Stratifying the Space of Barcodes using Coxeter complexes

by Benjamin Brück, Adélie Garin ~ 2022

Seminario di Alessio Sgubin

Data: 22/04/24

MOTIVAZIONE

Consideriamo la PIPELINE spesso usata in TDA:

$$\boxed{\text{FILTRAZIONE}} \Rightarrow \boxed{\text{MODULO DI PERSISTENZA}} \Rightarrow \boxed{\text{BARCODES}}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\text{Machine Learning}\}$$

$\Rightarrow$ Studiare features salienti dei barcodes.

DEF. Barcode

Un BARCODE è un multiset $\{(b_i, d_i)\}_{i\in I}$ dove $b_i < d_i \quad \forall\, i \in I$ e $|I| < \infty$.

Indichiamo:

$$\mathcal{B}_n := \{ \text{barcodes} \;:\; |I| = n \}$$

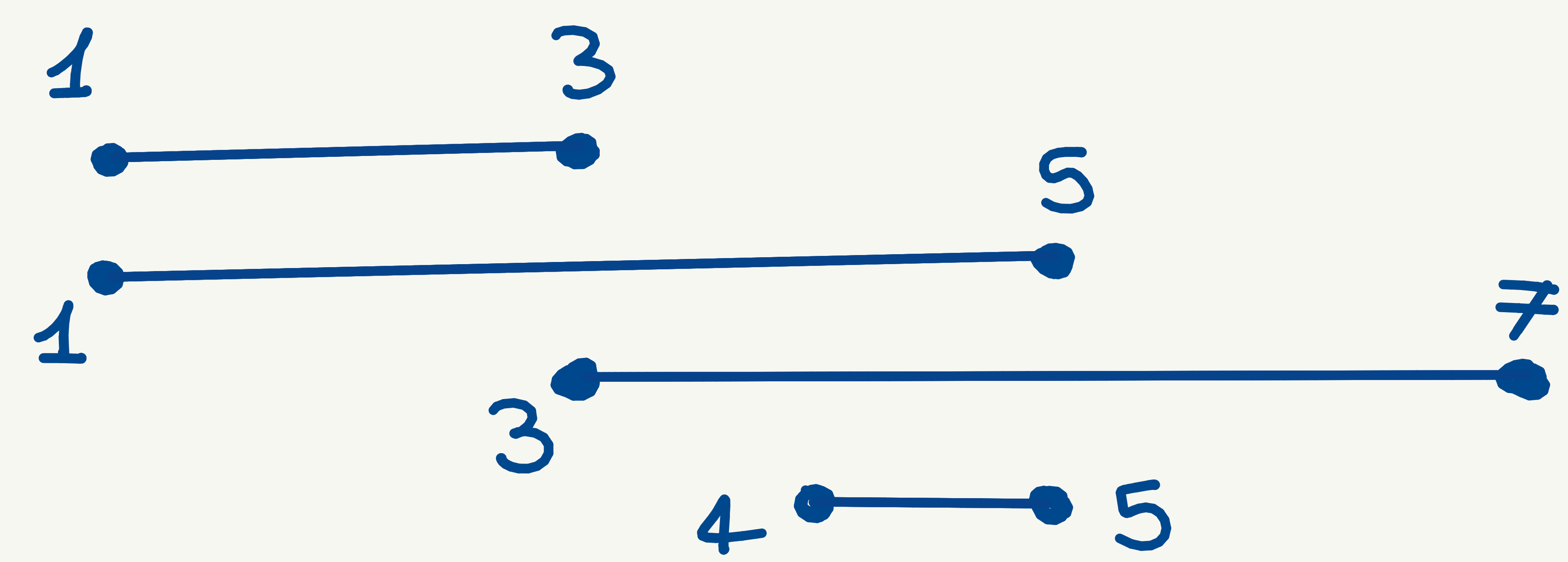
$$\mathcal{B}_n^{st} := \{ \text{barcodes} \;:\; |I| = n \;\wedge\; b_i \neq b_j,\, d_i \neq d_j \;\; \forall\, i \neq j \}$$

(detti: STRICT BARCODES)

ESEMPIO

Consideriamo $B \in \mathcal{B}_4$ dato da:

$$B = \{(1,5), (1,3), (3,7), (4,5)\}.$$



DEF. Permutazione Associata a $\mathcal{B}_n^{st}$

Sia $B = \{(b_i, d_i)\}_{i \in [n]} \in \mathcal{B}_n^{st}$. Allora $\exists!\ \tau_b, \tau_d \in Sym_n$ tali che

$$b_{\tau_b(1)} \leq \ldots \leq b_{\tau_b(n)} \quad e \quad d_{\tau_d(1)} \leq \ldots \leq d_{\tau_d(n)}$$

Si definisce $\sigma_B := \tau_b^{-1} \circ \tau_d$ PERMUTAZIONE ASSOCIATA a B.

- OSS: τ_b e τ_d dipendono da $i \in [n]$ ma σ_B no:

