(X)$.

$\dim |D| \geq k \iff \forall \{P_1, \dots, P_k\} \subseteq X$ esiste $D_1 \in |D|$

$$\sum_i P_i \leq D_1 .$$

PROPOSIZIONE

Siano $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$. Allora

$$\dim |D_1 + D_2| \geq \dim |D_1| + \dim |D_2| .$$

Sistemi Lineari e Mappe $X \xrightarrow{\text{olom}} \mathbb{P}^n$

The Hyperplane Divisor of a Holomorphic Map to $\mathbb{P}^n$. Let $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ be a holomorphic map. We have seen above that we may associate to ϕ a linear system $|\phi|$ of divisors on X, by considering a set of $n+1$ meromorphic functions which define ϕ.

There is another, more geometric, way of obtaining a linear system from the holomorphic map ϕ, which is inspired by the construction of a hyperplane divisor for a smooth projective curve.

Costruzione del pullback $\phi^*(H)$

Suppose that $H \subset \mathbb{P}^n$ is a hyperplane, defined by the vanishing of a single homogeneous polynomial of degree one. Suppose that X does not lie entirely inside H. We will define a divisor $\phi^*(H)$ associated to this hyperplane.

Fix a point $p \in X$, and suppose that L is the homogeneous linear equation for H. Since X does not lie inside H, the equation L does not vanish identically on X.

Choose another homogeneous linear equation M which is not zero at $\phi(p)$, and consider the function $h = (L/M) \circ \phi$, defined in a neighborhood of p. This

is a holomorphic function near p, since if we choose a local coordinate z centered at p and write ϕ near p as $\phi(z) = [g_0(z) : g_1(z) : \cdots : g_n(z)]$ for holomorphic functions g_i, not all 0 at $z = 0$, the function h is a ratio of one linear combination of g_i's divided by another, with the denominator not zero at p.

We set $\phi^*(H)(p)$ to be the order $\operatorname{ord}_p(h)$ of h at p; since h is holomorphic, this is a nonnegative integer. Moreover it is strictly positive if and only if $\phi(p) \in H$.

DEFINITION 4.12. The above construction defines a divisor $\phi^*(H)$ on X, and is called a *hyperplane divisor* for the map ϕ.

One must check that this is well defined, but this goes exactly like the argument which shows that an intersection divisor on a smooth projective curve is well defined; we leave it to the reader. Indeed, it is possible to define, for any homogeneous polynomial G in the ambient variables, a divisor $\phi^*(G)$, using the same ideas.

In any case we note that the hyperplane divisor $\phi^*(H)$ depends only on the hyperplane H, and not on its equation L: if one multiplies the equation by a constant, one does not change the order of the function which defines $\phi^*(H)(p)$.

We want to show that the set of hyperplane divisors $\{\phi^*(H)\}$ forms exactly the linear system $|\phi|$ for the map ϕ. This relies on the following simple observation:

$\{\phi^*(H)\}_H$ è un sistema lineare, quindi il solo olomorfismo ϕ definisce $|D|$ sistema lineare in X.

LEMMA 4.13. *Suppose that the homogeneous coordinates of $\mathbb{P}^n$ are $[x_0 : \cdots : x_n]$, and that H is defined by the linear equation $L = \sum_i a_i x_i = 0$. Let the holomorphic map ϕ be defined by $\phi = [f_0 : \cdots : f_n]$, and set $D = -\min_i\{\operatorname{div}(f_i)\}$. If $\phi(X)$ is not contained in the hyperplane H, then*

$$\phi^*(H) = \operatorname{div}(\sum_i a_i f_i) + D.$$

PROOF. Fix a point $p \in X$, and choose j such that $\operatorname{ord}_p(f_j) = -D(p)$ is the minimum order. In this case the coordinate x_j will not vanish at p, so we may take $M = x_j$ in defining the hyperplane divisor $\phi^*(H)$. The function $h = (L/M) \circ \phi$ is then $h = (\sum_i a_i f_i)/f_j)$, and does not vanish identically near p since X does not lie inside H. Hence

$$ord_p(h) = \operatorname{ord}_p(\sum_i a_i f_i) - \operatorname{ord}_p(f_j) = \operatorname{ord}_p(\sum_i a_i f_i) + D(p)$$

as claimed. □

Now the desired statement is immediate.

COROLLARY 4.14. *Let $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ be a holomorphic map. Then the set of hyperplane divisors $\{\phi^*(H)\}$ forms the linear system $|\phi|$ of the map.*

We see in particular another quick proof that the linear system $|\phi|$ of a holomorphic map has no base points. This is clear from the description of this linear

system as the set of hyperplane divisors: a point p is in the support of a hyperplane divisor $\phi^*(H)$ if and only if $\phi(p) \in H$, and given any point of projective space, one can find a hyperplane which does not contain that point.

Defining a Holomorphic Map via a Linear System. We will now prove that the base-point-free property of the linear system of a holomorphic map in fact characterizes such systems.

PROPOSITION 4.15. *Let $Q \subset |D|$ be a base-point-free linear system of (projective) dimension n on a compact Riemann surface X. Then there is a holomorphic map $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ such that $Q = |\phi|$. Moreover ϕ is unique up to the choice of coordinates in $\mathbb{P}^n$.*

PROOF. We have been running around these ideas enough now that the proof of the Proposition is almost easier than the statement. Suppose that the linear system Q corresponds to a vector subspace $V \subseteq L(D)$, so that the divisors of Q are those of the form $\operatorname{div}(f) + D$, for $f \in V$. Choose a basis $f_0, \ldots, f_n$ for V. Then the holomorphic map $\phi = [f_0 : \cdots : f_n]$ has $Q = |\phi|$ as desired.

To see the uniqueness statement, suppose that $\phi' = [g_0 : \cdots : g_n]$ also has $Q = |\phi'|$. The divisors of $|\phi'|$ are then of the form $\operatorname{div}(g) + D'$ where g is a general linear combination of the g_i's, and D' is the inverse of the minimum of the divisors of the g_i's. In any case since $|\phi| = |\phi'|$, we may change coordinates in the ϕ' map and assume that for each i, $\operatorname{div}(f_i) + D = \operatorname{div}(g_i) + D'$. If we set $h_i = f_i/g_i$, we see that $\operatorname{div}(h_i) = D' - D$ is constant, independent of i; since all of these ratios have the same divisor, they must all be equal (up to a constant factor). By adjusting the g_i's further by constant factors, we may then assume that there is a single meromorphic function h on X such that $h = f_i/g_i$. At this point we have that $\phi = \phi'$, and so ϕ is unique, up to the changes of coordinates in $\mathbb{P}^n$ which were applied in the proof. □

Therefore we have a 1-1 correspondence

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{base-point-free} \\ \text{linear systems} \\ \text{of dimension } n \text{ on } X \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{holomorphic maps } \phi : X \to \mathbb{P}^n \\ \text{with nondegenerate image,} \\ \text{up to linear coordinate changes} \end{array} \right\}.$$