UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Dispense di

Istituzioni di Analisi Matematica

Dalle lezioni di:

Prof: Pietro Majer

Scritte da:

Andrea Rocca

Alessio Sgubin

ANNO ACCADEMICO 2023/2024

Indice

Parte I

Capitoli

Capitolo 1

Spazi Vari

1.1 Spazi Normati e Banach

Definizione 1.1 - Seminorma e Norma
Una *seminorma* su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V (lavoreremo solitamente con $\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{C}$) è una funzione $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, +\infty)$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni $x, y \in V$ verifica

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Questa funzione è una *norma* se verifica anche:

- $x = 0$ se e solo se $\|x\| = 0$.

Definizione 1.2 - Spazio normato e Banach
Una coppia $(V, \|\cdot\|)$ si chiama *spazio normato* quando V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ è una norma su di esso. Con la distanza $d(x, y) := \|x - y\|$ lo spazio V è anche metrico.

Uno spazio normato è *Banach* se è pure completo.

Esercizio 1.3 - Teorema di Fréchet-Kuratowski
Ogni spazio metrico si immerge isometricamente in uno spazio di Banach.

Definizione 1.4 - Serie Normalmente Convergente
Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ dove $(x_n)_n \subseteq X$ spazio normato si dice *normalmente (o assolutamente) convergente* se $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Proposizione 1.5 - Criterio di Convergenza per Serie
Uno spazio normato è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente è anche convergente[a].

[a] Una serie si dice convergente se le somme parziali formano una successione convergente nello spazio.

Esercizio 1.6 - Spazi Quoziente
Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio seminormato ed* $N \subseteq X$ *un sottospazio. Allora lo spazio vettoriale*

quoziente ${}^{X}\!/_{N}$ *è dotato della seminorma quoziente:*

$$\|\xi\|_{X/N} := \inf_{x\in\xi} \|x\| \qquad \forall \xi \in {}^{X}\!/_{N}.$$

Valgono le seguenti proprietà (da dimostrare):

1. *effettivamente* $\|\cdot\|_{X/N}$ *è una seminorma.*
2. *la seminorma* $\|\cdot\|_{X/N}$ *è una norma se e solo se* N *è sottospazio chiuso (indipendentemente dal fatto che* $\|\cdot\|$ *sia una norma o seminorma).*
3. *se* $(X, \|\cdot\|)$ *è uno spazio normato ed* N *sottospazio chiuso di* X *allora:*
   $$(X, \|\cdot\|) \text{ è completo} \iff N \text{ e } {}^{X}\!/_{N} \text{ sono completi.}$$
4. *data la naturale proiezione* $\pi : X \to {}^{X}\!/_{N}$ *si ottiene che:*
   $$B_{X/N}(0, r) = \pi\left(B_X(0, r)\right).$$

Fatto 1.7
Se E *è uno spazio normato tale che* $dimE^* < +\infty$ *allora* $dimE < +\infty$ *(segue dal fatto che* E^* *separa i punti).*

1.2 Spazi Vettoriali Topologici

Definizione 1.8 - Spazio Vettoriale Topologico
Uno *spazio vettoriale topologico* su $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (indicato S.V.T.) è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale X con una topologia che rende continue le operazioni vettoriali:

$$\begin{array}{rccc} + : & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

Osservazione 1.9
Sono stati lasciati per esercizio i seguenti fatti.

- *Ogni spazio vettoriale topologico* T_0 *è anche* T_3 *(anzi* $T_{3+\frac{1}{2}}$*).*
- *Anche se uno spazio non fosse* T_0*, vale comunque un risultato interessante. Infatti ogni SVT si scrive come prodotto (con la topologia prodotto indotta) di:*

$$\text{“SVT che è } T_0\text{”} \qquad \times \qquad \text{“Spazio topologico banale } \overline{\{0\}}\text{”}$$

1.2.1 Intorni dello zero in SVT

Definizione 1.10 - Filtro di Parti
Dato un insieme X un *filtro di parti* è un sottoinsieme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ non vuoto che rispetti le proprietà:

1. per ogni $U \in \mathcal{U}$ vale $U \neq \varnothing$.
2. per ogni $U \in \mathcal{U}$ ed ogni $V \supset U$ vale $V \in \mathcal{U}$.
3. per ogni $U, V \in \mathcal{U}$ segue che $U \cap V \in \mathcal{U}$.

Si introducono due proprietà per sottoinsiemi di X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Definizione 1.11 - Insieme Bilanciato
Sia $A \subseteq X$. L'insieme A si dice *bilanciato* se e solo se

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ con } |\lambda| \leq 1 \text{ vale che } \lambda \cdot A \subseteq A.$$

Definizione 1.12 - Insieme Assorbente
Un insieme $A \subseteq X$ si dice *assorbente* se e solo se

$$\text{per ogni } x \in X \text{ esiste } n_x \in \mathbb{R}^+ \text{ tale che } x \in t \cdot A \text{ per ogni } t \geq n_x.$$

Si definisce la famiglia di tutti gli intorni di 0 in X SVT come:

$$\mathcal{U}_X = \mathcal{U} = \big\{U \subset X \mid U \text{ intorno di } 0 \in X\big\}$$

Questa famiglia ha quattro proprietà che si rivelano caratterizzanti su X SVT.

Proposizione 1.13
Sia X uno spazio vettoriale topologico. Vale che:

1. *$\mathcal{U}_X$ è un filtro di parti di X.*
2. *per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V - V \subseteq U$.*
3. *per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$ e V è bilanciato.*
4. *per ogni $U \in \mathcal{U}$ vale che U è assorbente.*

Per le dimostrazioni di questi fatti, la seguente osservazione è fondamentale.

Osservazione 1.14
Sia X uno SVT. Allora le mappe di traslazione e di omotetia sono tutte continue, anzi sono omeomorfismi.

Proposizione 1.15
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathcal{U}$ una famiglia di parti su X che rispetti le proprietà 1+2+3+4 della Proposizione 1.13.
Allora esiste un'unica topologia di spazio vettoriale topologico per X tale che $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$.

1.2.2 Funzionale di Minkowski

Si introduce questo funzionale che tornerà utile in seguito nella costruzione di funzionali.

Definizione 1.16 - Funzionale di Minkowski
Sia X uno spazio vettoriale reale e $C \subseteq X$ un sottoinsieme convesso tale che $0 \in C$.
Si definisce il *funzionale di Minkowski* come:

$$p_C(x) = \inf\{t \geq 0 \mid t \cdot C \ni x\}$$

Valgono le seguenti proprietà.

- Se $C = B_X(0,1)$ allora $p_C(x) = \|x\|$.
- C è assorbente se e solo se $p_C(x) < \infty$ per ogni $x \in X$.
- Valgono le inclusioni:
$$\{p_C < 1\} \subseteq C \subseteq \{p_C \leq 1\}$$
- Il funzionale p_C è positivamente omogeneo.
- Il funzionale p_C è subadditivo.

1.3 Spazi Vettoriali Topologici Localmente Convessi

Definizione 1.17 - SVTLC
Uno *spazio vettoriale topologico localmente convesso* è uno spazio vettoriale topologico che ammette una base di intorni di 0 convessi.

Proposizione 1.18
Uno SVTLC ha una base di intorni assorbenti, bilanciati e convessi.

Proposizione 1.19 - Caratterizzazione SVTLC
Sia X uno spazio vettoriale con una famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che:

- *ogni $B \in \mathcal{B}$ è assorbente, bilanciato e convesso.*
- *per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ anche $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.*

Allora, denotato $\tilde{\mathcal{B}}$ l'insieme delle intersezioni finite di elementi in $\mathcal{B}$, segue che la famiglia

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid \exists n > 0, B \in \tilde{\mathcal{B}} \text{ tali che } rB \subseteq U\}$$

è un sistema di intorni di $0 \in X$ per una topologia di SVTLC su X.

1.3.1 Continuità degli Operatori e Forme Lineari su SVTLC

Fatto 1.20
Sia $T : (X, \mathcal{P}) \to (Y, \mathcal{Q})$ forma lineare tra SVTLC le quali topologie sono indotte dalle famiglie di seminorme $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ rispettivamente.
Allora T è un operatore continuo se e solo se per ogni $q \in \mathcal{Q}$ seminorma esiste $M \geq 0$ ed esistono seminorme $p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{P}$ tali che:

$$q(Tx) \leq M(p_1 \vee \cdots \vee p_r)(x) \qquad \forall x \in X$$

dove $\vee$ indica l'operatore "massimo".
Se $\mathcal{Q}$ è filtrante, ovvero per ogni $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ esistono $M > 0$ e $q \in \mathcal{Q}$ tali che $q_1 \vee q_2 \leq Mq$, allora la tesi si semplifica dicendo che:

$$\forall q \in \mathcal{Q}\ \exists M > 0, p \in \mathcal{P} \text{ tali che } q(Tx) \leq Mp(x)\ \forall x \in X.$$

Fatto 1.21
Sia $f : (X, \mathcal{P}) \to \mathbb{K}$ forma lineare. Essa è continua se e solo se esistono $p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{P}$ ed $M > 0$ tali che:

$$|\langle f, x\rangle| \leq M(p_1 \vee \cdots \vee p_r)(x) \qquad \forall x \in X.$$

1.4 Teorema di Hahn-Banach

In questa sezione riportiamo i diversi enunciati del Teorema di Hahn-Banach.

Teorema 1.22 - Teorema di Hahn-Banach
Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale ed $M \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.
Siano $f : M \to \mathbb{R}$ funzione lineare e $p : V \to \mathbb{R}$ funzione sublineare, cioè tale che:

$$\begin{cases} p(x+y) \leq p(x) + p(y) & \forall x, y \in V \\ p(tx) = tp(x) & \forall t \geq 0\ \forall x \in V \end{cases}.$$

Supponiamo inoltre che $f \geq p$ su M. Allora la mappa f si estende ad un funzionale lineare $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f} \leq p$.

Seguono diversi corollari.

Corollario 1.23
Sia X spazio normato, Y un suo sottospazio ed $f : Y \to \mathbb{R}$ lineare continua. Allora f si estende ad un funzionale lineare continuo su X con uguale norma.

Osservazione 1.24 - Caso Hilbert
Nel caso di H spazio di Hilbert ed Y sottospazio chiuso di H, si può considerare il proiettore ortogonale $P : H \to Y$. Ma allora una qualunque mappa lineare continua $T : Y \to \mathbb{R}$ si estende per composizione $TP : X \to \mathbb{R}$.
Questo permette di ottenere lo stesso risultato del precedente corollario tramite una costruzione esplicita.

Corollario 1.25
Sia X spazio normato. E' possibile calcolare per $x \in X$:

$$\|x\| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \langle f, x \rangle$$

dove il prodotto scalare indicato è la valutazione $\langle f, x \rangle = f(x)$.

Osservazione 1.26 - Caso Hilbert
Sia H spazio di Hilbert. Allora il precedente corollario è conseguenza del Teorema di Riesz: infatti l'associazione:

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H^* \\ x & \longmapsto & \langle \cdot, x \rangle \end{array}$$

è un isomorfismo, detto isomorfismo di Riesz.

Corollario 1.27
Data $T : X \to Y$ applicazione lineare continua tra spazi normati, si definisce l'operatore trasposto come:

$$\begin{array}{cccc} T^* : & Y^* & \longrightarrow & X^* \\ & f & \longmapsto & f \circ T \end{array}.$$

Allora $\|T^*\| = \|T\|$.

Corollario 1.28 - Inclusione isometrica nel biduale
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Si considera la mappa:

$$\begin{array}{cccc} i_X : & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ev}_x \end{array}$$

dove il funzionale $\mathrm{ev}_x : f \mapsto f(x)$ è la valutazione in $x \in X$. In particolare i_X è un'inclusione isometrica di X in X^{**}.
D'ora in poi quando si scriverà $X \subseteq X^{**}$ si intende l'inclusione tramite la mappa i_X.

Questo risultato motiva la seguente definizione.

Definizione 1.29 - Spazio Riflessivo
Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è *riflessivo* se i_X è surgettiva e dunque isometria.

Enunciamo ora il Teorema di Hahn-Banach nel caso complesso.

Teorema 1.30 - Teorema di Bohnenblust-Sobczyk
Sia X un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale normato ed Y sottospazio vettoriale. Dato un funzionale $f \in Y^*$, questo si estnde ad un funzionale $\tilde{f} \in X^*$ con stessa norma.

Riportiamo ora le forme geometriche del Teorema di Hahn-Banach.

Teorema 1.31 - Teorema di Separazione (I)
Sia X un $\mathbb{R}$-SVT ed A un aperto convesso, B un convesso tali che $A \cap B = \varnothing$. Allora esiste un funzionale $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $a \in A$ e $b \in B$ valga:

$$\langle F, a \rangle < \gamma \leq \langle F, b \rangle.$$

In altre parole, $A \subseteq \{F < \gamma\}$ e $B \subseteq \{F \geq \gamma\}$.

Teorema 1.32 - Teorema di Separazione (II)
Sia X un $\mathbb{R}$-SVTLC e siano K,C convessi disgiunti di X tali che K compatto e C chiuso. Allora esiste un funzionale lineare continuo F su X e due valori reali $\gamma_1 < \gamma_2$ tali che:

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle F, y \rangle \qquad \forall x \in K, y \in C.$$

Osservazione 1.33
L'ipotesi di locale convessità nel precedente teorema è necessaria.

1.5 Costruzione di Duali

Riportiamo due costruzioni generali per duali.

1.5.1 Prodotto di Normati

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati. Si può considerare lo spazio prodotto $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ dove per $x \in X$ ed $y \in Y$:

$$\|(x,y)\|_{X \times Y} := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Allora passando ai duali si ottiene una isometria:

$$\big(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y}\big)^* \;\simeq\; \big(X^* \times Y^*, \|\cdot\|_{X^*} + \|\cdot\|_{Y^*}\big).$$

1.5.2 Quoziente di Normati

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e consideriamo Y suo sottospazio vettoriale chiuso.
Definiamo l'*annullatore di Y* come $Y^\perp = \{f \in X^* \mid f|_Y = 0\}$ e allora si ottengono le seguenti isometrie:

$$Y^* \simeq {X^*}/{Y^\perp} \qquad \text{e} \qquad \left({X}/{Y}\right)^* \simeq Y^\perp.$$

Capitolo 2

Operatori Lineari e proprietà topologiche

2.1 Teorema della Mappa Aperta

Teorema 2.1 - Teorema della Mappa Aperta
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *spazi di Banach. Sia* $T : X \to Y$ *lineare, continua e* surgettiva. *Allora* T *è aperta.*

Osservazione 2.2
L'ipotesi di surgettività può essere sostituita con la richiesta che $T(X)$ *sia di II categoria.*

Idea. Denotata con B la palla unitaria chiusa di X vogliamo vedere che

1. $\overline{TB}$ è intorno di $0 \in Y$ e questo vorrà la completezza di Y.
2. TB è intorno di $0 \in X$ e questo vorrà la completezza di X.

Questo concluderebbe la dimostrazione. ⌟

2.1.1 Conseguenze

Corollario 2.3
Un operatore lineare continuo tra spazi di Banach è omeomorfismo se e solo se è bigettivo.