  i-esima morte $\Longrightarrow$ $\sigma_B(i)$-esima nascita

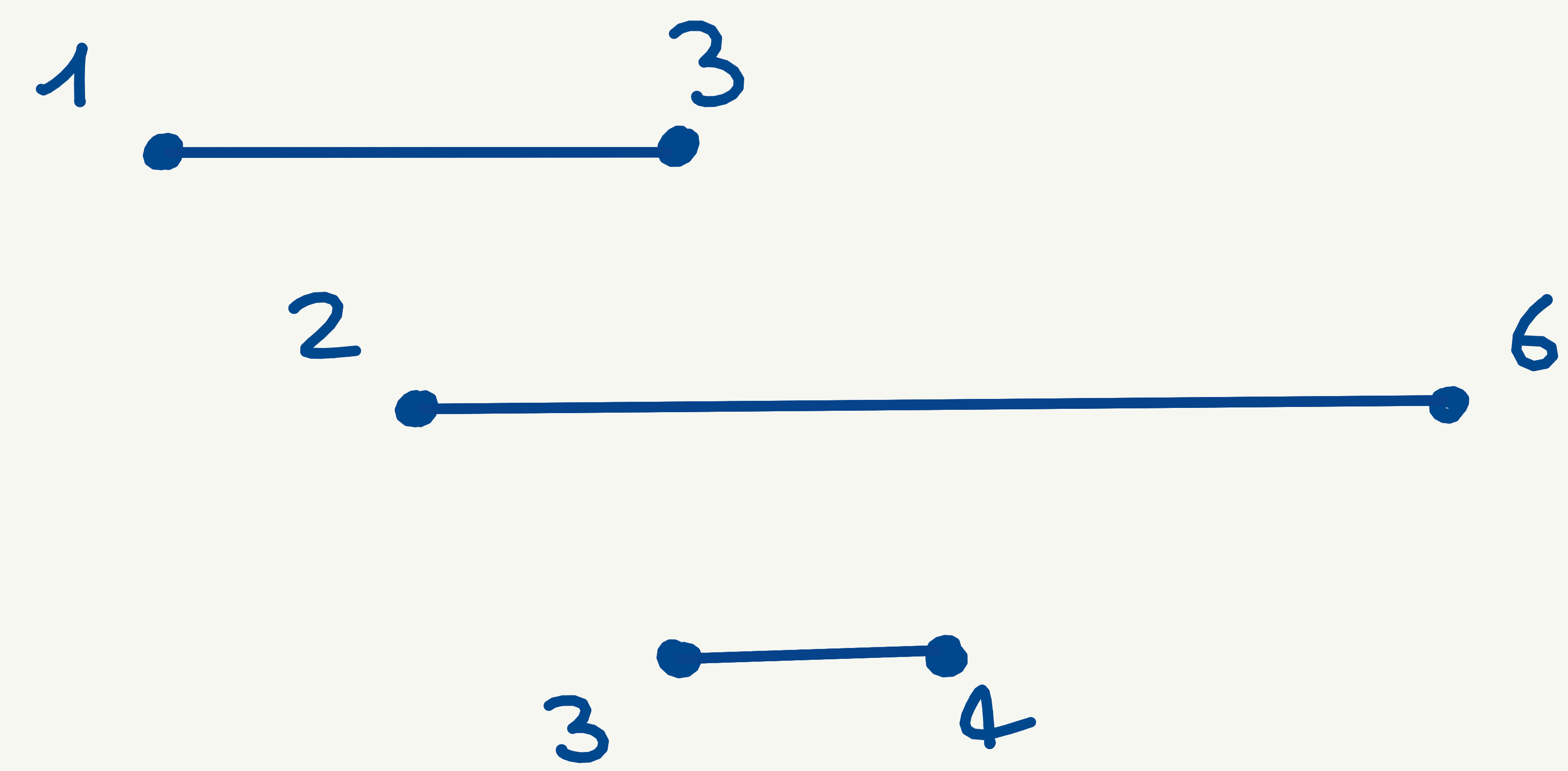
- OSS: le permutazioni τ_b, τ_d, σ_B sono uniche solo quando B è strict.

DEF. One-Line Notation

Sia $\gamma \in Sym_n$. Denotiamo $\gamma =$ " $\gamma(1)\,\gamma(2)\,\dots\,\gamma(n)$ ".

ESEMPIO

$B_1 = \{(1,3),(2,6),(3,4)\}$



Calcoliamo:

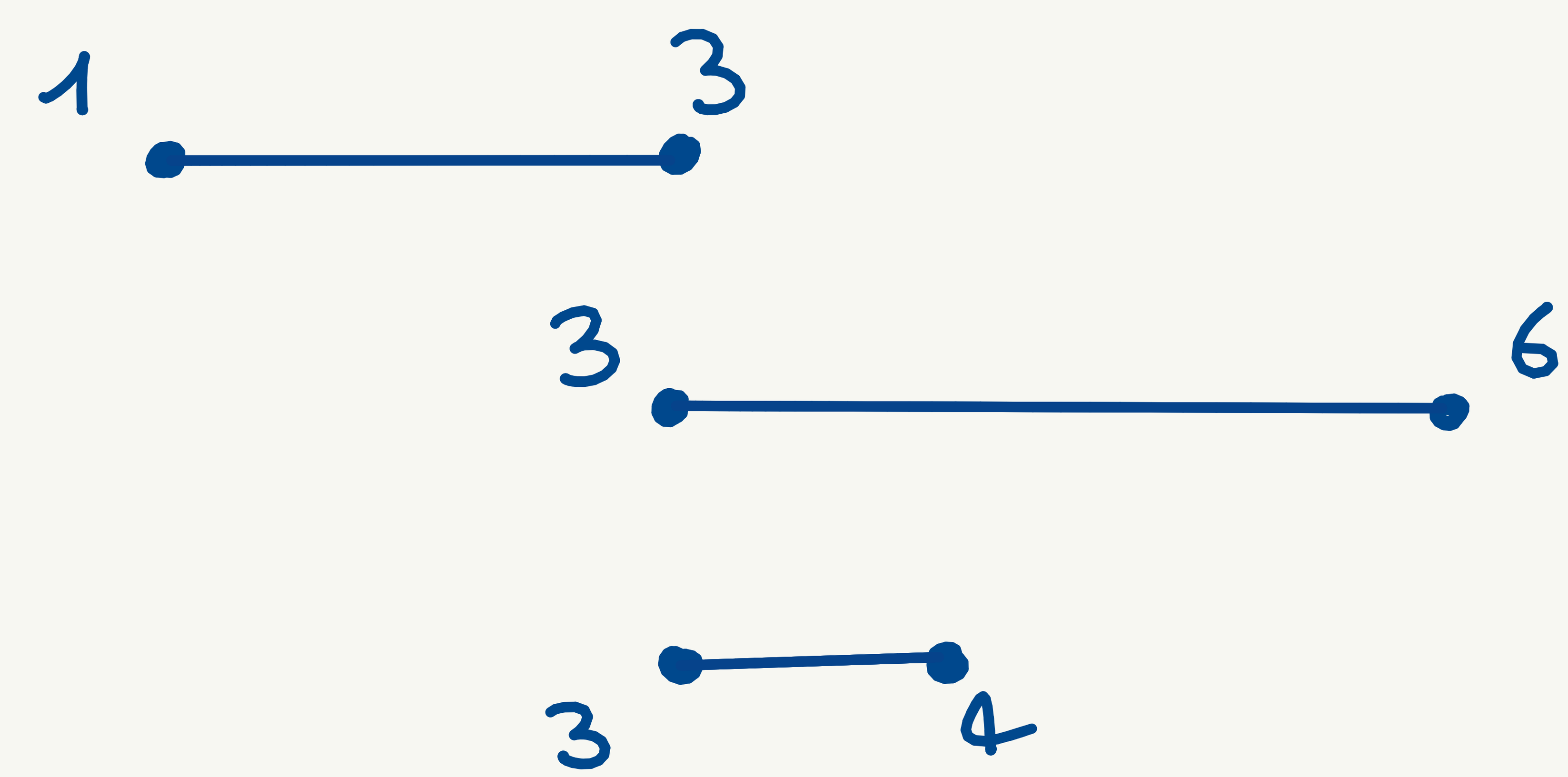
$$\left.\begin{aligned} \tau_b &= 1\ 2\ 3 \\ \\ \tau_d &= 1\ 3\ 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sigma_B = 132$$

DEF. One-Line Notation

Sia $\gamma \in Sym_n$. Denotiamo $\gamma =$ "$\gamma(1)\,\gamma(2)\,\dots\,\gamma(n)$".

ESEMPIO

$B_2 = \{(1,3),(3,6),(3,4)\}$



Calcoliamo:

$$\left.\begin{aligned} \tau_b &= 1\ 2\ 3 \\ \tau_b' &= 1\ 3\ 2 \\ \tau_d' = \tau_d &= 1\ 3\ 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} \sigma_B &= 132 \\ \sigma_B' &= 123 \end{aligned}$$

?

DEF. Stratificazione

Sia X spazio topologico. Una STRATIFICAZIONE su $(P, \leq)$ è una famiglia di sottospazi $\{X_p\}_{p \in P}$ tali che:

(i) $X = \bigcup_{p \in P} X_p$. (ii) $p \leq q$ se e solo se $X_p \subseteq X_q$.

(iii) se $X_p \cap X_q \neq \emptyset$, allora è unione di strati.

(iv) $\forall\, x \in X \ \exists!\, p_x \in P$ tale che $X_{p_x} = \bigcap_{X_q \ni x} X_q$.

OSS: se K complesso simpliciale astratto

$|K|$ è stratificato su $(K, \preccurlyeq)$.

OBIETTIVO: trovare stratificazione di B_n in funzione dell' ordine di nascita/morte delle barre.

Ci sono dei problemi:

→ struttura di MULTISET dei BARCODE, come posso ottenere un embedding in $\mathbb{R}^m$?

→ descrivere le permutazioni associate per barcodes non-strict.

GRUPPI di COXETER

▸ **DEF.** Sistema di Coxeter Finito

Un GRUPPO di COXETER FINITO W è un gruppo di riflessione finito. Cioè dato S insieme di RIFLESSIONI SEMPLICI in $\mathbb{R}^n$ rispetto a iperpiani, W è descritto dal gruppo che agisce su $\mathbb{R}^n$ generato da S.

Diciamo che (W, S) è SISTEMA di COXETER.

ESEMPIO Sym_n

Il gruppo Sym_n è gruppo di Coxeter.

Consideriamo su $\mathbb{R}^n$ l'insieme $S = \{R_i\}_{i \in [n-1]}$

dove $R_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)$

è la riflessione rispetto ad $H_i = \{x_i = x_{i+1}\}$.

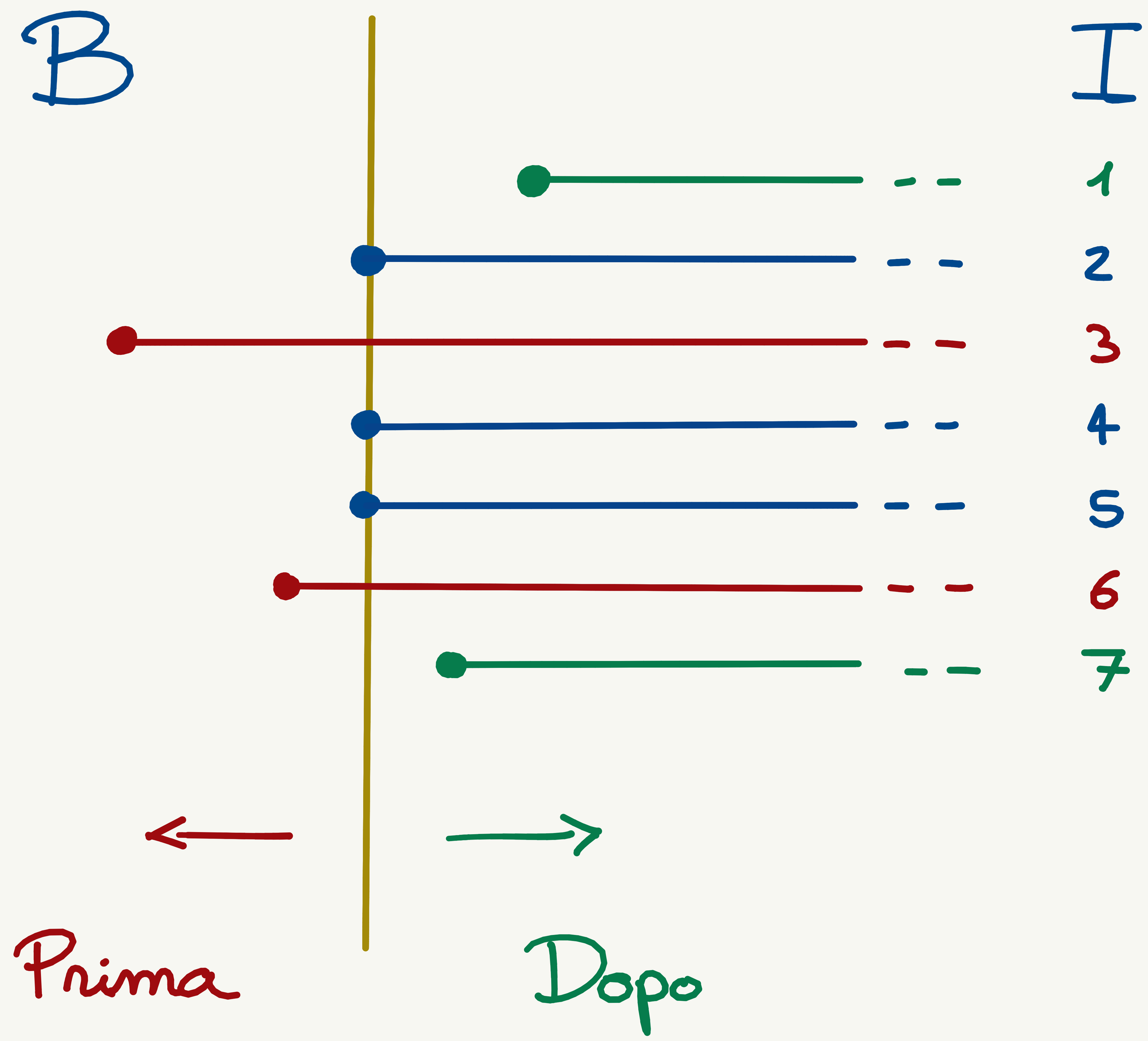
In particolare: $\mathrm{Sym}_n \longleftrightarrow W$