Corollario 2.4
Sia $T : X \to Y$ *operatore lineare continuo tra Banach. Esso induce un'applicazione:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\
X/\ker T \arrow[ur, "\tilde{T}"'] &
\end{tikzcd}
$$

tale che $\tilde{T} : X/\ker T \to Y$ *è lineare continuo ed iniettivo. Se* T *è aperta, allora* $\tilde{T}$ *è un omeomorfismo.*

Corollario 2.5
Sia $T : X \to Y$ *lineare continua tra Banach. Vale che:*

$$T \text{ è fortemente iniettiva se e solo se } T \text{ è iniettiva con } \operatorname{ran} T \text{ chiuso}$$

dove T si dice fortemente iniettiva *quando $\exists\ c$ tale che $\|Tx\| \geq c \cdot \|x\|$.*

Corollario 2.6
Dato un operatore $T : X \to Y$ lineare continuo tra Banach, vale che:

$$T \text{ è un'inversa destra se e solo se } T \text{ iniettivo con } \operatorname{ran} T \text{ addendo diretto di } Y.$$

Dato $S : Y \to X$ lineare continuo tra Banach, segue che:

$$S \text{ è inversa sinistra se e solo se } S \text{ surgettivo con } \ker S \text{ addendo diretto di } Y.$$

Corollario 2.7
Due norme di Banach confrontabili sullo stesso spazio vettoriale sono equivalenti (inducono la stessa topologia).

Esercizio 2.8 - Paradosso
Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Sia $\|\cdot\|_3 := \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$. Valgono le seguenti proprietà:

1. *una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge in $(X, \|\cdot\|_3)$ se e solo se converge sia in $(X, \|\cdot\|_1)$ che in $(X, \|\cdot\|_2)$.*
2. *una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ è di Cauchy in $(X, \|\cdot\|_3)$ se e solo se è di Cauchy sia in $(X, \|\cdot\|_1)$ che in $(X, \|\cdot\|_2)$.*

Da queste osservazioni segue subito la seguente proposizione.

Proposizione 2.9
Tutte le norme di Banach su X spazio vettoriale sono equivalenti.

Però è anche vero che su uno spazio normato X di dimensione $\dim X = \infty$. ci sono forme lineari non continue (a) e pure involuzioni lineari non continue (b). Infatti:

(a) *basta definire $f : X \to \mathbb{R}$ in modo che $fe_k = k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per $\{e_k\}_{\mathbb{N}}$ vettori linearmente indipendenti di norma 1.*

(b) *sia $L : X \to X$ dove $Lx := x + \langle f, x\rangle u$ per un certo $u \in X$ fissato ed una f forma lineare. Allora:*

$$L^2 x = x + \langle f, x\rangle u + \langle f, x + \langle f, x\rangle u\rangle u = x + \left(2\langle f, x\rangle + \langle f, x\rangle\langle f, u\rangle\right) u.$$

Preso $u \in X$ tale che $\langle f, u\rangle = -2$ allora $L^2 = \mathrm{id}$. Ma data una f non continua, neppure L è continua.

Si possono allora considerare una norma Banach $\|\cdot\|_1$ su X e la norma:

$$\|x\|_2 := \|Lx\|$$

che è sempre Banach per L come sopra. Questa norma rende:

$$L : (X, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1)$$

un'isometria lineare. Ma dato che L non *era continua, segue che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ non sono equivalenti.*
Questo crea un paradosso con la proposizione sopra. Dov'è il problema?

2.2 Teorema del Grafico Chiuso

Teorema 2.10 - Teorema del Grafico Chiuso
Siano X e Y spazi di Banach e $T : X \to Y$ lineare. Allora:

$$T \text{ è continua} \iff \operatorname{graph}(T) = \{(x, y) \in X \times Y \mid Tx = y\} \text{ è chiuso.}$$

Fatto 2.11
Sia F un convesso di $(X, \|\cdot\|)$. Esso è chiuso in $\|\cdot\|$ se e solo se è chiuso in w.
In particolare questo vale per F sottospazio vettoriale.

2.3 Lemma di Iterazione

Lemma 2.12 - Lemma di iterazione lineare
Siano X, Y spazi di Banach, $B = \overline{B}_X(0, 1)$ la palla chiusa unitaria di X e $T \in L(X, Y)$ lineare continua. Sia $U \subseteq Y$ limitato e $0 < t < 1$ tali che:

$$U \subseteq TB + tU.$$

Allora si trova che:

$$(1 - t)U \subseteq TB$$

ed in particolare se U è un intorno di $0 \in Y$ allora T è una mappa aperta e surgettiva.

Definizione 2.13 - σ-convesso
Un sottoinsieme $C \subseteq X$ di uno spazio di Banach si dice σ-convesso se per ogni $(x_k)_\mathbb{N} \subseteq C$ limitata e per ogni $(\lambda_k)_\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = 1$ allora anche $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k \in C$.

Proposizione 2.14 - Proprietà di σ-convessità
Si consideri $C \subseteq X$ dove $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.

a) Se C è un convesso chiuso allora C è σ-convesso.

b) Se C è un convesso aperto allora C è un σ-convesso.

c) Sia C un σ-convesso limitato e $T \in L(X, Y)$. Allora TC è σ-convesso.

d) Se C è un sottospazio allora C è σ-convesso se e solo se C è chiuso.

e) Se C è σ-convesso allora i traslati $C - v$ con $v \in X$ sono σ-convessi e per $T \in L(X, Y)$ anche $T^{-1}C$ è σ-convesso.

f) Sia C un σ-convesso e $0 < t < 1$. Allora per ogni U limitato vale che:

$$U \subseteq C + tU \text{ implica che } (1 - t)U \subseteq C.$$

g) Se $\{C_i\}_I$ è una famigli i σ-convessi, allora lo è anche $\bigcap_{i \in I} C_i$.

h) La proprietà del punto (f) si può "invertire".
Se $C \subseteq X$ è tale che esiste $t \in (0, 1)$ per il quale:

$$\text{per ogni } U \text{ limitato, se } U \subseteq C + tU \text{ allora } (1 - t)U \subseteq C$$

allora C è un σ-convesso.

2.3.1 Conseguenze

Teorema 2.15 - Teorema di Dugundji
Sia (M, d) uno spazio metrico e $A \subseteq M$ un chiuso. Siano E Banach con una mappa $f : A \to E$ continua.
Allora esiste un'estensione continua $F : M \to E$ di f. Inoltre, se $f(A) \subseteq B(0, R)$ allora anche $F(M) \subseteq B(0, R)$.

Teorema 2.16 - Teorema di Sollevamento per Operatori Lineari (Bartles - Groves)
Sia $L : E \to F$ lineare continua e surgettiva tra Banach. Sia M uno spazio metrico ed $f : M \to F$ continua Allora f si può sollevare ad E, cioè esiste $\tilde{f} : M \to E$ continua tale che $f = L \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "L"] \\ M \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

Osservazione 2.17
Ricordare che data $L : E \to F$ lineare, continua e surgettiva, questa non ha sempre inversa destra (dove inversa si intende isomorfismo tra Banach). Però ammette sempre un'inversa topologica destra grazie al Teorema della Mappa Aperta.

Teorema 2.18
Siano X, Y Banach. L'insieme delle applicazioni surgettive lineari $\mathrm{surgL}(X, Y) \subseteq L(X, Y)$ è un aperto. Precisamente, se $T : X \to Y$ è surgettivo, sappiamo che induce al quoziente un operatore invertibile:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd} .$$

Se consideriamo $k := \frac{1}{\|\tilde{T}^{-1}\|}$ allora per ogni $H \in L(X, Y)$ tale che $\|H\| < k$ vale che $T + H$ surgettivo.

Teorema 2.19 - Surgettività e Aggiunti
Sia $T \in L(X, Y)$ tale che T^* sia fortemente iniettivo, ovvero:

$$\exists k \text{ tale che } \|T^* y^*\| \geq k\|y^*\| \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Allora T è surgettivo. Vale anche il viceversa.

Teorema 2.20 - Iniettività e Aggiunti
Sia $T \in L(X, Y)$ con X,Y Banach. Valgono le seguenti equivalenze:

- *T è iniettivo se e solo se $\operatorname{ran} T^*$ è w^*-denso.*
- *T^* è iniettivo se e solo se $\operatorname{ran} T$ è denso (equivalentemente in w o $\|\cdot\|$).*

Capitolo 3

Topologie Deboli

3.1 Topologia iniziale e debole

Abbiamo visto diverse proprietà interessanti degli spazi SVTLC, tuttavia ancora non ne abbiamo esplicitati. Il prossimo esempio, quasi banale, ci introduce all'utilità della *topologia iniziale*.

Esempio 3.1
Se consideriamo $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topologia prodotto allora questo è uno SVTLC, infatti le proiezioni sono continue e lineari.

Vorremo imitare la costruzione precedente, però più in generale. In quel caso era sufficiente considerare la topologia prodotto visto che poi le proiezioni erano lineari, ma non è sempre il caso.

Definizione 3.1 - Topologia iniziale
Sia X un insieme[a] e $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i, \tau_i\}_{i \in I}$ allora esiste la *meno fine* topologia su X che rende continue tutte le f_i ed ha come prebase di aperti gli insiemi

$$f_i^{-1}(A) \text{ con } i \in I, A \in \tau_i.$$

[a]Notare che non si richiede alcuna topologia $\tau_{\mathcal{F}}$ su X. Questa costruzione è di carattere generale.

Teorema 3.2 - Proprietà universale della topologia iniziale
Dato X dotato della topologia iniziale $\tau_{\mathcal{F}}$ e $\phi : Z, \tau_Z \to X, \tau_{\mathcal{F}}$. Allora

$$\phi \text{ è continua} \iff f_i \circ \phi : Z, \tau_Z \to Y_i, \tau_i \text{ è continua.}$$

Proposizione 3.3 - Transitività costruzione topologie iniziali

Siano $\mathcal{F} = \{f_l : X \to Y_l, \tau_l\}$ e $G_l = \{g_{l,\eta} \to Z_{l,\eta}\}$. Allora sono equivalenti, come topologie su X le seguenti:

- *Topologia iniziale della famiglia $\{g_{l,\alpha} \circ f_l : X \to Z_{l,\alpha}\}$.*
- *Topologia iniziale della famiglia $\mathcal{F}$, rispetto alla topologia iniziale per ciascun Y_l dato dalla famiglia G_l.*

$$\begin{tikzcd}
 & & Z_{i,\alpha} \\
 & Y_i \arrow[ur, "g_{i,\alpha}"] \arrow[r, "g_{i,\beta}"] \arrow[dr, "g_{i,\gamma}"'] & Z_{i,\beta} \\
 & & Z_{i,\gamma} \\
 & & Z_{j,\alpha} \\
X \arrow[uuur, "f_k"] \arrow[r, "f_j"] \arrow[dddr, "f_i"] & Y_j \arrow[ur, "g_{j,\alpha}"] \arrow[r, "g_{j,\beta}"] \arrow[dr, "g_{j,\gamma}"] & Z_{j,\beta} \\
 & & Z_{j,\gamma} \\
 & & Z_{k,\alpha} \\
 & Y_k \arrow[ur, "g_{k,\alpha}"] \arrow[r, "g_{k,\beta}"] \arrow[dr, "g_{k,\gamma}"] & Z_{k,\beta} \\
 & & Z_{k,\gamma}
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Entrambe le topologie su X sono generate da:

$$f_l^{-1}(g_{l,\eta}(A)) = (g_{l,\eta} \circ f_l)^{-1}(A) \text{ con } A \in \tau_{l,\eta}.$$

□

Esempio 3.2
Dato X, τ e $Y \subseteq X$, la topologia quoziente si ottiene come topologia iniziale dove

$$\mathcal{F} = \{j_Y : Y \hookrightarrow X\}.$$

Esempio 3.3
Dati (X_i, τ_i) la topologia prodotto si ottiene come topologia iniziale dove

$$\mathcal{F} = \left\{\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i.\right\}$$

Osservazione 3.4
Si ricorda che la topologia prodotto di sottospazi coincide con la topologia di sottospazio indotta dal prodotto.

Proposizione 3.5
La topologia iniziale su uno spazio vettoriale X indotta da una famiglia di applicazioni ***lineari*** *$\tau_i : X \to Y_i$, dove Y_i è SVT per ogni i, è una topologia di SVT su X. In particolare è SVTLC se tutti gli Y_i sono SVTLC.*

Definizione 3.6 - Duale algebrico
Dato X $\mathbb{K}-$spazio vettoriale definiamo X'_{alg} come l'insieme delle funzioni lineari $f : X \to \mathbb{K}$.

Osservazione 3.7
Notiamo che X ***non*** *è detto che sia dotato di topologia.*

Definizione 3.8 - Topologia debole
Dati X $\mathbb{K}-$spazio vettoriale e $F \subseteq X'_{alg}$ chiamiamo *topologia debole* della famiglia F, indicata con $\sigma(X, F)$, la topologia iniziale SVT di F.

Osservazione 3.9
Con la costruzione precedente abbiamo topologizzato X. La topologia $\sigma(X,F)$ è localmente convessa e ha per prebase di intorni di 0 gli insiemi

$$\{x \in X : |\langle f, x\rangle| < 1\}_{f\in F}.$$

La famiglia di seminorme associata è $\mathcal{P} = \{|f|\}_{f\in F}$.

Lemma 3.10
Siano $f_0, f_1, \ldots, f_n \in X'_{alg}$, allora sono equivalenti:

1. $f_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ *con* $\lambda_i \in \mathbb{K}$.
2. $|f_0| \leq M \max_n\{|f_1|, \ldots, |f_n|\}$.
3. $\ker f_0 \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$.

Proposizione 3.11
Dati X $\mathbb{K}-$spazio vettoriale e $F \subseteq X'_{alg}$ allora

$$[X, \sigma(X,F)]^* = F.$$

Definizione 3.12 - Topologia debole
Se X, τ è SVT si può considerare *la topologia debole* come la topologia debole indotta da $F = (X,\tau)^*$. Chiamiamo $w = \sigma(X, X^*)$, è una topologia di SVTLC meno fine di τ tale che

$$X^*_W = X^*_\tau.$$

Definizione 3.13 - Topologia debole per spazi di Banach
Se X è uno spazio di Banach, la sua topologia debole è $\sigma(X, X^*)$.

Definizione 3.14 - Topologia debole *
La *topologia debole* $\star$ è la topologia su X^* data da $F \subseteq (X^*)'_{alg}$ definita dalle valutazioni

$$F = \{ev_* : X^* \to \mathbb{K}\} \qquad \text{dove} \qquad ev_* f = \langle f, x\rangle.$$

Identificando X con la sua immagine nel biduale, si indica con $\sigma(X^*, X)$.

Osservazione 3.15
Dalla proprietà di transitività delle topologie iniziali si ha che $\sigma(X, X^*)$ coincide con la topologia su X indotta dalla topologia $w^* = \sigma(X^{**}, X^*)$ su X^{**}.

Fatto 3.16
Le topologie $\sigma(X, X^*)$ e $\sigma(X^*, X)$ sono di Hausdorff.