$(i, i+1) \longleftrightarrow R_i$

quindi $\forall\, \gamma \in \mathrm{Sym}_n$

$$\gamma \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_{\gamma^{-1}(1)}, \dots, x_{\gamma^{-1}(n)}).$$

▸ <u>Oss</u>: calcoliamo le possibili τ_b per $B \in B_n$:



3 6 2 4 5 7 1

3 6 2 5 4 7 1

3 6 4 2 5 7 1

3 6 4 5 2 7 1

3 6 5 2 4 7 1

3 6 5 4 2 7 1

⟨trasposizioni semplici⟩

▸ <u>DEF.</u> Sottogruppi Parabolici

Sia (W, S) sistema di Coxeter. I suoi SOTTOGRUPPI PARABOLICI sono $P_T := \langle T \rangle_W$ con $\emptyset \neq T \subseteq S$.

L'osservazione motiva la seguente definizione.

▸ **DEF. Doppio Coset associato a $\mathcal{B}_n$**

Sia $B \in \mathcal{B}_n$. Fissate due possibili $\tau_b^B, \tau_d^B \in \mathrm{Sym}_n$:

$$P_b^B := \{ \gamma \in \mathrm{Sym}_n \mid b_{\tau_b(i)} = b_{\tau_b \gamma(i)} \ \forall i \}$$

$$P_d^B := \{ \gamma \in \mathrm{Sym}_n \mid d_{\tau_d(i)} = d_{\tau_d \gamma(i)} \ \forall i \}$$

sono <u>sottogruppi parabolici</u> e definiscono:

$$D_B := P_b^B \tau_b^{-1} \tau_d P_d^B \quad \text{DOPPIO COSET ASSOCIATO a } B.$$

▸ Oss: P_b^B, P_d^B e D_B non dipendono dagli indici $i \in I$.

▸ Oss: nel caso $B \in \mathcal{B}_n^{st}$ allora $D_B = \{\sigma_B\}$.

▸ DEF. Complesso di Coxeter

Sia (W,S) sistema di Coxeter. Definiamo il complesso simpliciale astratto $\Sigma(W) := \bigcup_{\substack{\tau \in W \\ T \subsetneq S}} \{\tau P_T\}$ dove

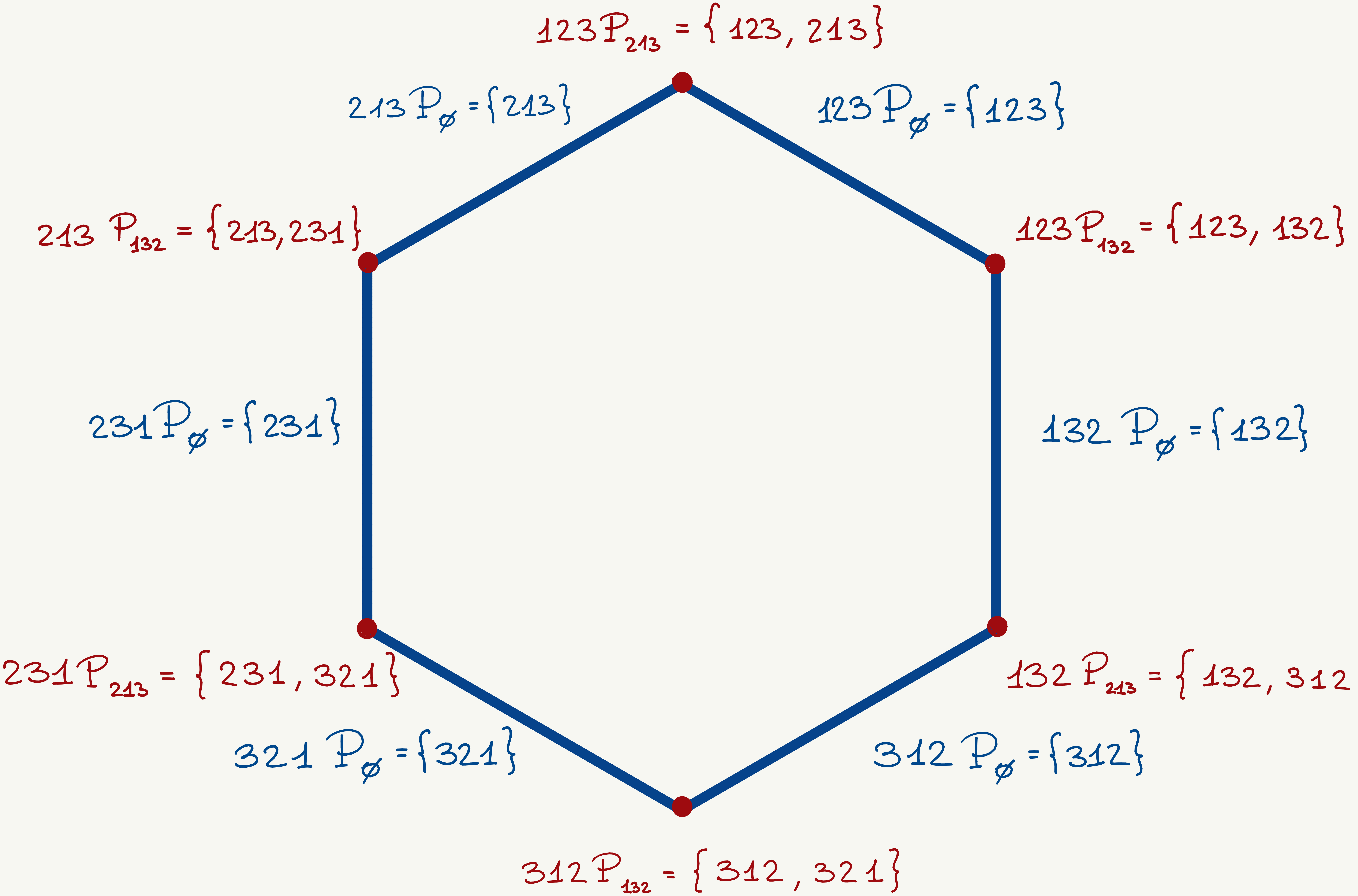
$$\tau P_T \preccurlyeq \tau' P_{T'} \iff \tau P_T \supseteq \tau' P_{T'}.$$