Fatto 3.17
Sia E spazio di Banach e consideriamo un funzionale $\eta \in E^{**}$:

$$\eta \text{ è una valutazione (cioè } \eta \in i_E(E)) \quad \Leftrightarrow \quad \eta \text{ è } w^*\text{-continua.}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ segue direttamente dalla definizione di topologia w^*.
Dimostriamo $\Leftarrow$. Supponiamo che $\eta : E^* \to \mathbb{R}$ sia w^*-continuo. Allora abbiamo che:

$$\left\{ f \in E^* \;\middle|\; |\eta(f)| < 1 \right\} \text{ è un } w^*\text{-aperto}$$

in quanto corrisponde alla preimmagine $\eta^{-1}((-1,1))$. Dato che $0 \in V$, per definizione di aperto deve esistere un intorno di 0 in E^* contenuto in V. Ma una base di intorni di 0 per la topologia w^* è data da

$$\left\{f \in E^* \;\middle|\; |f(x_i)| < 1 \ \forall i = 1, \dots, n\right\} \qquad \text{dove } X_1, \dots, x_n \in E$$

quindi esistono $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che:

$$\left\{f \in E^* \;\middle|\; |f(x_i)| < 1 \ \forall i = 1, \dots, n\right\} \subseteq \left\{f \in E^* \;\middle|\; |\eta(f)| < 1\right\}.$$

Consideriamo allora un qualsiasi funzionale $f \in E^*$. Sia $M > \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i)|$ e definiamo $g = \frac{1}{M} f \in E^*$. Per costruzione:

$$g \in \left\{f \in E^* \;\middle|\; |f(x_i)| < 1 \ \forall i = 1, \dots, n\right\} \subseteq \left\{f \in E^* \;\middle|\; |\eta(f)| < 1\right\}$$

quindi $|\eta(g)| < 1$, da cui $|\eta(f)| < M$. Per arbitrarietà di $M > \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i)|$ segue che:

$$\eta(f) \leq \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i)|.$$

Ma allora, se f si annullava in $x_1, \dots, x_n$, da questa disuguaglianza $\eta(f) = 0$. Si deduce quindi che:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker \mathrm{ev}_{x_i} \subseteq \ker \eta$$

ovvero per il Lemma 3.10 η è combinazione lineare di $\mathrm{ev}_{x_1}, \dots, \mathrm{ev}_{x_n}$. Segue che:

$$\eta = \alpha_1 \mathrm{ev}_{x_1} + \dots + \alpha_n \mathrm{ev}_{x_n} = \mathrm{ev}_{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$$

dove $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Concludiamo così che η è una valutazione. □

3.2 Teorema di Banach-Steinhaus

Ricordiamo il Teorema di Ascoli-Arzelà, nella sua forma tradizionale e in versione Majer.

Teorema 3.18 - Teorema di Ascoli-Arzelà (v. tradizionale)
Sia $\{f_n\}$ una famiglia di funzioni equilimitate ed equicontinue da un compatto in $\mathbb{R}^n$. Allora f_n ha una sottosuccessione che converge uniformemente.

Teorema 3.19 - Teorema di Ascoli-Arzelà (v. Majer)
Siano (X, d) spazio metrico compatto e $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach.
Sia $\Lambda \subseteq \left(C^0(X, E), \|\cdot\|_\infty\right)$. Allora Λ è compatto se e solo se:

1. *Λ è chiuso*
2. *Λ è equicontinuo*
3. *esiste $S \subseteq X$ denso tale che per ogni $x \in S$ l'insieme*

$$\Lambda(x) = \{f(x) \mid f \in \Lambda\} = val(\Lambda \times \{x\})$$

è relativamente compatto[a] *in E.*

[a] Un insieme è relativamente compatto se la sua chiusura è compatta. Se X è spazio metrico completo allora Y relativamente compatto $\Leftrightarrow$ Y totalmente limitato

Questo teorema potrebbe essere usato in combinazione coi seguenti risultati, in particolare con il Teorema 3.24

Teorema 3.20 - Teorema di Baire
Data una famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di aperti densi nello spazio metrico completo* (X,d) *allora* $\cap_{n\geq 0}A_n$ *è denso.*

Definizione 3.21 - I e II categoria
Uno spazio topologico X si dice di *I categoria* se è unione numerabile di chiusi F_n con $\mathring{F}_n = \emptyset$. X spazio topologico di *II categoria* se <u>non</u> è di I categoria.

Definizione 3.22 - Famiglia equicontinua
Diciamo che una famiglia Γ di operatori lineari continui tra due SVT è *equicontinua* se e solo se

$$\forall U \in \mathcal{U}_Y \exists V \in \mathcal{U}_X : \forall T \in \Gamma T(V) \subseteq U.$$

Osservazione 3.23
Se X, Y *sono normati ciò equivale a dire che* Γ *è un insieme limitato in* $L(X,Y)$ *rispetto alla norma degli operatori.*

Teorema 3.24 - Teorema di Banach-Steinhaus
Siano X, Y *SVT, sia* $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ *che sia puntualmente limitata su un insieme* $S \subseteq X$ *di seconda categoria cioè:*

$$\forall s \in S \text{ l'insieme } \{T_s : T \in \Gamma\} = \Gamma(s) \text{ è limitato in } Y.$$

Allora Γ *è equicontinua.*

3.3 Teorema di Goldstine

Definizione 3.25 - Polare e Prepolare
Sia X uno SVT ed $A \subseteq X$. Definiamo il *polare* di A come:

$$A^\circ := \big\{x^* \in X^* \;\big|\; |\langle x^*, x\rangle| \leq 1 \; \forall x \in A\big\} = \bigcap_{x\in A}\{x\}^\circ.$$

Dato $B \subseteq X^*$, il *prepolare* di B sarà:

$$B_\circ := \big\{x \in X \;\big|\; |\langle x^*, x\rangle| \leq 1 \; \forall x^* \in B\big\}.$$

Osservazione 3.26 - Proprietà di Polare e Prepolare
Valgono le seguenti proprietà:

- *l'insieme* A° *sarà per definizione bilanciato, convesso e* w^**-chiuso.*
- *dato* A *sottospazio vettoriale di* X *e* B *sottospazio vettoriale di* X^* *segue che:*

$$A^\circ = A^\perp \qquad e \qquad B_\circ = B_\perp.$$

- *sia* $(X, \|\cdot\|)$ *spazio normato con l'inclusione* $i_X : X \to X^{**}$*. Si dimostra che:*

$$A^\circ = (i_X A)_\circ \qquad e \qquad B_\circ = i_X^{-1}(B^\circ) = B^\circ \cap X \tag{3.1}$$

applicando direttamente le definizioni, sapendo che:

$$\langle x^*, x\rangle_{X^*\times X} = \langle i_X(x), x^*\rangle_{X^{**}\times X^*}.$$

- *per definizione di norma duale, segue anche che:*

$$\overline{B}_{X^*} = (\overline{B}_X)^\circ. \tag{3.2}$$

D'ora in poi, assumiamo $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato.

Fatto 3.27
Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq X^*$. Allora:

$$(A^\circ)_\circ = \overline{\mathrm{assconv}(A)} \qquad e \qquad (B_\circ)^\circ = \overline{\mathrm{assconv}(B)}^{w^*}$$

dove usiamo la notazione:

- $\mathrm{conv}(A)$ *per indicare l'inviluppo convesso di A.*
- $\mathrm{bil}(A) = \overline{B_{\mathbb{K}}(0,1)} \cdot A$ *ovvero il bilanciato di A.*
- $\mathrm{assconv}(A) := \mathrm{conv}(\mathrm{bil}(A))$ *per indicare l'inviluppo assolutamente convesso di A.*

Corollario 3.28
Sia A sottospazio vettoriale di X e B sottospazio vettoriale di X^*. Allora:

$$(A^\perp)_\perp = \overline{A} \qquad e \qquad (B_\perp)^\perp = \overline{B}^{w^*}.$$

Proposizione 3.29 - Criteri per la densità
Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq X^*$ sottospazi vettoriali. Allora:

- *A è w-denso se e solo se $A^\perp = (0)$.*
- *B è w^*-denso se e solo se $B_\perp = (0)$.*

Proposizione 3.30
Sia $T \in L(X, Y)$. Allora:

$$\ker T = (\mathrm{ran}\, T^*)_\perp \qquad e \qquad \ker T^* = (\mathrm{ran}\, T)^\perp.$$

Teorema 3.31 - Teorema di Goldstine
Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato. La palla B_X è densa in $B_{X^{**}}$ nella topologia w^* del biduale X^{**} (cioè $\sigma(X^{**}, X^*)$).

Corollario 3.32
Sia X spazio normato. Allora X è $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso in X^{**} tramite l'inclusione $i_X : X \to X^{**}$.

Osservazione 3.33
Se X non è riflessivo, la sequenza di biduali è strettamente crescente, ovvero:

$$X \subsetneq X^{**} \subsetneq X^{****} \subsetneq \dots$$

3.4 Teorema dell'immagine chiusa

Teorema 3.34 - Teorema dell'Immagine Chiusa
Siano X,Y Banach e $T \in L(X, Y)$ lineare continuo. Sono equivalenti:

1. $\mathrm{ran}\, T$ *è $\|\cdot\|$-chiuso.*
2. $\mathrm{ran}\, T$ *è w-chiuso.*

3. $\operatorname{ran} T = (\ker T^*)_\perp$.
4. $\operatorname{ran} T^*$ *è* $\|\cdot\|$*-chiuso.*
5. $\operatorname{ran} T^*$ *è* w*-chiuso.*
6. $\operatorname{ran} T^* = (\ker T)^\perp$.

Corollario 3.35
Siano X,Y *Banach e* $T \in L(X, Y)$*. Allora:*

$$T \text{ è surgettivo se e solo se } T^* \text{ è fortemente iniettivo.}$$

Esercizio 3.36
Siano X,Y *Banach. I seguenti sottoinsiemi degli operatori lineari continui:*

$$\mathrm{surgL}(X, Y) \qquad InvsxL(X, Y) \qquad InvdxL(X, Y) \qquad FortInL(X, Y)$$

sono aperti di $L(X, Y)$*.*

Teorema 3.37 - Criteri di Separabilità
Sia X *spazio di Banach. Valgono le seguenti implicazioni:*

1. X^* *è* $\|\cdot\|$*-separabile* $\Longrightarrow$ X *è* $\|\cdot\|$*-separabile.*
2. X *è* $\|\cdot\|$*-separabile* $\Longleftrightarrow$ $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ *è metrizzabile.*
3. X^* *è* $\|\cdot\|$*-separabile* $\Longleftrightarrow$ $(B_X, \sigma(X, X^*))$ *è metrizzabile.*

Dimostrazione. Si dimostrano le 5 implicazioni separatamente.

1) Sia X^* separabile. Allora esiste una famiglia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ densa. Per definizione di norma operatoriale $\|\cdot\|$ di X^* segue che:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} \|x_k\| = 1 \\ |\langle f_k, x_k\rangle| \geq \frac{1}{2}\|f_k\| \end{cases}.$$

Il nostro claim è che l'insieme $Y := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{x_k\}$ è denso in X: Y sarà così l'insieme separante. Usando il criterio di separabilità (REF?), ricordiamo che:

$$\overline{Y} = X \quad \Longleftrightarrow \quad \{e_k\}^\perp_{k\in\mathbb{N}} = Y^\perp = \{0\}$$

quindi basta verificare che $\forall f \in X^*$ vale:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \langle f, x_k\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Fissato tale $f \in X^*$ che si annulla su $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, per densità di Y esiste una successione $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $f_{k_j} \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ per $j \to \infty$. Allora si può stimare per $j \to \infty$:

$$\frac{1}{2}\|f_{k_j}\| \leq |\langle f_{k_j}, x_{k_j}\rangle| \leq \left|\langle f_{k_j} - f, x_{k_j}\rangle\right| + \left|\langle f, x_{k_j}\rangle\right| \leq \left|\langle f_{k_j} - f, x_{k_j}\rangle\right| \leq \left\|f_{k_j} - f\right\| = o(1)$$

che per continuità della norma $\|\cdot\|$ implica:

$$\left\|f_{k_j}\right\| \to \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|f\| = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

ovvero la tesi.

2 $\Rightarrow$) Costruiamo una norma $|||\cdot|||$ su X^*. Per ipotesi supponiamo che $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq B_X$ sia un insieme separante per B_X (esiste perché X separabile). Allora definiamo $|||\cdot|||$ ponendo per $f \in X^*$:

$$|||f||| := \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \left|\langle f, x_n\rangle\right|.$$

Si verifica che questa sia una norma. Inoltre, si può stimare che:

$$|||f||| = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \|f\| \cdot \|x_n\| \leq \|f\| \tag{3.3}$$

da cui segue che la topologia indotta da $|||\cdot|||$ su X^* è meno fine della topologia $\sigma(X^*, X)$.
Il claim che si vuole dimostrare è che la mappa

$$\mathrm{id}_{B_{X^*}} : (B_{X^*}, |||\cdot|||) \longrightarrow (B_{X^*}, \sigma(X^*, X)) \tag{3.4}$$

è un omeomorfismo (notare che su X^* potrebbe non esserlo, in dimensione ∞). Questo basta, in quanto $(B_{X^*}, |||\cdot|||)$ è metrico (sottospazio di un normato).
Dato che $(B_{X^*}, |||\cdot|||)$ è metrico, la continuità si può verificare per successioni. Consideriamo $\{f_k\} \subseteq B_{X^*}$ tale che $f_k \overset{|||\cdot|||}{\longrightarrow} f \in B_{X^*}$.
A meno di usare $\left\{\frac{1}{2}(f_k - f)\right\}$, si può supporre senza perdere generalità che $f = 0$. La continuità di (3.4) si dimostra se $f_k \overset{w^*}{\longrightarrow} 0$ in B_{X^*}.
Ma per convergenza in $|||\cdot|||$, segue che $\{f_k\}$ convergono puntualmente a 0 sull'insieme $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ separante. Infatti:

$$|||f_k||| \geq |\langle f_k, x_n\rangle| \quad \Longrightarrow \quad |\langle f_k, x_n\rangle| \leq 2^n |||f_k||| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Al contempo, la famiglia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è equilipschitziana di costante 1 dato che è contenuta nella palla B_{X^*} secondo la norma operatoriale. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà segue che l'insieme di convergenza di una successioni di funzioni equicontinue è un chiuso. Dato che convergeva per $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso, questo significa che $\{f_k\}$ converge puntualmente alla mappa nulla su tutto B_{X^*}. Questo basta a dimostrare la convergenza debole, che va verificata soltanto sulle valutazioni ev_x per $x \in B_{X^*}$ per definizione.
La mappa (3.4) ha anche inversa continua $\mathrm{id}_{B_{X^*}}$, per finezza delle due topologie considerate (seguiva dalla stima (3.3)).

2 $\Leftarrow$) Questa implicazione si dimostra partendo dalla seguente osservazione.

> **Osservazione 3.38**
> *I polari di insiemi finiti in X sono intorni di 0 in $(X^*, \sigma(X^*, X))$. In altre parole, se $F \in \mathcal{F}(X^*)$ allora $F^\circ := \bigcap_{x\in F}\{x\}^\circ$ è un intorno di 0.*
> *L'insieme di questi polari forma una base di intorni per 0 in $(X^*, \sigma(X^*, X))$.*

Dato che B_{X^*} è metrizzabile con la topologia data da $\sigma(X^*, X)|_{B_{X^*}}$, esiste una successione di insiemi finiti $\{F_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{F}(X)$ tale che:

$$\{F^\circ \cap B_{X^*}\}_{n\geq 0} \quad \text{è una base di intorni di } 0.$$

Senza perdere generalità, si può considerare una famiglia tale che $F_{n+1} \supseteq 2F_n$. Così facendo, passando ai polari le inclusioni si invertono e si ottiene:

$$F_{n+1}^\circ \subseteq (2F_n)^\circ = \frac{1}{2}F_n^\circ. \tag{3.5}$$

Così facendo, l'intersezione dei polari si annulla (ad ogni passo il diametro dimezza) e si trova la seguente serie di uguaglianze insiemistiche:

$$
\begin{aligned}
(0) &= \bigcap_{n\geq 0} (F_n^\circ \cap B_{X^*}) = \left(\bigcap_{n\geq 0} F_n^\circ \right) \cap B_{X^*} \overset{(a)}{=} \left(\bigcup_{n\geq 0} F_n \right)^\circ \cap B_{X^*} \\
&= \left[\operatorname{assconv} \left(\bigcup_{n\geq 0} F_n \right) \right]^\circ \cap B_{X^*} \overset{(b)}{=} \left[\operatorname{span} \left(\bigcup_{n\geq 0} F_n \right) \right]^\circ \cap B_{X^*} \\
&= \left[\operatorname{span} \left(\bigcup_{n\geq 0} F_n \right) \right]^\perp \cap B_{X^*}
\end{aligned}
$$

dove rispettivamente:

(a) è l'inversione delle inclusioni passando al polare.

(b) segue dalla proprietà (3.5), che vale anche passando agli assolutamente convessi.

Ma abbiamo che $\left[\operatorname{span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right]^\perp$ è un sottospazio, interseca la palla unitaria nel solo $\{0\}$, allora $\left[\operatorname{span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right]^\perp = (0)$.
Da questo segue (REFS?) che $\operatorname{span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ è un sottospazio denso (sia $\|\cdot\|$ che w^*). Ma allora $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ è l'insieme separante per X.

3 $\Rightarrow$) Sia X^* separabile. Per il Punto (2) già dimostrato segue che la palla $B_{X^{**}}$ è metrizzabile con la topologia indotta da $\sigma(X^{**}, X^*)$

3 $\Leftarrow$) Sia B_X metrizzabile con la topologia $\sigma(X, X^*)|_{B_X}$. L'idea di dimostrazione è analoga al caso (2 $\Leftarrow$), in quanto vale la seguente osservazione.

> **Osservazione 3.39**
> *Il prepolare di $F \in \mathcal{F}(X^*)$ è un intorno di 0 in $(X, \sigma(X, X^*))$.*
> *Ricordiamo che (identificando X con $i_X(X) \subseteq X^{**}$) si può scrivere*
>
> $$F_\circ = F^\circ \cap X.$$
>
> *L'insieme di questi prepolari forma, in particolare, una base di intorni.*

Analogamente al precedente caso, B_X metrizzabile implica che esiste una famiglia $\{F_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{F}(X^*)$ tale che ai prepolari $\{F_n^\circ \cap B_X = F_n^\circ \cap X = F_n^\circ\}_{n\geq 0}$ si trova una base numerabile di intorni di 0.
Come prima, assumiamo anche che $F_{n+1} \supseteq 2F_n$. Allora:

$$
(0) = \bigcap_{n\geq 0} F_n^\circ \cap B_X = \left[\bigcup_{n\geq 0} F_n \right]^\circ \cap B_X = \left[\operatorname{span} \bigcup_{n\geq 0} F_n \right]^\perp \cap B_X = \left[\operatorname{span} \bigcup_{n\geq 0} F_n \right]_\perp \cap B_X
$$

dove, quando sensato, usiamo l'identificazione di B_X con l'immagine nel biduale.
Segue che, come per il punto (2), vale $\left[\operatorname{span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right]_\perp = (0)$. Questo implica che il sottospazio vettoriale $\operatorname{span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ di X^* è w^*-denso. Questa volta, l'argomento non conclude subito, perché sottospazi vettoriali w^*-densi non sono necessariamente $\|\cdot\|$-densi.
Poniamo $Z := \overline{\operatorname{span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)}^{\|\cdot\|}$ e proviamo che $Z = X^*$ con un argomento per assurdo.
Consideriamo $g \in X^* \setminus Z$ e senza perdere generalità, sia $d(g, Z) = 1$, ovvero la distanza di g dal sottospazio Z sia unitaria.

Notiamo che l'insieme $\{x \in B_X \mid \langle g, x\rangle < \frac{1}{2}\}$ è un intorno aperto di 0 in $(B_X, \sigma(X, X^*)|_{B_X})$, quindi contiene uno degli aperti di base $F_m^\circ \cap B_X$ per qualche $m \in \mathbb{N}$. Fissato tale indice m, definiamo l'insieme:

$$A = \left\{ \eta \in X^{**} \;\middle|\; \langle \eta, g\rangle > \frac{1}{2} \;\wedge\; |\langle \eta, f\rangle| < 1 \;\forall f \in F_m \right\}$$

che per definizione è un aperto di $\sigma(X^{**}, X^*)$ (le condizioni richieste sono aperte).
Vediamo che $A \neq \varnothing$. Applicando il Fatto 3.40 allo spazio X^*, con sottospazio Z: esiste un funzionale $\varphi \in X^{**}$ tale che:

$$\|\varphi\| = 1 \qquad \langle \varphi, g\rangle = d(g, Z) = 1 \qquad \ker \varphi \supseteq Z.$$

Segue che $\varphi \in A$, quindi $A \neq \varnothing$.
Per il Teorema di Goldstine, la palla B_X è densa in $B_{X^{**}}$, quindi $A \cap B_X \neq \varnothing$ dato che A aperto non vuoto.
Dunque esiste $\tilde{x} \in B_X \subseteq X$ tale che $\mathrm{ev}_{\tilde{x}} \in A$. Cioè:

$$\langle g, \tilde{x}\rangle > \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad |\langle f, \tilde{x}\rangle| < 1 \;\forall f \in F_m.$$

In particolare la seconda condizione equivale a dire che $\tilde{x} \in F_m^\perp \cap B_X = \left\{x \in B_X \mid \langle g, x\rangle < \frac{1}{2}\right\}$. Assurdo, perché la valutazione di g in $\tilde{x}$ non può essere contemporaneamente di norma $> \frac{1}{2}$ e $< \frac{1}{2}$.
Segue che tale $g \in X^* \setminus Z$ non esiste, quindi $Z = X^*$. Allora $\mathrm{span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ è $\|\cdot\|$-denso in X^* e $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ è l'insieme separante per X^* cercato.

□

Fatto 3.40
Sia Z un sottospazio chiuso di Y Banach e $g \in Y$. Allora esiste $\varphi \in Y^*$ tale che:

- $\|\varphi\| = 1$.
- $\langle \varphi, g\rangle = d(g, Z)$.
- $\ker \varphi \supseteq Z$.

Dimostrazione. Data la proiezione $\pi : Y \to {}^{Y}\!/_{Z}$, applichiamo Hahn-Banach alla mappa $\pi g \in {}^{Y}\!/_{Z}$: esiste $\tilde{\varphi} \in \left({}^{Y}\!/_{Z}\right)^*$ tale che:

$$\|\tilde{\varphi}\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \langle \tilde{\varphi}, \pi g\rangle = \|\pi g\|.$$

Definiamo allora $\varphi := \tilde{\varphi} \circ \pi = \pi^* \tilde{\varphi}$ ed osserviamo:

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in B_Y} \langle \varphi, x\rangle = \sup_{x \in B_Y} \langle \tilde{\varphi} \circ \pi, x\rangle = \sup_{x \in B_Y} \langle \tilde{\varphi}, \pi x\rangle = \sup_{\xi \in \pi B_Y = B_{Y/Z}} \langle \tilde{\varphi}, \xi\rangle = \|\tilde{\varphi}\| = 1.$$

Per costruzione $\ker \varphi \supseteq Z$ ed infine:

$$\langle \varphi, g\rangle = \langle \tilde{\varphi}, \pi g\rangle = \|\pi g\| = d(g, Z).$$

Questo conclude la dimostrazione del fatto, abbiamo trovato il funzionale richiesto. □

Esercizio 3.41
Uno spazio X di Banach è riflessivo separabile se e solo se X^* lo è.

Dimostrazione. Lasciato come esercizio per davvero! □

3.5 Spazi Riflessivi

3.5.1 Addendi diretti

Visto che l'oggetto principale del corso sono spazi vettoriali e/o spazi normati è possibile studiare alcune loro proprietà *algebriche*. La decomposizione in *addendi diretti* avrà un ruolo molto importante per lo sviluppo della teoria.

Definizione 3.42 - Addendo Diretto Algebrico
Sia X spazio vettoriale. Un sottospazio A si dice *addendo diretto (algebrico)* se esiste B sottospazio di X tale che:

$$X = A \oplus B$$

dove $\oplus$ è la somma diretta tra spazi vettoriali.

Definizione 3.43 - Addendo Diretto Topologico
Sia X un SVT. Allora A si dice *addendo diretto topologico* se è un addendo diretto, ovvero $X = A \oplus B$ e la mappa:

$$X \xrightarrow{\text{id}} A \oplus B$$

è omeomorfismo tra spazi topologici.

Definizione 3.44 - Proiettore
Se $X = A \oplus B$ chiamiamo *proiettore* una mappa P tale che $P \circ P = P$. Avremo

$$P_A : X \to A \qquad \text{e} \qquad P_B : X \to B.$$

Fatto 3.45
Se scrivo $X = A \oplus B$ allora

$$A \simeq {}^{X}\!/_{B} \text{ e } B \simeq {}^{X}\!/_{A}$$

Osservazione 3.46
Actung: se scriviamo $X = A \oplus B = A' \oplus B'$ NON è detto che ci sia un isomorfismo tra A/B e A'/B' rispettivamente o tra A/B e B'/A'. Quindi se sappiamo qualcosa sulla dimensione/codimensione di A, non possiamo dire NULLA a priori su quelle di A'/B'. Inoltre, se $A \simeq A'$ NON è detto che $B \simeq B'$! Esempio ℓ^1 con successioni nulle su prima componente e shift.

Fatto 3.47
Se X è SVT T_2 allora un sottospazio chiuso di dimensione finita è addendo diretto.

3.5.2 Proprietà Categoriali

Definizione 3.48 - Successioni esatte e funtori esatti
Consideriamo un funtore tra spazi di Banach $F : \text{Ban} \longrightarrow \text{Ban}$ ed una successione di mappe:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$$

dove $X, Y, Z \in \text{Ban}$ e le mappe α, β sono lineari continue. La successione si dice *esatta corta* quando:

- $\ker(\alpha) = (0)$ ovvero α è iniettiva.
- $\text{ran}(\beta) = Z$ ovvero β è surgettiva.
- $\ker(\beta) = \text{ran}(\alpha)$.

Il funtore F si dice *esatto* se manda successioni esatte corte in esatte corte, ovvero se data una successione come sopra anche:

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(\beta)} F(Z) \longrightarrow 0$$

è esatta (l'analogo vale per funtori controvarianti).

Fatto 3.49 - Duale come Funtore
Consideriamo la categoria Ban *degli spazi di Banach. La corrispondenza creata dal passaggio al duale:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ban} & \longrightarrow & \text{Ban} \\ X & \longmapsto & X^* \end{array}$$

che induce un'associazione ai morfismi:

$$T : X \to Y \qquad \longmapsto \qquad T^* : Y^* \to X^*$$

è un funtore controvariante esatto Ban $\to$ Ban.

Fatto 3.50 - Biduale come funtore
Il funtore "biduale" che consiste nella composizione del funtore duale con sè stesso è un funtore esatto covariante.
In partiolare, la famiglia $\{i_X : X \to X^{**}\}_{X \in \text{Ban}}$ *costituisce un insieme di* trasformazioni naturali *tra i funtori identità e biduale, cioè il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \end{tikzcd} .$$

Esercizio 3.51
Sia $Y \subseteq X$ *sottospazio chiuso (equivalentemente* $j : Y \hookrightarrow X$ *fortemente iniettiva). Allora* $j^{**} : Y^{**} \to X^{**}$ *è fortemente iniettiva e segue che:*

$$\text{ran}(j^{**}) = (\ker j^*)^\perp = (Y^\perp)^\perp = ((i_X Y)_\perp)^\perp = \overline{i_X Y}^{w^*}.$$

Fatto 3.52
Sia Y *sottospazio chiuso di* X*. Se* X *è riflessivo, anche* Y *è riflessivo.*
Equivalentemente, se i_X *è surgettiva allora* i_Y *è surgettiva.*

Fatto 3.53
Per Y *sottospazio chiuso di* X *vale che:*

$$X \text{ è riflessivo se e solo se } Y \text{ e } {}^{X}\!/_{Y} \text{ sono riflessivi.}$$

Fatto 3.54
Se X *riflessivo allora è localmente sequenzialmente debolmente compatto, ossia ogni successione limitata in* X *ha sottosuccessioni debolemnte convergenti.*

3.5.3 Spazi uniformemente convessi

Definizione 3.55 - Norma uniformemente convessa
Una norma $\|\cdot\|$ su X spazio vettoriale è *uniformemente convessa* se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che

$\forall x, y \in B_X$:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

Esempio 3.4 - Spazi di Hilbert
Sia H uno spazio di Hilbert. Esso è uniformemente convesso per l'identità del parallelogramma. Ricordiamo infatti che per $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$ vale l'identità:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

dalla quale segue la disuguaglianza:

$$\|x - y\|^2 \leq 4\left(1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2\right)$$

che fissato ogni $\varepsilon > 0$ dà un valido $\delta > 0$.

Osservazione 3.56
Notare che la proprietà riportata nella definizione si verifica sempre restringendosi a sottospazi 2-dimensionali, ovvero restringendosi a $\operatorname{span}\{x, y\}$.

Ha quindi senso fare un secondo esempio, il piano reale.

Esempio 3.5 - Piano $\mathbb{R}^2$
Si verifica che le norme $\|\cdot\|_p$ su $\mathbb{R}^2$ sono uniformemente convesse quando $1 < p < \infty$.
Nei casi $p = 1, \infty$ invece, la norma non è uniformemente convessa.

Teorema 3.57 - Teorema di Milman-Pettis
Ogni spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo.

Dimostrazione alternativa di Milman-Pettis

Per spazi topologici primo numerabili si è visto che sono molto comode le caratterizzazioni delle proprietà topologiche tramite successioni. Dalla teoria è emersa l'utilità delle topologie deboli, ma si è visto che in generale queste non sono $A1$. Cerchiamo ora quindi di generalizzare l'idea di successione per poter estendere alcune caraterizzazioni di proprietà topologiche e vediamo come dare una dimostrazione alternativa del teorema di Milman-Pettis tramite nets.

Definizione 3.58 - Insieme diretto e pre-ordine
Diciamo che una relazione è un *pre-ordine* se è una relazione transitiva e riflessiva.
Diciamo che un insieme D è *diretto* se $\forall i, j \in D$ esiste $k \in D$ tale che $k \geq i$ e $k \geq j$.

Definizione 3.59 - Successione generalizzata o Net
Una *successione generalizzata* in un insieme X è una funzione $f : D \to X$ dove $(D, \geq)$ è un insieme non-vuoto, pre-ordinato diretto.

Esempio 3.6
La somma di Riemann è formalmente un net.

Esempio 3.7
Le somme finite sono formalizzabili come nets.

Definizione 3.60 - Definitivamente e frequentemente per nets
Se $\{P_\alpha\}_{\alpha \in D}$ sono proprietà indicizzate su D insieme diretto diciamo che

- P_α *vale definitivamente* se e solo se $\exists \alpha \in D$ tale che $\forall \beta \geq \alpha$ vale P_β.
- P_α *vale frequentemente* se e solo se $\forall \alpha \in D \exists \beta \geq \alpha$ tale che P_β vale.

Chiaramente si ha che

$$\neg(P_\alpha \text{ vale definitivamente}) \equiv (\neg P_\alpha \text{ vale frequentemente}).$$

Osservazione 3.61
Per $D = \mathbb{N}$ dire "definitivamente" equivale a dire "a meno di un numero finito di eccezioni" e "frequentemente" a "vale per infiniti indici". Nel caso di D diretto questa cosa non vale.

Definizione 3.62 - Convergenza per nets
Se $f : D \to X$ è un net su X spazio topologico, diciamo che f converge a $x \in X$, scriveremo $\lim_D f = x$ o $f \to x$, se per ogni intorno U di x se $f(i) \in U$ definitivamente.

Definizione 3.63 - Punto aderente
Dato $x \in X$, diremo che è un *punto aderente* a f se $\forall U$ intorno di x si ha $f(i) \in U$ frequentemente.