▸ Azione di W su $\Sigma(W)$

Il gruppo W agisce su $\Sigma(W)$:

$$\forall w \in W \qquad w \cdot \tau P_T := w\tau P_T$$

ESEMPIO $\Sigma_3 := \Sigma(Sym_3)$



▸ PROPRIETÀ $\Sigma_n := \Sigma(\mathrm{Sym}_n)$

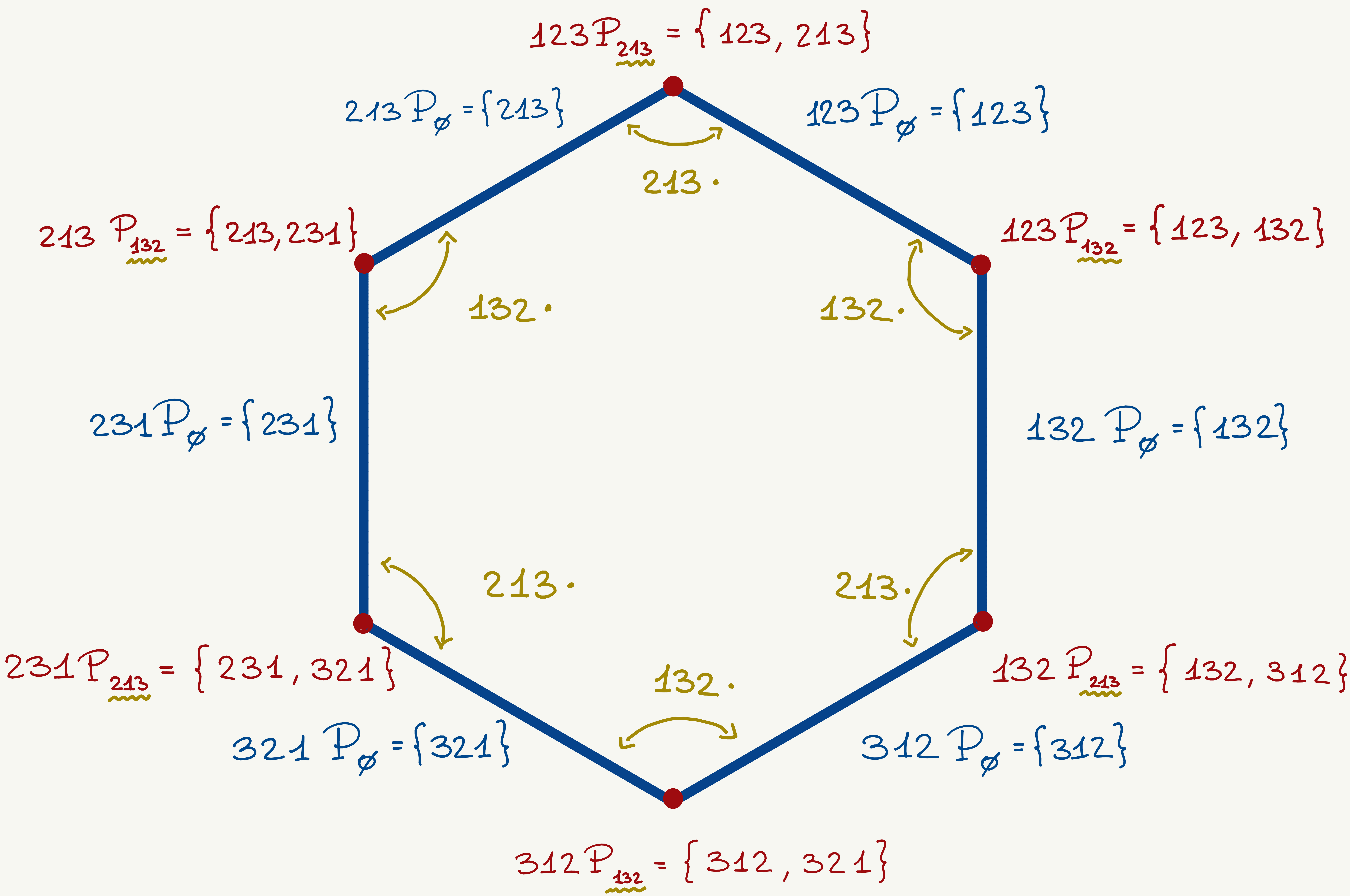
- $\Sigma_n \cong \mathrm{Bd}(\partial\Delta(n-2)) \cong S^{n-2}$

- $\{\text{facce massimali } \Sigma_n\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{elementi } \mathrm{Sym}_n\}$

  facce adiacenti $\longleftrightarrow$ permutazioni che differiscono per $(i, i+1)$

- Σ_n è stratificato su $(\Sigma_n, \preccurlyeq)$.