Esempio 3.8
Dato $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ con X SVT si ha che esiste $l := \sum_{i\in I} x_i$ se e solo se

$$\mathcal{F}(I) \ni \sum_{j\in J} x_j \longrightarrow \ell \text{ nel senso dei nets.}$$

Proposizione 3.64
Dato X spazio topologico e $S \subseteq X$ vale che $x \in \overline{S}$ se e solo se esiste $f : D \to S$ net convergente a x con D diretto.

Esercizio 3.65
Data $f : X \to Y$ con X, Y spazi topologici si ha che f è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni net $\xi : D \to X$ convergente a x_0 si ha $f \circ \xi \to f(x_0)$.

Definizione 3.66 - Net di Cauchy
Sia X SVT allora un net $f : D \to X$ si dice *net di Cauchy* se e solo se $\forall U \in \mathcal{U}_X$ $\exists \alpha \in D$ tale che $\forall p, q \geq \alpha$ vale $f(q) - f(p) \in U$. Equivalentemente, se consideriamo il net g su $D \times D$ come $g(i,j) = f(i) - f(j)$, diremo che f è di Cauchy se e solo se $g \to 0$ dove, date due coppie in $D \times D$, diremo $(i,j) \leq (i',j')$ se e solo se $i \leq i'$ e $j \leq j'$.

Definizione 3.67 - Completezza per Nets
Un SVT X è completo per nets se e solo se ogni net di Cauchy è convergente.

Proposizione 3.68
Dato X SVT primo numerabile abbiamo che è completo per nets se e solo se è completo per successioni.

Osservazione 3.69
È possibile vedere una dimostrazione alternativa tramite l'uso dei nets del teorema di Milman-Pettis.

Esercizio 3.70
Dato $f : D \to X$ net di Cauchy e $x \in X$ punto aderente di f, allora mostrare che f converge a x.

Capitolo 4

Compattezza

4.1 Il Teorema di Tychonov

4.1.1 Filtri su spazi topologici

Definizione 4.1 - Filtro
Diciamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un *filtro di parti* di X se valgono le seguenti proprietà:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$.
- Se $A, B \in \mathcal{F}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B \subset X$ allora $B \in \mathcal{F}$.

Esempio 4.1
I seguenti sono dei filtri:

- $\mathcal{F} = \{$ intorni di $x\}$ con $x \in X$ spazio topologico.
- $\mathcal{F} = \{$ intorni bucati di $x\}$ con $x \in X$ spazio topologico.
- Se S è un insieme infinito allora $\mathcal{F} = \{A : |S \backslash A| < \aleph_0\}$ è un filtro.

Definizione 4.2 - Base di filtro e Filtro generato
Diremo che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base di filtro se:

1. $\forall A \in \mathcal{B}\ A \neq \emptyset$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{B}$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $C \subseteq A \cap B$.

Definiamo $\mathcal{F}$ come il *filtro generato* da $\mathcal{B}$ il seguente insieme:

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathcal{B}, B \subset F\} \text{ è un filtro.}$$

Definizione 4.3 - Pre-base di filtro
Dato $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ diremo che è una *pre-base* del filtro $\mathcal{F}$ se

$$\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r : A_i \in \mathcal{A}, r \in \mathbb{N}\} \text{ è una base del filtro } \mathcal{F}.$$

Equivalentemente se $\mathcal{A}$ ha la proprietà dell'intersezione finita (PIF): per ogni $\{A_i\}_{i=1,\dots,r}$ famiglia finita di elementi di $\mathcal{A}$ si ha $\bigcap_{i=1}^{r} A_i \neq \emptyset$.

Definizione 4.4 - Immagine e Preimmagine di filtro
Dati $f : X \to Y$ funzione fra insiemi, $\mathcal{F}$ filtro su X, $\mathcal{G}$ filtro su Y è definito il *filtro immagine* di $\mathcal{F}$ tramite f come:

$$f(\mathcal{F}) = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \in \mathcal{F}\}.$$

Se f è surgettiva definiamo anche il *filtro preimmagine* di G tramite f come:

$$f^{-1}(\mathcal{G}) := \{F \subset X : \exists G \in \mathcal{G}, f^{-1}(G) \subset F\}$$

di cui $\{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\}$ è una base.

Esercizio 4.5
Mostrare che, data f surgettiva, vale:

$$f(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{G} \iff \mathcal{F} \supseteq f^{-1}(\mathcal{G}).$$

Definizione 4.6 - Finezza di filtro
Dati $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ filtri su X diciamo che $\mathcal{G}$ è *più fine* di $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Osservazione 4.7
Per ogni filtro possiamo trovare un net associato: infatti se $\mathcal{F}$ è un filtro su X possiamo considerare una funziona di scelta $f : \mathcal{F} \to X$ tale che $\forall F \in \mathcal{F}$ si ha $f(F) \in \mathcal{F}$, allora f è un net su $\mathcal{F}$ come insieme diretto ordinato da $\subseteq$.

Definizione 4.8 - Convergenza per filtri
Dato X spazio topologico e $\mathcal{F}$ filtro su X, diciamo che $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$ se e solo se, detto $\mathcal{U}(x)$ il filtro degli intorni di x, si ha $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$,

Definizione 4.9 - Punto aderente
Dato $\mathcal{F}$ filtro su X e $x \in X$ si ha che x è un *punto aderente* di $\mathcal{F}$ se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ e $\forall F \in \mathcal{F}$ si ha $F \cap U \neq \emptyset$.
- $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.
- Esiste un filtro più fine sia di $\mathcal{F}$ che di $\mathcal{U}(x)$. Si considera quindi

$$\{U \cap F : U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}.$$

Definizione 4.10 - Estremo superiore di filtri
Dati due filtri $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ su X esiste un filtro più fine di entrambi se e solo se

$$\forall F \in \mathcal{F}, \forall F' \in \mathcal{F}' \text{ si ha } F \cap F' = \emptyset.$$

In tal caso l'insieme $\{F \cap F' : F \in \mathcal{F}, F' \in \mathcal{F}'\}$ è il minimo filtro più fine di entrambi e si indica $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}'$.
In generale per una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ su X esiste il più fine di tutti se e solo se

$$\forall J \in \mathcal{F}(I), \forall \{F_i \in \mathcal{F}_i\}_{i \in J} \quad \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$$

ossia $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$ ha la PIF. L'estremo superiore sarà

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i = \left\{ \bigcap_{i\in J} F_i : J \in \mathcal{F}(I), F_i \in \mathcal{F}_i \forall i \in J \right\}$$

Definizione 4.11 - Prodotto di filtri
Siano $\{X_i\}_{i\in I}$ insiemi con filtri $\mathcal{F}_i$ su X_i, allora esiste il meno fine filtro $\mathcal{F}$ su $\prod_{i\in I} X_i$ tale che

$$p_i^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F} \iff \mathcal{F}_i \subseteq p_i(\mathcal{F}) \ \forall i \in I.$$

Si ha quindi che

$$\mathcal{F} = \bigvee_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{F}_i).$$

Definizione 4.12 - Ultrafiltro
Un filtro massimale rispetto all'ordinamento si chiama *ultrafiltro*.

Proposizione 4.13
Un filtro $\mathcal{F}$ su X è massimale se e solo se $\forall A \subset X$ si ha che o $A \in \mathcal{F}$ o $A^c \in \mathcal{F}$.

Proposizione 4.14
Se $\mathcal{F}$ è un filtro massimale su X e $f : X \to Y$ allora $f(\mathcal{F})$ è massimale su Y.

Teorema 4.15 - Teorema di Tarski
Ogni filtro $\mathcal{F}$ è contenuto in un ultrafiltro.

Definizione 4.16 - Compattezza per Heine-Borel
Elenchiamo una serie di definizioni per la compattezza secondo Heine-Borel:

1. Ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.
2. Ogni famiglia $\{F_i\}_{i\in I}$ di chiusi con PIF è tale che $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.
3. Per ogni filtro $\mathcal{F}$ su X, $\mathcal{F}$ ha almeno un punto aderente.
4. Per ogni net f su X, f ha almeno un punto aderente.
5. Ogni filtro su X ha un raffinamento convergente.
6. Ogni ultrafiltro è convergente.

Teorema 4.17 - Teorema di Tychonov
Sia I un insieme di indici di cardinalità arbitraria. Allora vale che

$$\prod_{i\in I} X_i \text{ è compatto} \iff X_i \text{ è compatto} \quad \forall i.$$

Osservazione 4.18
Nella dimostrazione del teorema è stato usato due volte l'assioma della scelta. Vediamo che in realtà il teorema di Tychonov implica l'assioma della scelta.

4.2 Compattezza per topologie deboli

Teorema 4.19 - Teorema di Banach - Alaoglu - Bourbaki
Sia X uno SVT e $V \in \mathcal{U}_X$. Allora il polare di V:

$$V^\circ = \left\{ f \in X^* \;\middle|\; |\langle f, x\rangle| \leq 1 \;\forall x \in V \right\}$$

è compatto nella topologia $\sigma(X^*, X)$.

Ci sono diverse conseguenze di questo teorema.

Corollario 4.20 - Caso Banach
Supponiamo X sia Banach e consideriamo $V = B_X$. Allora $V^\circ = B_{X^*}$ è w^*-compatta.

Corollario 4.21 - Caso riflessivo
Sia X riflessivo ed $Y = X^*$. Allora tramite l'inclusione nel biduale i_X si identificano $X = Y^*$. Così facendo, $B_X = B_{Y^*}$ e allora:

$$(X, \sigma(X, X^*)) \simeq (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$$

ed in conclusione B_X è w-compatta.

Si può formulare un risultato più forte perché vale anche il viceversa nel caso di spazi di Banach.

Teorema 4.22 - Kakutani
Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se B_X è w-compatta (nel senso di Heine-Borel).

Corollario 4.23
Ogni spazio di Banach X si immerge isometricamente nello spazio $(C(K), \|\cdot\|_{\infty,K})$ dove K è T_2-compatto.

Corollario 4.24
Sia X riflessivo. Allora ogni suo sottospazio chiuso ed ogni suo quoziente è ancora riflessivo.

Teorema 4.25 - Teorema di Mazur
Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Se $K \subset X$ compatto, allora $\overline{co}(K)$ è compatto.

Teorema 4.26 - Teorema di Diendonnè
Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Se $K \subseteq X$ compatto, allora esiste $\{x_n\} \subseteq X$ con $x_n \longrightarrow 0$ tale che $K \subseteq \overline{co}(\{x_n\})$.

Teorema 4.27 - Teorema di Krein-Šmulian
Sia X spazio di Banach e $C \subseteq X^*$ convesso. Allora si ha che

$$C \text{ è } w^* - \text{chiuso se e solo se } \forall n \geq 0 \text{ è } w^*\text{-chiuso l'insieme } C \cap nB_{X^*}.$$

Idea. Si considera una topologia su X^* dove $F \subset X^*$ è chiuso se e solo se $\forall n \geq 0$ vale che $F \cap nB_{X^*}$ è w^*-chiuso. Questa risulta essere una topologia di SVTLC T_2 che prende il nome di *topologia bw^**, ossia *bounded w^*-topology*. Si proverà che, nonotante questa sia strettamente più forte, si ha che

$$(X^*, \tau_{bw^*})^* = (X^*, \tau_{w^*})^*$$

┘

Osservazione 4.28
Si ricorda che due topologie di SVT che hanno gli stessi funzionali lineari continui, per il teorema di Hahn-Banach, hanno anche gli stessi convessi chiusi.

4.2.1 Limiti induttivi di spazi topologici

Definizione 4.29 - Topologia finale o limite induttivo
Sia $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\geq 0}$ una successione di spazi topologici tali che $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ sia continua per ogni $n \geq 0$. Allora su $X_\infty = \bigcup_{n\geq 0} X_n$ esiste la più fine topologia τ_∞ che rende continue le inclusioni $j_n : X_n \hookrightarrow X_\infty$. Vale che

$$\begin{aligned} A \in \tau_\infty &\iff j_n^{-1}(A) = A \cap X_n \in \tau_n \forall n \\ &\iff A = \bigcup_{n\geq 0} A_n \text{ con } A_n \in \tau_n \forall n \text{ e } A_n \subseteq A_{n+1}. \end{aligned}$$

Osservazione 4.30
Per il limite induttivo fatto su $X_k \hookrightarrow X_{k+1}$, data una qualsiasi sottosuccessione di indici k_j, vale che:

$$\lim_{k\to+\infty} X_k = \lim_{j\to+\infty} X_{k_j}.$$

Proposizione 4.31
Se consideriamo un'altra famiglia di spazi topologici $\{Y_k\}_{k\geq 0}$ tali che $Y_k \hookrightarrow Y_{k+1}$ è continua allora la successione di spazi $\{X_k \times Y_k\}$ ha limite induttivo tale per cui

$$\bigcup_{k\geq 0} X_k \times Y_k = \left(\bigcup_{k\geq 0} X_k\right) \times \left(\bigcup_{k\geq 0} Y_k\right)$$

e

$$(X_\infty \times Y_{\infty,X\times Y}, \tau_\infty) = (X_\infty, \tau_{\infty,X}) \times (Y_\infty, \tau_{\infty,Y})$$

dove $\tau_{\infty,X}$ indica la topologia finale su X.

Proposizione 4.32
Sia Z spazio topologico, allora vale che

$$f : X_\infty \to Z \text{ è continua} \iff f|_{X_n} : X_n \to Z \text{ è continua } \forall n.$$

Con i concetti ora introdotti, possiamo definire con maggiore precisione la topologia bw^*:

Definizione 4.33 - Topologia bw^*
Detta B_{X^*} la palla unitaria di X^* considereremo

$$(X^*, \tau_{bw^*}) = \lim_{n\to+\infty} nB_{X^*}.$$

Vediamo che la topologia bw^* è localmente convessa. Per fare ciò introduciamo le *topologie polari.*

Definizione 4.34 - Topologia polare su X^*
È una topologia localmente convessa associata alla famiglia di seminorme $\{\|\cdot\|_{\infty,A} : A \in \mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A}$ una famiglia di insiemi limitati su X. Senza perdità di generalità possiamo anche assumere che:

1. $\forall A, A' \in \mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{A} : A \cup A' \subset B$.
2. $\forall t > 0$ e $\forall A \in \mathcal{A}$ si ha $tA \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ verifica queste ipotesi, allora una base di intorni convessi di 0 sarà data da $\{A^\circ : A \in \mathcal{A}\}$, notiamo infatti che la palla unitaria chiusa della seminorma $\|\cdot\|_{\infty,A}$ è il polare di A.

Esempio 4.2
Le seguenti sono topologie polari:

- Se consideriamo $\mathcal{A} = \mathcal{F}(X) = \{\text{parti finite di } X\}$, allora $\tau_{\mathcal{F}} = \sigma(X^*, X)$: per $A \in \mathcal{F}(X)$
$$A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{x\}^\circ \text{ con } \{x\}^\circ = \{f \in X^* : |\langle f, x\rangle| \leq 1\}.$$
- Se consideriamo $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X) = \{\text{sottoinsiemi limitati di } X\}$, allora $\tau_{\mathcal{B}(X)} = \tau_{\|\cdot\|}$.
- Se consideriamo $\mathcal{A} = \mathcal{K} = \mathcal{K}(X) = \{\text{compatti di } X\}$, allora possiamo considerare la topologia della convergenza uniforme sui[1] compatti di X, che denoteremo con $\tau_{\mathcal{K}}$. Questa topologia risulterà molto importante per la dimostrazione del teorema di Krein-Šmulian.

Teorema 4.35 - Teorema di Diendonné
Su X^* vale che $\tau_{\mathcal{K}} = \tau_{bw^*}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è stata fatta per un sistema di intorni dell'origine. Visto che se $A \in \tau_{bw^*}$ allora $v + A \in \tau_{bw^*}$, segue l'equivalenza della topologia per ogni intorno. □

Osservazione 4.36
Da questo segue che τ_{bw^*} è localmente convessa e che è SVTLC.

Teorema 4.37 - Teorema di Diendonné
Vale che $(X^*, \tau_{\mathcal{K}})^* = (X^*, \tau_{w^*})^*$.

Corollario 4.38
Da questi due teoremi segue immediatamente il teorema di Krein-Šmulian.

Definizione 4.39 - Insieme numerabilmente compatto ($\boldsymbol{NC}$)
Dato X spazio topologico diciamo che è *numerabilmente compatto* se vale una delle seguenti condizioni:

- Ogni $S \subset X$ con $|S| \geq \aleph_0$ ha punti di ω-accumulazione, ossia $\exists x \in X$ tale che $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ valga $|S \cap U| \geq \aleph_0$.
- Ogni $\{x_k\} \subset X$ ha punti di accumulazione, ossia $\exists x \in X$ tale che $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ si ha $x_n \in U$ frequentemente.
- Ogni famiglia $\{F_n\}_{n\geq 0}$ di chiusi, non vuoti e decrescenti per inclusione è tale che $\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq$.
- Ogni ricoprimento aperto numerabile di X ha sottoricoprimenti finiti.

Definizione 4.40 - Insieme relativamente numerabilmente compatto ($\boldsymbol{RNC}$)
Dato $A \subset X$ con X spazio topologico diremo che A è *relativamente numerabilmente compatto* se vale una delle seguenti condizioni:

- ogni $S \subseteq A$ tale che $|S| \geq \aleph_0$ ha punti di w-accumulazione.
- ogni $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq A$ ha punti di accumulazione in X.

[1]Notiamo che per linearità dei funzionali continui, basta che questa convergenza sia su *un* compatto!

Fatto 4.41
Se $A \subseteq X$ topologico è RNC su X e $f : X \to Y$ continua, allora $f(A)$ è RNC in Y.

Dimostrazione. Sia $\{y_n\} \subset f(A)$, cioè esiste $\{a_n\} \subset A$ tale che $y_n = f(a_n)$. siccome A è RNC esiste $a_\infty \in X$ punto di accumulazione di $\{a_n\}$, vediamo che $f(a_\infty)$ è punto di accumulazione per $\{y_n\}$. Sia U intorno di $f(a_\infty)$ in Y e V intorno di a_∞ tale che $f(V) \subset U$. Allora, siccome $a_n \in V$ frequentemente, anche $y_n = f(a_n) \in f(V) \subset U$ frequentemente. □

Fatto 4.42
Sia $A \subseteq E$ con E spazio di Banach. Se A è w-RNC allora A è $\|\cdot\|$-limitato.

Dimostrazione. Siccome ogni $f : E \to \mathbb{R}$ lineare continua è anche w-lineare e continua allora A e w-limitato e per il teorema di Banach-Steinhaus è $\|\cdot\|$-limitato.

Ricordiamo come sono fatti gli intorni deboli dell'origine: una base è data da

$$\bigcap_{1\leq i\leq n} f_i^{-1}((-1,1)) \quad \text{con } f_i \text{ w-continue}$$

Chiaramente, se chiamiamo $V = \bigcap_{1\leq i\leq n} f_i^{-1}((-1,1))$ vale che $mV = \bigcap_{1\leq i\leq n} f_i^{-1}((-m,m))$ per linearità delle f_i. A meno di traslazione supponiamo che $0 \in A$. Se per assurdo A non fosse w-limitato allora significherebbe che esiste $U \in \mathcal{U}$ che non lo assorbe e, sempre senza perdita di generalità, $0 \in U$. Abbiamo quindi che $U \supseteq V$, ma per il fatto precedente si ha A RNC implica $f(A)$ RNC, ma quindi $f(A)$ compatto in $\mathbb{R}$ e quindi $f(A)$ limitato per ogni $f \in E^*$. Esiste quindi r tale che $f(A) \subseteq [-r, r]$ ma quindi $A \subseteq rV$, assurdo.

□

Definizione 4.43 - Insieme sequenzialmente compatto (*SC*)
Uno spazio X è *sequenzialmente compatto* se ogni $(x_n)_n \subseteq X$ ha sottosuccessione convergente in X.

Definizione 4.44 - Insieme relativamente sequenzialmente compatto (*RSC*)
Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è *relativamente sequenzialmente compatto* se ogni $(a_n)_n \subseteq A$ ha sottosuccessioni convergenti in X.

Teorema 4.45 - Teorema di Eberlein-Šmulian
Sia E spazio di Banach e $A \subseteq E$. Rispetto alla topologia debole $\sigma(E, E^*)$ i seguenti fatti sono equivalenti:

1. *$\overline{A}^w$ è numerabilmente compatto ($\overline{NC}$).*
2. *A è relativamente numerabilmente compatto (RNC).*
3. *$\overline{A}^w$ è sequenzialmente compatto (SC).*
4. *A è relativamente sequenzialmente compatto (RSC).*
5. *$\overline{A}^w$ è compatto ($\overline{C}$).*

Osservazione 4.46
In generale per X spazio topologico e $A \subset X$ valgono solo le implicazioni in nero:

$$
\begin{tikzcd}
\overline{C} \arrow[dr, Rightarrow] & & \overline{SC} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \overline{NC} \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "(2)"] & & RSC \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[ulll, Rightarrow, bend right, "(3)"'] \\
& & RNC \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "(1)"'] &
\end{tikzcd}
$$

La dimostrazione del teorema si riduce quindi a verificare solo le frecce rosse. In generale le proprietà di compattezza non sono stabili per continuità, vediamo una serie di controesempi per $\overline{C} \iff SC$ e per $\overline{NC} \iff RSC$.

Esempio 4.3
X compatto ma non sequenzialmente compatto: $X = 2^{2^\omega}$ dove usiamo la notazione per gli ordinali di von Neumann.

Esempio 4.4
X sequenzialmente compatto, ma non compatto: $X = \omega_1$ con la topologia degli intervalli aperti che ha come base $\{]a, b[: -1 \leq a < b \leq \omega_1\}$.

Esempio 4.5
Esempio di A RSC, ma non NC: sia $X = (\omega + 1) \times (\omega_1 + 1) \setminus \{(\omega, \omega_1)\}$ e $A = (\omega + 1) \times \omega_1$.

Fatto 4.47
Dato $\eta \in \overline{A}^{\sigma(E^{**}, E^*)}$ e $D \subset E^*$ insieme finito o numerabile, allora esiste un punto $z_D \in \overline{A}^w$ tale che

$$\langle f, z_D \rangle = \langle \eta, f \rangle \text{ per ogni } f \in D.$$

Dimostrazione. Visto che $\eta \in \overline{A}^{\sigma(E^{**}, E^*)}$, allora ogni suo $\sigma(E^{**}, E^*)$-intorno incontra A, in particolare lo fanno gli intorni della forma:

$$\{\varphi \in E^{**} : |\langle \varphi, f_i \rangle - \langle \eta, f_i \rangle| < \frac{1}{n} \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Si ha quindi che $\forall n \geq 1$ esiste $a_n \in A$ tale che

$$|\langle f_i, a_n \rangle - \langle \eta, f_i \rangle| < \frac{1}{n} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

□

Dimostrazione. Mostriamo le frecce in rosso come enumerate nel grafico:

1. <u>A RNC $\Rightarrow$ A RSC</u>: Visto che A è w-*RNC* sappiamo che A è $\|\cdot\|$-limitato. Data $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ consideriamo $V = \overline{\text{span}}\{a_n\}$ spazio di Banach separabile. Per il Teorema 3.37 si ha che (B_{V^*}, τ_{w^*}) è metrizzabile e per il teorema di Banach-Alaougulu è compatta. Segue quindi che B_{V^*} è w^*-separabile e quindi, essendo un insieme assorbente, anche V^* lo[2] è. Sia $D \subset V^*$ separante: D è numerabile e denso.

   Possiamo dunque fare un argomento diagonale ed estrarre una sottosuccessione $\{a_{n_k}\} = \{a_k\}$ tale che le valutazioni $\langle f, a_k \rangle$ convergano in $\mathbb{R}$ per ogni $f \in D$. Consideriamo ora $\{a_\infty\} \in E$ punto di accumulazione per $\{a_k\}$. Visto che V è una w-chiuso di E abbiamo che $a_\infty \in V$ e

[2] Se D è l'insieme separante per B_{V^*}, allora $\mathbb{Q}_{\geq 0} D$ è separante per V^*.

che $\forall f \in D$, $\langle f, a_\infty \rangle$ è di accumulazione in $\mathbb{R}$. Visto che $\langle f, a_k \rangle$ convergono e $\langle f, a_\infty \rangle$ è punto di accumulazione per tale successione abbiamo che

$$\langle f, a_k \rangle \longrightarrow \langle f, a_\infty \rangle \text{ per ogni } f \in D.$$

Vediamo che in realtà questo vale per ogni $f \in V^*$: se per assurdo esistesse $g \in V^*$ tale che $\langle g, a_k \rangle \not\longrightarrow \langle g, a_\infty \rangle$, applicando lo stesso argomento diagonale con l'insieme di funzionali $D \cup \{g\}$, otterremmo $\{a_{k_j}\} = \{a_j\}$ sottosuccessione tale che $\langle g, a_j \rangle$ converge. Dato b_∞ punto di accumulazione per $\{a_j\}$, similmente a prima, possiamo dire che:

$$\begin{cases} \langle g, a_j \rangle \longrightarrow \langle g, b_\infty \rangle \\ \langle f, a_j \rangle \longrightarrow \langle f, b_\infty \rangle = \langle f, a_\infty \rangle \end{cases}$$

dove l'uguaglianza segue per unicità del limite in $\mathbb{R}$. Visto che questa vale $\forall f \in D$ separante si ha $a_\infty = b_\infty$, ma allora

$$\langle g, a_j \rangle \longrightarrow \langle g, b_\infty \rangle = \langle g, a_\infty \rangle$$

che contraddice l'ipotesi iniziale.

Abbiamo quindi che $a_k \overset{\sigma(V,V^*)}{\longrightarrow} a_\infty$, ma, per transitività delle topologie iniziali, osserviamo che $\sigma(V, V^*) \equiv \sigma(E, E^*)|_V$ e dunque $a_k \overset{\sigma(E,E^*)|_V}{\longrightarrow} a_\infty$. Abbiamo trovato la sottosuccessione convergente in E.

2. $\underline{\overline{A}^w NC \Rightarrow \overline{A}^w SC}$: per $A \subseteq X$ spazio topologico con A chiuso vale che $RSC \iff SC$. Per il punto precedente sappiamo che $\overline{A}^w$ $RNC \Rightarrow \overline{A}^w$ RSC e quindi abbiamo la tesi.

3. $\underline{A\ RSC \Rightarrow \overline{A}^w C}$:

   Idea. Per trovare la compattezza di un sottospazio, grazie al teorema di Banach-Alaogulu, vogliamo lavorare nel duale *"più vicino"* a E, che è E^{**}. ⌟

   Una volta mostrato che $\overline{A}^{\sigma(E^{**},E^*)} \subseteq E^{**}$ è in realtà un sottoinsieme di E e quindi

   $$\overline{A}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{A}^{\sigma(E^{**},E^*)} \cap E = \overline{A}^{\sigma(E^{**},E^*)}.$$

   Da questo la tesi segue visto che $\overline{A}^{\sigma(E^{**},E^*)}$ è $\sigma(E^{**}, E^*)$ chiuso e limitato e dunque compatto per il teorema di Banach-Alaogulu, infatti è un sottospazio chiuso di un'opportuna palla che è compatta per il teorema di Banach-Alaogulu.

   Vediamo l'inclusione: vogliamo mostrare che, data $\eta \in \overline{A}^{\sigma(E^{**},E^*)}$, allora η è $\sigma(E^*, E)$-continua il che è equivalente a mostrare che $\ker \eta \subset E^*$ è $\sigma(E^*, E)$-chiuso. Per il teorema di Krein-Šmulian possiamo limitarci a dimostrare che

   $$\ker \eta \cap rB_{E^*} = r\,(\ker \eta \cap B_{E^*}) \text{ è } \sigma(E^{**}, E^*)\text{-chiuso } \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

□

Capitolo 5

Teoria Spettrale

5.1 Operatori Compatti su Banach

Definizione 5.1 - Operatore compatto
Dati due spazi di Banach X, Y, una mappa $T : X \to Y$ si dice *compatta* se

1. è continua.
2. per ogni $S \subseteq X$ limitato si ha che $T(S) \subseteq Y$ è relativamente compatto rispetto a $\|\cdot\|_Y$.

Osservazione 5.2
Nel caso di T lineare la prima condizione è chiaramente implicata dalla seconda che basta richiedere per B_X. Useremo la notazione $L_C(X, Y)$ per indicare l'insieme delle mappe lineari compatte.

Osservazione 5.3
Nessun operatore compatto è invertibile se siamo su spazi di dimensione infinita, infatti ricordiamo che la palla non è compatta in dimensione infinita.

Osservazione 5.4
Definizioni equivalenti:

- *Se $T \in L(X, Y)$ allora T è compatto se $\forall \{x_n\} \subseteq X$ limitata $\{Tx_n\}$ è compatta.*
- *Se X è riflessivo allora T è compatto se e solo se $\forall \{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \rightharpoonup 0$ allora $\|Tx_n\| \to 0$.*

Fatto 5.5
Se X è riflessivo, allora è localmente sequenzialmente debolmente compatto, cioè ogni successione limitata in X ha sottosuccessioni debolmente convergenti.

Osservazione 5.6
Nel caso in cui sia X che Y sono riflessivi allora diremo che $T : X \to Y$ è compatto se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tali che $\begin{cases} x_n \rightharpoonup 0 \\ y_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \end{cases}$ si ha che

$$\langle y_n^*, Tx_n \rangle \longrightarrow 0.$$

Osservazione 5.7
Se $\mathcal{H}$ è Hilbert ricordiamo che

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \iff \begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\| \longrightarrow \|x\| \end{cases} .$$

Fatto 5.8
*Se $T \in L(X)$ **non** è compatto vi è $Y \subset X$ sottospazio chiuso di dimensione infinita tale che $T|_Y : Y \xrightarrow{\sim} T(Y)$ è invertibile e $T(Y)$ è chiuso.*

Esercizio 5.9
Nel caso di $X = \ell^1$ mostrare che

$$x_n \rightharpoonup x \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x.$$

Proposizione 5.10
L'insieme $L_C(X,Y)$ ha le seguenti proprietà:

- *$L_C(X,Y)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $L(X,Y)$.*
- *Per ogni X,Y,Z Banach, se $T \in L(X,Y)$ e $S \in L(S,Y)$ allora $ST \in L_C(X,Y)$ purchè almeno uno tra T,S sia compatto.*
- *Se $X = Y = Z$ allora $L_C(X,X) = L_C(X)$ è un ideale bilatero chiuso dell'algebra $L(X)$.*

Definizione 5.11 - Operatore di rango finito
Un operatore $T \in L(X,Y)$ si dice di rango finito se $\dim(\operatorname{ran} T) < +\infty$. Si indicano con $L_f(X,Y)$.

Osservazione 5.12
Osserviamo che tutti e soli i $T \in L_f(X,Y)$ sono quelli della forma

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle a_k, x \rangle y_i$$

con $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in X^*$ e $y_i \in Y$ per ogni $1 \le i \le n$.

Fatto 5.13
Se $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert vale che $L_C(\mathcal{H}) = \overline{L_f(\mathcal{H})}$.