ESEMPIO $\Sigma_3 := \Sigma(\mathrm{Sym}_3)$



▸ PROPRIETÀ $\Sigma_n := \Sigma(\mathrm{Sym}_n)$

- Consideriamo l' arrangiamento di iperpiani

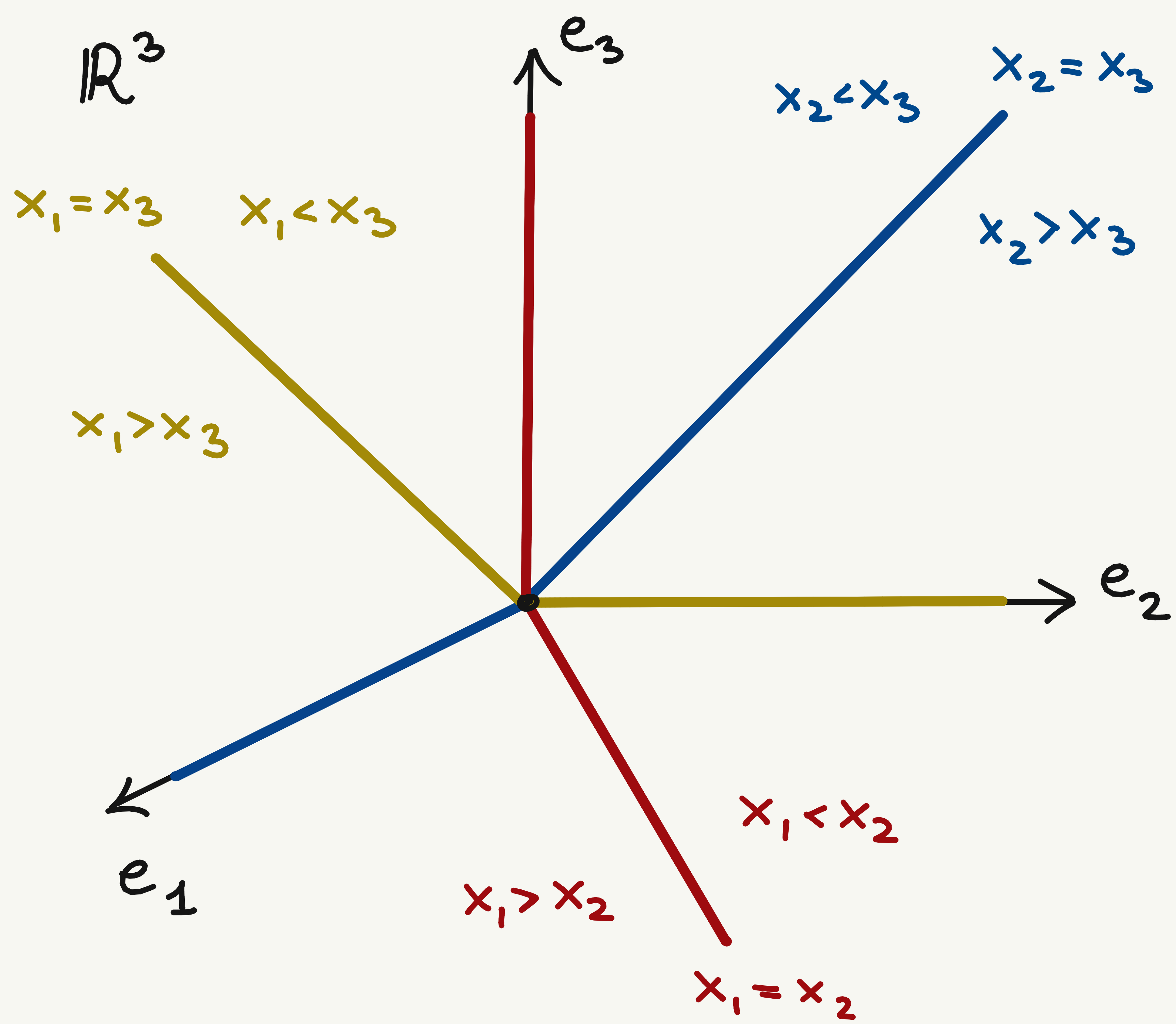
$$\mathcal{H} := \{ H_{ij} = \{x_i = x_j\}\}_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [n]}} \quad \text{in } \mathbb{R}^n .$$

Definito $V = (1,\dots,1)^\perp = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$

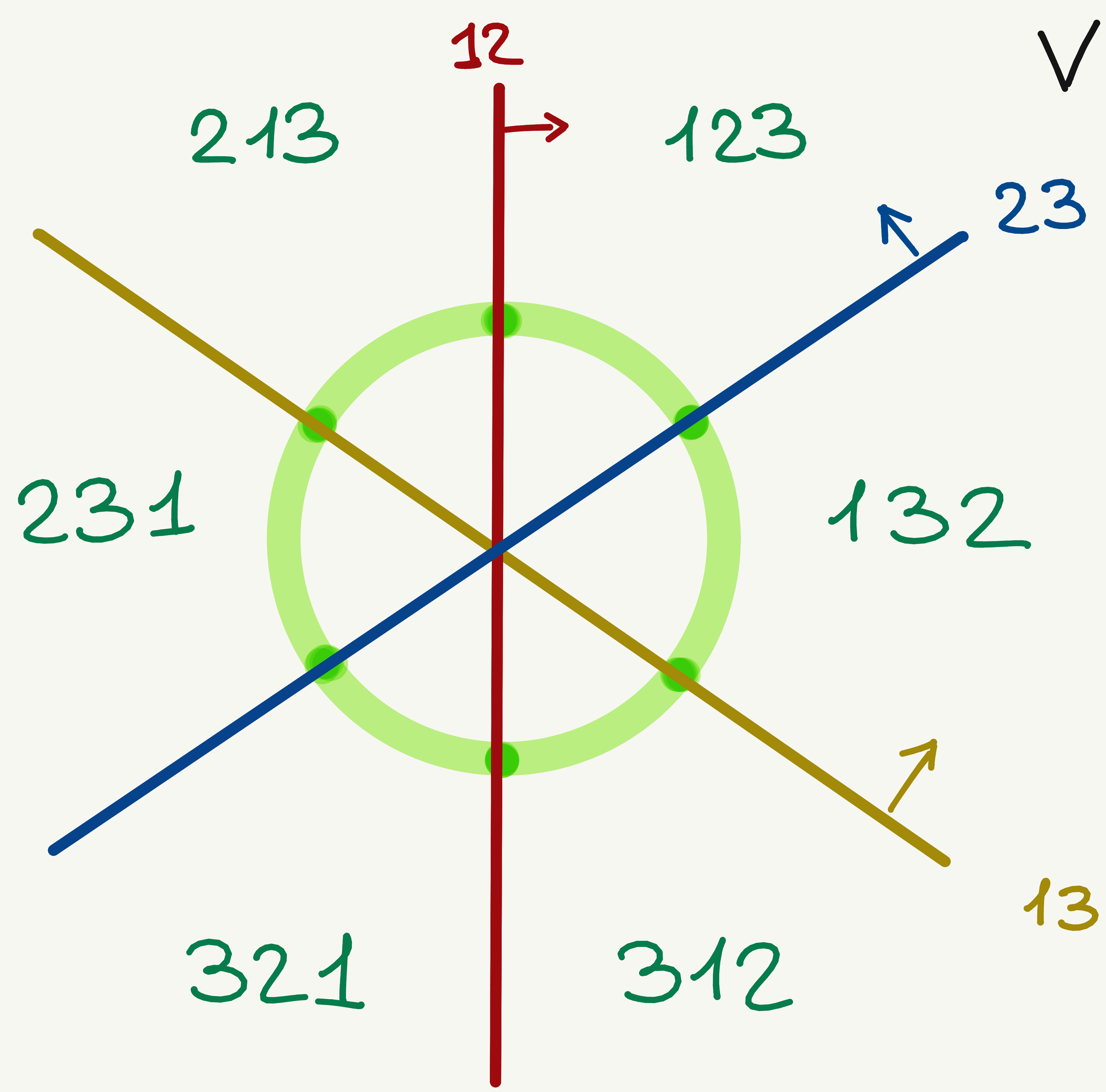
consideriamo $S^{n-2} \subseteq V$ sfera unitaria.