Esercizio 5.14
Se $\mathcal{H}$ è di Hilbert mostrare che

1. *$L_C(\mathcal{H})$ è il più piccolo ideale bilatero chiuso non banale di $L(\mathcal{H})$.*
2. *Se $\mathcal{H}$ è separabile, allora $L_C(\mathcal{H})$ è l'unico ideale chiuso non banale.*

Proposizione 5.15 - Teorema di Schauder
Per X,Y spazi di Banach e $T \in L(X,Y)$ si ha che

$$T \text{ compatto} \iff T^* \text{ compatto.}$$

Si passa ora alla teoria spettrale per operatori compatti.

Proposizione 5.16
Sia X Banach e $T \in L_C(X)$. Valgono i seguenti fatti:

1. $\ker(I-T)$ *è un sottospazio chiuso, finito dimensionale e T-invariante.*
2. *Per ogni $n \geq 1$ si ha che $K_n := \ker(I-T)^n$ è una successione di sottospazi chiusi, finito dimensionale, T-invariante, crescente per inclusione e stazionaria.*
3. $\operatorname{ran}(I-T)$ *è un sottospazio chiuso, di codimensione finita e T-invariante.*
4. *Per ogni $n \geq 1$ si ha che $I_n := \operatorname{ran}(I-T)^n$ è una successione di sottospazi chiusi, di codimensione finita, T-invarianti, decrescenti per inclusione e stazionaria.*
5. *si ha che*
$$I - T \text{ iniettivo} \iff I - T \text{ surgettivo} \iff I - T \text{ invertibile}$$
6. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$*
$$\dim(\ker(I-T)^n) = \operatorname{codim}(\operatorname{ran}(I-T)^n) = \dim(\ker(I-T^*)^n) = \operatorname{codim}(\operatorname{ran}(I-T^*)^n).$$

Osservazione 5.17
Abbiamo quindi che, se $T \in L_C(X)$, allora $I - T$ è un operatore di Fredholm.

Corollario 5.18
Se esiste n_0 tale che $K_{n_0} = K_n$ e $R_{n_0} = R_n$ per ogni $n \geq n_0$, allora $X = K_{n_0} \oplus R_{n_0}$ è una decomposizione T-invariante.

Definizione 5.19 - Spettro di un operatore
Dato X spazio di Banach complesso, definiamo lo *spettro* di un operatore $T \in L(X)$ come
$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin GL(X)\}.$$

Osservazione 5.20
Vale che $\sigma(T)$ è sempre non vuoto ed è anche un compatto di $\mathbb{C}$. Vedremo che si potrà definire un raggio spettrale ρ e che si avrà $\rho \leq \|T\|$. Nel caso di T autoaggiunto con X spazio di Hilbert varrà $\rho = \|T\|$.

Definizione 5.21 - Autovalore di un operatore
Dato X un $\mathbb{C}$-spazio di Banach definiamo l'*insieme di autovalori* di un operatore $T \in L(X)$ come
$$\sigma_{AV}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ non è iniettivo}\}.$$

Definizione 5.22
Dato $T \in L_C(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiamo:

- *Molteplicità geometrica*: $m_g(\lambda) := \dim(\ker(\lambda - T))$
- *Molteplicità algebrica*: $m_a(\lambda) := \max_{n\geq 0}(\dim(\ker(\lambda-T)^n)$. Chiaramente come nel caso finito, si ha $m_g \leq m_a$.
- *Autospazio generalizzato di λ*: dato n_0 abbastanza grande abbiamo
$$V(\lambda) := \bigcup_{n\geq 0} \ker(\lambda - T)^n = \ker(\lambda - T)^{n_0}.$$

- Similmente al precedente possiamo anche considerare:

$$R(\lambda) := \bigcap_{n\geq 0} \operatorname{ran}(\lambda - T)^n = \operatorname{ran}(\lambda - T)^{n_0}.$$

Osservazione 5.23
Nel caso in cui X sia di dimensione finita vale che $\sigma = \sigma_{AV}$, in dimensione infinita invece si ha $\sigma_{AV} \subset \sigma$, infatti si ha come esempio:

$$\begin{array}{cccc} T: & L^2 & \to & L^2 \\ & e_k & \mapsto & \frac{e_k}{k} \end{array}$$

T è iniettivo e compatto, dunque non è invertibile.

Teorema 5.24 - Teorema di Riesz-Schauder
Se X Banach e $T \in L_C(X)$ vale che:

- $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_{AV}(T)\backslash\{0\}$.
- *Per ogni $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ si ha che λ è un autovalore di con molteplicità algebrica finita e $m_a(\lambda) = \dim V(\lambda)$.*
- $\sigma(T)\backslash\sigma(T^*)\backslash\{0\}$ *e* $m_a(\lambda, T) = m_a(\lambda, T^*)$, $m_g(\lambda, T) = m_g(\lambda, T^*)$.
- *Ogni $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ è isolato, ed essendo $\sigma(T)$ compatto, l'unico punto di accumulazione possibile di $\sigma(T)$ è 0.*
- *Dati $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$ vale che $V(\lambda) \subset R(\mu)$ e $V(\mu) \subset R(\lambda)$.*

Si ottiene la seguente decomposizione spettrale. Per ogni $\Lambda \subseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$ finito si può scrivere:

$$X = \left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V(\lambda)\right] \oplus \left[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R(\lambda)\right].$$

Il proiettore associato a $V(\lambda)$ con $\lambda \in \Lambda$ sarà il proiettore spettrale *di λ:*

$$E(\lambda) : X \longrightarrow V(\lambda)$$

mentre il nilproiettore *di λ sarà $I - E(\lambda) : X \to R(\lambda)$.*
Dato un qualsiasi sottoinsieme $\Lambda \subseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$ si può considerare il proiettore:

$$E_\Lambda := \sum_{\lambda\in\Lambda} E(\lambda) : X \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V(\lambda).$$

5.2 Operatori Limitati su Banach

Proposizione 5.25
Sia $A \in L(X)$ operatore limitato su X $\mathbb{C}$-spazio di Banach (a meno di complessificazione). Valgono le seguenti proprietà:

- *lo spettro $\sigma(A)$ è chiuso limitato in $\mathbb{C}$, contenuto nella palla $\overline{B}_{\mathbb{C}}(0, \|A\|)$.*
- *l'*insieme risolvente *definito $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ è aperto.*

- *l'applicazione che manda complessi in matrici inverse:*

$$\begin{array}{ccc} \rho(A) & \longrightarrow & L(X) \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda - A)^{-1} \end{array}$$

è analitica ed è infinitesima per $\lambda \to \infty$, ovvero:

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \longrightarrow 0.$$

Esercizio 5.26 - Identità del Risolvente
Provare che per ogni $\lambda, \mu \in \rho(A)$ vale l'identità:

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

Proposizione 5.27
Sia $A \in L(X)$ per $X \neq \{0\}$. Allora $\sigma(A) \neq \varnothing$.

Definizione 5.28 - Raggio Spettrale
Definiamo il *raggio spettrale* di $A \in L(X)$ come:

$$r(A) := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Possiamo riscrivere il raggio spettrale con la seguente formula.

Proposizione 5.29 - Formula di Cauchy-Hadamard
Sia $A \in L(X)$. Vale la seguente formula:

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Lemma 5.30 - Successioni Subadditive
Sia $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ successione subadditiva, cioè tale che $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 0} \frac{a_n}{n}.$$

Teorema 5.31 - Teorema della Mappa Spettrale
Sia X un $\mathbb{C}$-spazio di Banach, $T \in L(X)$ e $p \in \mathbb{C}[z]$. Allora:

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

dove se $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ allora $p(T) = \sum_{j=0}^{n} a_j T^j$.

5.2.1 Proprietà Generali del Raggio Spettrale

Ricordiamo la formula del raggio spettrale per $T \in L(X)$:

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

E' possibile dimostrare le seguenti proprietà.

Proposizione 5.32
Sia $T \in L(X)$. Valgono le seguenti.

1. *Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ vale $r(\lambda T) = |\lambda| r(T)$.*
2. *Ci sono le seguenti doppie caratterizzazioni.*

   i. *$r(T) \leq 1$ se e solo se $(T^n)_n$ limitato.*
   ii. *$r(T) < 1$ se e solo se $T^n \to 0$ per $n \to \infty$.*
   iii. *$r(T) > 1$ e T invertibile se e solo se $T^{-n} \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$.*

3. *Per $A, B \in L(X)$ vale che $r(AB) = r(BA)$. In realtà vale anche di più, ossia:*

$$\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}.$$

4. *Sia $T \in L(E)$. Allora:*

$$r(T) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

dove $\mathcal{N} = \{\|\cdot\| \text{ norma che topologizza } E\}$.

5.3 Operatori Limitati Simmetrici su Hilbert

Definizione 5.33 - Operatore Simmetrico su Hilbert
Sia H spazio di Hilbert. Un *operatore limitato simmetrico* $A \in L^{\text{simm}}(H)$ è tale che:

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Proposizione 5.34
Sia H Hilbert e $A \in L^{\text{simm}}(H)$. Allora:

1. *si ha che $\ker A = (\operatorname{ran} A)^{\perp}$ e $\overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A)^{\perp}$.*
2. *dato $H_0 \subseteq H$ sottospazio A-invariante, anche $H_0^{\perp}$ e $\overline{H_0}$ sono A-invarianti.*

Osservazione 5.35
Dato $A \in L^{\text{simm}}$, l'operatore $I + A^2$ è invertibile.

Cominciamo con alcune osservazioni e fatti.

Proposizione 5.36
Sia $A \in L^{\text{simm}}(H)$. Valgono le seguenti proprietà.

1. *$\sigma(A) \subseteq \big[-\|A\|, \|A\|\big] \subset \mathbb{R}$.*
2. *Autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.*
3. *Gli autovalori sono semisemplici ovvero $m_a = m_g$. Infatti vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ che $\ker(A - \lambda I)^n = \ker(A - \lambda I)$.*

Proposizione 5.37 - Raggio Spettrale con la forma quadratica
Consideriamo la forma quadratica $q_A(x) := \langle Ax, x \rangle$ associata ad $A \in L^{\text{simm}}(H)$. Definiamo la quantità:

$$r_A := \|q_A\|_{\infty, B} = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

Si prova che vale l'uguaglianza $r_A = \|A\|$.

Teorema 5.38 - Caratterizzazione Variazionale degli Autovalori
Una coppia $(x, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ è una coppia (autovettore, autovalore) di $A \in L^{\text{simm}}(H)$ se e solo se (x, λ) è una coppia (punto critico, valore critico) della funzione:

$$f_A(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

dove $f_A : H \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è il* quoziente di Rayleigh.

Proposizione 5.39
Sia $A \in L_C^{\text{simm}}(H)$*. Allora* $\pm\|A\| \in \sigma_{\text{AV}}(A)$*.*

Corollario 5.40
Sia $H_0 \subseteq H$ *sottospazio non vuoto* A*-invariante e chiuso. Allora* A *ha autovettore nel sottospazio* H_0*.*

Corollario 5.41
Un operatore $A \in L_c^{\text{simm}}(H)$ *ammette una base ortonormale di autovettori di* A*.*

Questi corollari permettono di arrivare ad un teorema di "diagonalizzazione" per operatori simmetrici compatti.

Teorema 5.42 - Teorema di Diagonalizzazione
Un operatore $A \in L_c^{\text{simm}}(H)$ *è unitariamente coniugato ad un operatore di moltiplicazione* $\alpha\cdot : \ell_2(S) \to \ell_2(S)$ *per un elemento* $\alpha \in c_0(S)$*, dove* S *è un insieme che indicizza una base di autovettori per* A*.*
Questo operatore di moltiplicazione $\alpha\cdot$ *è in un certo senso la "diagonalizzazione".*

Definiamo alla luce dei precedenti risultati un'indicizzazione per gli autovalori non nulli di un operatore $A \in L_c^{\text{simm}}(H)$.
Dato che $\sigma(A)$ ha punto di accumulazione al più in $0 \in \mathbb{R}$, si considera l'ordine debolmente monotono indotto da $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\lambda_{-1} \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-3} \leq \cdots \leq 0 \leq \cdots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$$

considerando anche la molteplicità degli autovalori.
Per comodità di notazione, nel caso di spettro di cardinalità finita definiamo $\lambda_n = 0$ se n non indicizza un elemento dello spettro. Inoltre, definiamo nel caso di autovalori negativi $\lambda_{-n}(A) := \lambda_n(A)$.

Arriviamo al seguente risultato.

Teorema 5.43 - Principio di Min-Max (Courant-Fischer-Weil)
Sia $A \in L_c^{\text{simm}}(H)$ *con autovalori indicizzati come sopra. Allora per ogni* $n > 0$ *vale:*

$$\lambda_n(A) = \inf_{\substack{E \subseteq H \\ \operatorname{codim}(E) < n}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} \langle Ax, x\rangle = \sup_{\substack{F \subseteq H \\ \dim(F) \geq n}} \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} \langle Ax, x\rangle$$

mentre

$$\lambda_n(A) = \sup_{\substack{E \subseteq H \\ \operatorname{codim}(E) < n}} \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} \langle Ax, x\rangle.$$

Teorema 5.44 - Principio degli Autovalori Intervallari
Sia $A \in L_c^{\text{simm}}(H)$ *ed* $H_0 \subset H$ *iperpiano chiuso, con mappe di inclusione e proiezione rispettivamente:*

$$J_0 : H_0 \longrightarrow H \qquad P_0 : H \longrightarrow H_0$$

dove ricordiamo che $P_0 = J_0^*$*. Consideriamo l'operatore* $A_0 := P_0 A J_0 \in L_c^{\text{simm}}(H)$*.*
Segue che:

$$A_0^* = A_0 \qquad q_{A_0} = a_A|_{H_0}$$

ed in particolare vale che per ogni $n > 0$:

$$\begin{cases} \lambda_{n+1}(A) \leq \lambda_n A_0 \leq \lambda_n(A) \\ \lambda_{-n}(A) \leq \lambda_{-n}(A_0) \leq \lambda_{-n-1}(A) \end{cases}.$$

Si possono dare delle altre stime sull'insieme spettro.

Definizione 5.45
Sia $A \in L(H)$. Allora si possono definire:

$$m_A := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \qquad \text{e} \qquad M_A := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle.$$

Proposizione 5.46
Per ogni $A \in L^{\text{simm}}(H)$ vale che $\sigma(A) \subseteq [m,M_a]$.

Proposizione 5.47
Per ogni $A \in L^{\text{simm}}(H)$ vale inoltre che:

$$m_A = \min \sigma(A) \qquad e \qquad M_A = \max \sigma(A).$$

Per la dimostrazione alternativa di questa proposizione abbiamo usato il seguente principio.

Proposizione 5.48 - Principio Variazionale di Ekeland
Sia (X, d) spazio metrico completo ed $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funzione semicontinua inferiormente e limitata inferiormente (non costante a ∞). Siano $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$: fissato un $a \in X$ tale che:

$$f(a) \leq \varepsilon + \inf_{x\in X} f(x)$$

allora esiste $\tilde{a} \in X$ tale che:

$$d(a, \tilde{a}) \leq \delta \qquad e \qquad f(\tilde{a}) \leq f(a) \qquad e \qquad \sup_{x\in X\setminus\{a\}} \frac{f(\tilde{a}) - f(a)}{d(\tilde{a}, x)} \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

5.4 Operatori di Fredholm

Definizione 5.49 - Operatore di Fredholm
Un *operatore di Fredholm* tra spazi di Banach è un operatore $T \in L(X, Y)$ tale che

$$\dim \ker T < \infty \qquad \operatorname{codim} \operatorname{ran} T < \infty.$$

Equivalentemente, esiste una successione esatta

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow X \xrightarrow{T} Y \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

dove E,F hanno dimensione finita. Denotiamo $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.