> L' arrangiamento $\mathcal{H}$ induce una triangolazione di S^{n-2}
> e il complesso simpliciale associato è isomorfo
> al complesso di Coxeter $\Sigma(\mathrm{Sym}_n) = \Sigma_n$.

ESEMPIO $W = \mathrm{Sym}_3$



proietto su $V := (1,1,1)^{\perp}$



dove :

$\cong \Sigma_3 = \Sigma(\mathrm{Sym}_3)$

Il precedente esempio si generalizza al caso di $\mathbb{R}^n$.

Indichiamo $\underline{e} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e definiamo i sottospazi:

$$L := \mathrm{span}(\underline{e}) \qquad \text{e} \qquad V := \underline{e}^{\perp} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

Sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora si possono considerare:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{MEDIA } \bar{x}$$

$$v_{\underline{x}} = \underline{x} - \bar{x}\underline{e} \in V \qquad \text{DEVIAZIONE STANDARD } \|v_{\underline{x}}\|$$

Siccome $V \cong \mathbb{R}^{n-1}$, per ogni $v \in V \setminus \{\underline{0}\}$ si definisce:

$$\underline{v}_{\theta} := \frac{v_{\underline{x}}}{\|v_{\underline{x}}\|} \in S^{n-2} \cong \Sigma_n \qquad \text{DIREZIONE LUNGO } V.$$

Queste statistiche si riassumono con le mappe:

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad\qquad q : \mathbb{R}^n \setminus L \longrightarrow \Sigma_n$$
$$\underline{x} \longmapsto (\bar{x}, \|v_{\underline{x}}\|) \qquad\qquad \underline{x} \longmapsto \underline{v}_0$$

PROPOSIZIONE

Consideriamo l'azione $\mathrm{Sym}_n \curvearrowright \mathbb{R}^n$. Vale che

$$(p|_{\mathbb{R}^n \setminus L}, q) : \mathbb{R}^n \setminus L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \Sigma_n$$

è bigettiva e Sym_n-equivariante, cioè

$$\forall \gamma \in \mathrm{Sym}_n : \quad \gamma \cdot (p|_{\mathbb{R}^n \setminus L}, q)(\underline{x}) = (p|_{\mathbb{R}^n \setminus L}, q)(\gamma \cdot \underline{x}).$$

Secondo questa scrittura: $\mathbb{R}_{>0} \times \Sigma_n \cong \mathrm{cone}(\Sigma_n) \setminus \{*\}$.

STRATIFICAZIONE di $\mathcal{B}_n$

▸ COORDINATE per $\mathcal{B}_n$

Sia $X := {}_{Sym_n}\backslash \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dove $\forall \gamma \in Sym_n$:

$$\gamma \cdot (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := \left(x_{\gamma^{-1}(1)}, \dots, x_{\gamma^{-1}(n)}, y_{\gamma^{-1}(1)}, \dots, y_{\gamma^{-1}(n)} \right).$$

Dato $Y := {}_{Sym_n}\backslash \left\{ (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x_i < y_i \ \forall i \right\} \subseteq X$:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{B}_n &\xrightarrow{\sim} Y \\ \{(b_i, d_i)\} &\longmapsto [b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_n] \end{aligned}$$ è bigettiva.

La precedente proposizione si riscrive come :

PROPOSIZIONE

Ogni barcode $\{(b_i, d_i)\}_{i\in[n]} \in \mathcal{B}_n$ con almeno due b_i e due d_i distinti determina:

ⓐ $\bar{b} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$

ⓑ $\bar{d} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$

ⓒ $\|\underline{v}_b\| = \sqrt{\sum_i (b_i - \bar{b})^2}$

ⓓ $\|\underline{v}_d\| = \sqrt{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}$

ⓔ un'orbita $\mathrm{Sym}_n \cdot (b_0, d_0) \in {}_{\mathrm{Sym}_n}\backslash \Sigma_n \times \Sigma_n$.

Queste statistiche determinano univocamente il barcode.

IDEA: si induce $(p|_{\mathbb{R}^n \setminus L}, q, p|_{\mathbb{R}^n \setminus L}, q)$ al quoziente ${}_{\mathrm{Sym}_n}\backslash$.

▸ STRATIFICAZIONE di B_n

I risultati precedenti indicano che

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \overset{\Psi}{\cong} \mathbb{R} \times \mathrm{cone}(\Sigma_n) \times \mathbb{R} \times \mathrm{cone}(\Sigma_n).$$

tramite Ψ Sym_n - equivariante.