Fatto 5.50
Sia $T \in L(X, Y)$ tale che $\operatorname{ran} T$ ha codimensione finita. Allora $\operatorname{ran} T$ è un chiuso in Y.

Definizione 5.51 - Operatore di Semi-Fredholm
Sia $T \in L(X, Y)$ un operatore tra Banach. L'operatore T si dice di *semi-Fredholm* se:

- $\operatorname{ran} T$ è un chiuso in Y.

- uno tra $\dim\ker T$ e $\operatorname{codim}\operatorname{ran} T$ è finito.

Definizione 5.52 - Indice di Fredholm
Sia $T \in L(X,Y)$ un operatore di semi-Fredholm. Allora l'*indice di* T è:

$$i(T) := \dim\ker T - \operatorname{codim}\operatorname{ran} T.$$

Fatto 5.53
Sia $T \in L(H)$ dove H spazio di Hilbert. Allora T è di Fredholm se T^* è di Fredholm. In tal caso $i(T^*) = -i(T)$.

Teorema 5.54 - Teorema di Atkinson
Un operatore $T \in L(X,Y)$ è di Fredholm se e solo se T è essenzialmente invertibile, ovvero:

$$\exists S \in L(X,Y) \text{ tale che } I_X - ST \in L_C(X) \text{ e } I_Y - TS \in L_C(Y).$$

Osservazione 5.55
Sia $T \in L(X,Y)$ avente inverse essenziali destra S_1 e sinistra S_2. Allora:

$$TS_1 = I - C_1 \qquad S_2T = I - C_2$$

dove C_1,C_2 sono operatori compatti. Si ottiene che $S_1 - S_2$ è compatto e che entrambe sono inverse essenziali di T.

Osservazione 5.56 - Enunciato equivalente per $X = Y$
Il teorema di Atkinson, nel caso $X = Y$, si enuncia definendo il quoziente:

$$\pi : L(X) \longrightarrow {}^{L(X)}\!/_{L_C(X)} =: \mathcal{C}(X)$$

dove $\mathcal{C}(X)$ è detta algebra di Calkin.
In questa notazione, il Teorema di Atkinson equivale a dire che:

$$\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(X,X) = \pi^{-1}(G\mathcal{C}(X))$$

cioè che T è Fredholm se e solo se $\pi(T)$ è invertibile nell'algebra di Calkin.

Proposizione 5.57
Valgono i seguenti fatti.

1. *$\mathcal{F}(X,Y)$ è un aperto di $L(X,Y)$.*
2. *L'indice di Fredholm è localmente costante.*

Lemma 5.58
Dato $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ tale che $i(T) = 0$, si può scrivere $T = U + L$ dove U è invertibile ed L è di rango finito.

Proposizione 5.59
Siano $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ ed $S \in \mathcal{F}(Y,Z)$. Vale che:

$$ST \in \mathcal{F}(X,Z) \qquad \text{ed} \qquad i(ST) = i(S) + i(T).$$

Capitolo 6

Calcolo Funzionale

6.1 Operatori Autoaggiunti su Hilbert

Sia $A \in L(H)$ operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert. Sia $\Sigma := \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ compatto e non vuoto (per risultati del Capitolo 5). Dato un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$, possiamo definire $p(A) \in L(H)$ nel seguente modo:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \longrightarrow \qquad p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.$$

Questa costruzione risulta avere buone proprietà.

Fatto 6.1
La corrispondenza:

$$\begin{array}{ccc} \left(\Pi_\Sigma := \{\textit{funzioni polinomiali } \Sigma \to \mathbb{R}\}, \|\cdot\|_{\infty,\Sigma}\right) & \longleftrightarrow & (L(H), \|\cdot\|_H) \\ p & \longmapsto & p(A) \end{array}$$

è un omomorfismo isometrico di algebre.

Vogliamo ora estendere la costruzione fatta sopra, risulta naturale usare il Teorema di Stone-Weierstrass.

Proposizione 6.2 - Calcolo funzionale per Continue
Sia $A = A^* \in L(H)$. Allora esiste un unico omomorfismo continuo

$$\Phi = \Phi_A : C^0(\Sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow L(H)$$

tale che $\Phi(\mathrm{id}_\Sigma) = A$. Valgono le seguenti proprietà:

1. *Φ è un'isometria, con immagine chiusa in $L(H)$.*
2. *$\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$ per ogni $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{C})$, ovvero Φ è un $*$-omomofismo di algebre.*
3. *se $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{R})$ ed $f \geq 0$ su Σ, allora $\Phi(f) = \Phi(f)* \geq 0$.*
4. *se $[A, B] = 0$ allora $[\Phi(f), B] = 0$.*

Si può ulteriormente estendere il dominio di questa associazione, fino alle funzioni Boreliane limitate $\mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$. Servono i seguenti risultati.

Proposizione 6.3
Sia $A = A^* \in L(H)$ e sia $\Sigma = \sigma(A)$. Esiste una mappa sesquilineare[a]:

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & C^0(\Sigma, \mathbb{C})^* \simeq \mathcal{M}(\Sigma, \mathbb{C}) \\ (x, y) & \longmapsto & \mu_{x,y} \end{array}$$

dove $\mathcal{M}(\Sigma, \mathbb{C})$ sono le misure complesse su Σ e vale che:

$$\langle \mu_{x,y}, f \rangle := \langle f(A)x, y \rangle = \int_\Sigma f d\mu_{x,y}. \tag{6.1}$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

1. *per ogni $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{C})$ e per ogni $(x, y) \in H \times H$ vale la formula (6.1).*
2. *per ogni $x, y \in H$ vale $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*
3. *per ogni $x, y \in H$ vale $\mu_{y,x} = \overline{\mu_{x,y}}$.*
4. *definito per ogni $x \in H$ la misura $\mu_x := \mu_{x,x}$, essa è reale, $\mu_x \geq 0$ e $\|\mu_x\| = \|x\|^2$.*

[a] Ovvero una applicazione $V \times V \to W$ lineare sulla prima componente ed antilineare sulla seconda.

Osservazione 6.4
Sia K un compatto. Vale l'isometria $C^0(K, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ dove abbiamo

$$\mathcal{M}(K, \mathbb{C}) = \big\{\textit{misure di Baire limitate a valori in } \mathbb{C}\big\}.$$

Ricordiamo che l'algebra di Baire di K è definita:

$$\mathrm{Ba}(K) = \text{“ \textit{minima σ-algebra di insiemi per cui le funzioni continue sono misurabili}”}$$

ed è generata dagli aperti di K della forma $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ per f continua.
In particolare se K è metrizzabile, si ha che $\mathrm{Ba}(K)$ coincide con l'algebra di Borel.

Teorema 6.5 - Teorema di Lax-Milgram
Sia $b : H \times H \to \mathbb{C}$ mappa sesquilineare continua, cioè tale che:

$$\|b(x, y)\| \leq C \cdot \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in H.$$

Allora esiste $B \in L(H)$ tale che b è della forma:

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle.$$

Vengono introdotte le seguenti definizioni, per arrivare all'estensione della Proposizione 6.3.

Definizione 6.6 - Convergenza puntuale dominata
Sia Σ uno spazio metrico compatto e $\mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni boreliane limitate su tale compatto. Diciamo che una successione $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ converge ad una $f \in \mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ nella *convergenza puntuale dominata* se:

$$\exists\, C \geq 0 \text{ tale che per ogni } x \in \Sigma \text{ valgano } |f_k| \leq C \text{ e } f_k(x) \to f(x).$$

Teorema 6.7 - Teorema di densità sequenziale
Lo spazio $C^0(\Sigma, \mathbb{C})$ è sequenzialmente denso in $\mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$ per convergenza puntuale dominata.
In altre parole: il minimo insieme sequenzialmente chiuso per convergenza puntuale dominata contenente le funzioni continue è proprio $\mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$.

Definizione 6.8 - Convergenza debole degli operatori
Una successione $(A_k)_{k\geq 0} \subseteq L(H)$ converge ad $A \in L(H)$ nel *senso debole degli operatori* se:

$$\langle A_k x, y\rangle \longrightarrow \langle Ax, y\rangle \text{ per } n \to \infty \qquad \forall x, y \in H.$$

Effettivamente, questa è la convergenza su $L(H)$ data dalla topologia iniziale $\sigma(L(H), F)$ dove $F := \{v_{x,y} : A \mapsto \langle Ax, y\rangle\}$.

Osservazione 6.9
Risulta che quest'ultima è la convergenza w^* di $L(H)$, in quanto $L(H)$ è un biduale dato che $(L_C(H))^{**} = L(H)$.
Vale infatti che $L_C(H) \subseteq L(H)$ è l'inclusione insiemistica nel biduale.

Definizione 6.10 - Convergenza forte degli operatori
Una successione $(A_k)_{k\geq 0} \subseteq L(H)$ converge ad $A \in L(H)$ nel *senso forte degli operatori* se:

$$A_k x \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax \qquad \forall x \in H$$

cioè puntualmente, viste come funzioni $A_k : H \to H$.

Finalmente si può enunciare il risultato generale.

Proposizione 6.11 - Calcolo funzionale per Boreliane
Sia $A = A^* \in L(H)$ e sia $\Sigma = \sigma(A)$. Esiste un unico omomorfismo di algebre:

$$\Phi : \mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow L(H)$$

tale che $\Phi(\mathrm{id}_\Sigma) = A$ e che sia sequenzialmente continuo tra le convergenze puntuale dominata (per $\mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$) e debole nel senso degli operatori (per $L(H)$).

Corollario 6.12
Nelle ipotesi sopra, indicando $f(A) := \Phi(f)$, valgono le seguenti proprietà.

1. *Per ogni $x, y \in H$ e per ogni $f \in \mathcal{B}(\Sigma, \mathbb{C})$:*

$$\langle f(A)x, y\rangle = \int_\Sigma f d\mu_{x,y}$$

2. $\|f(A)\| \leq \|f\|_{\infty,\Sigma}$.
3. *La mappa Φ è compatibile col coniugio, ovvero $\overline{f}(A) = [f(A)]^*$.*
4. *Se $[A, B] = 0$ allora $[f(A), B] = 0$.*
5. *Se $f_k \to f$ in convergenza puntualmente dominata, allora $f_k(A) \to f(A)$ in senso forte degli operatori.*

6.2 Operatori Normali su Hilbert

Definizione 6.13 - Operatore normale su Hilbert
Sia $A \in L(H)$ con H spazio di Hilbert. Allora A è *normale* se $AA^* = A^*A$.

Osservazione 6.14
In questa generalità, $\sigma(A) \not\subseteq \mathbb{R}$ quindi il Teorema di Weierstrass non è più garantito, non si può enunciare l'equivalente della Proposizione 6.3.

Dato un operatore A lineare, si può però scrivere:

$$A = B + iC \qquad \text{dove } B, C \text{ autoaggiunti}$$

dove in particolare $BC = CB$ in quanto si definiscono esplicitamente:

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

L'idea è quella di estendere il calcolo funzionale per $f(A_1, \ldots, A_k)$ dove A_i sono operatori autoaggiunti che commutano tra loro. Questo permetterebbe di risolvere il caso di operatori lineari, lavorando con $A_1 = B$ e $A_2 = C$.

Si fa ricadere la trattazione ai risultati della seguente sezione.

6.3 Algebre Finitamente Generate

In questa sezione si considera la $*$-algebra:

$$\mathcal{A} := *\text{-algebra generata da } A_1, \ldots, A_k \text{ commmutanti}$$

dove per $*$-algebra si intende un'algebra che presenta l'operazione di aggiunzione.

Teorema 6.15 - Calcolo funzionale per Algebre Finitamente Generate
Siano $A_1, \ldots, A_n \in L(H)$ tali che $A_i = A_i^*$ ed $A_iA_j = A_jA_i$ per ogni i, j.
Definiamo gli intervalli $I_i := \big[-\|A_i\|, \|A_i\|\big]$ ed anche $\mathbb{I} := \prod_{i=1}^{n} I_i$. Allora esiste un unico omomorfismo di algebre:

$$\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{C}) \longrightarrow L(H)$$

sequenzialmente continuo rispetto alle convergenze puntuale e dominata (su $\mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{C})$) e convergenza nel senso debole degli operatori (su $L(H)$).
Inoltre, se $x_i \in \mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{C})$ è tale che $x_i : (a_1, \ldots, a_k) \mapsto a_i$ allora:

$$\Phi(x_i) = A_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

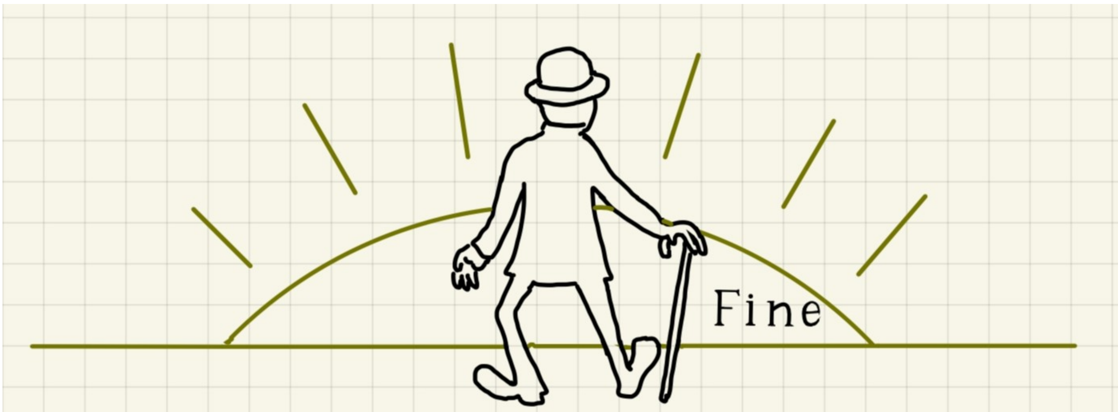
Proposizione 6.16
Nelle ipotesi sopra, per l'omomorfismo Φ valgono le seguenti proprietà.

1. *Per ogni $f \in \mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{C})$ vale che $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_{\infty, \Sigma}$.*

2. *Φ è uno $*$-omomorfismo ordinato, cioè $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$ e se f ha valori reali ed è ≥ 0 allora anche $\Phi(f) = \Phi(f)^* \geq 0$.*

3. *Se $f_n \to f$ in convergenza puntuale dominata, allora $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ nel senso forte degli operatori.*

4. *Se $B \in L(H)$ è tale che $[A_i, B] = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ allora $\big[\Phi(f), B\big] = 0$ per ogni $f \in \mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{C})$.*


Fine

Parte II

Domande

Capitolo 1

Domande Orale

In questo capitolo vengono riportate in ordine sparso le domande fatte agli orali di Istituzioni di Analisi finora.

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Banach-Steinhaus, con le sue conseguenze.
2. Come si caratterizzano i compatti in uno spazio di Banach (Enunciare i teoremi di Mazur, Diendonné ed Eberlein-Šmulian)?
3. Parlare del calcolo funzionale per algebre finitamente generate.
4. Enunciare e dimostrare il teorema dell'immagine chiusa.
5. Parlare della relazione tra iniettività e operatori aggiunti (come conseguenza del teorema della mappa aperta).
6. Parlare dei risultati principali visti per spazi riflessivi e dimostrare uno di essi.
7. Enunciare e dimostrare il teorema di Hahn-Banach con le sue conseguenze.
8. Parlare della formula per il raggio spettrale di operatori.
9. Enunciare e dimostrare il teorema di Milman-Pettis.
10. Enunciare e dimostrare il teorema della mappa aperta con le sue conseguenze.
11. Parlare delle proprietà degli operatori di Fredholm.
12. Dimostrare che lo spazio c_0 non è un duale.

Indice analitico