Stratificazione di Σ_n su $(\Sigma_n, \preccurlyeq)$	$\rightsquigarrow$	Stratificazione di $\mathrm{cone}(\Sigma_n)$ su $(\Sigma_n, \preccurlyeq)$

$\Downarrow$

$\mathbb{R}^{2n}$ è stratificato su $(\mathcal{P}, \leq)$ dove

$$\mathcal{P} = \{ (\tau_1 P_1, \tau_2 P_2) \mid \tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Sym}_n \text{ e } P_1, P_2 \text{ parabolici} \}$$

▸ Stratificazione su $\tilde{\mathcal{P}}$

Passando ai quozienti si ottiene quindi:

$$\boxed{\text{stratificazione } \mathbb{R}^{2n} \text{ su } (\mathcal{P}, \leq)} \xrightarrow{\mathrm{Sym}_n} \boxed{\text{stratificazione } X \text{ su } (\tilde{\mathcal{P}}, \leq)}$$

dove $\tilde{\mathcal{P}} = \{ \text{orbite di } \mathrm{Sym}_n \curvearrowright \mathcal{P} \}$ con:

$$[\alpha_1 P_1, \alpha_2 P_2] \leq [\beta_1 Q_1, \beta_2 Q_2]$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\, \gamma \in \mathrm{Sym}_n \text{ tale che } \begin{cases} \alpha_1 P_1 \supseteq \gamma \beta_1 Q_1 \\ \alpha_2 P_2 \supseteq \gamma \beta_2 Q_2 \end{cases} .$$

▸ Stratificazione su $\tilde{Q}$

Definiamo un poset $\tilde{Q}$ isomorfo a $\tilde{P}$:

$$\tilde{Q} := \left\{ (P_1, P_1 \sigma P_2, P_2) \;\middle|\; P_1, P_2 \text{ parabolici},\ \sigma \in Sym_n \right\}$$

con $\leq$ component-wise reverse-inclusion:

$$(P_1, P_1\sigma P_2, P_2) \leq (Q_1, Q_1 \tau Q_2, Q_2) \iff \begin{cases} P_1 \supseteq Q_1 \\ P_1 \sigma P_2 \supseteq Q_1 \tau Q_2 \\ P_2 \supseteq Q_2 \end{cases}.$$

Vale:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &\xrightarrow{\;\sim\;} \tilde{Q} \\ [\tau_1 P_1, \tau_2 P_2] &\longmapsto (P_1, P_1 \tau_1^{-1} \tau_2 P_2, P_2) \\ [P_1, \sigma P_2] &\longleftarrow (P_1, P_1 \sigma P_2, P_2) \end{aligned}$$

Con questa bigezione, X stratificato su $\tilde{Q}$.

Restringendo ad $Y \subseteq X$, si ottiene la stratificazione:

TEOREMA

Lo spazio dei barcodes $\mathcal{B}_n$ è stratificato su $\tilde{Q}$.

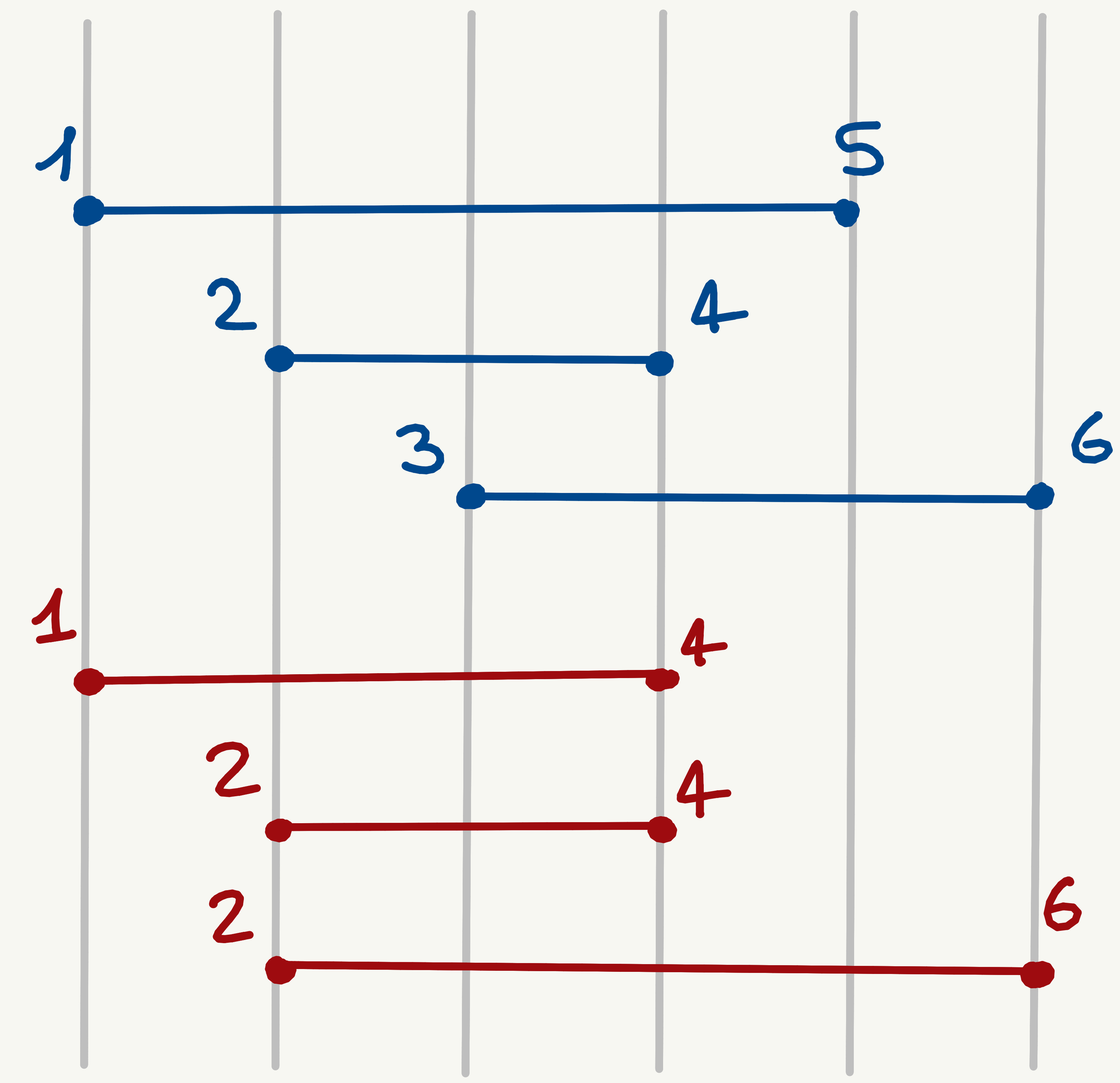
Dato $B \in \mathcal{B}_n$ lo strato minimale contenente B sarà

$$\mathcal{B}_n^{(P_b^B, D_B, P_d^B)} := \left[\mathbb{R} \times \mathrm{cone}(\tau_b P_b^B) \times \mathbb{R} \times \mathrm{cone}(\tau_d P_d^B) \right] \cap Y.$$

Esempio

$$B = \{(1,5),(2,4),(3,6)\}$$

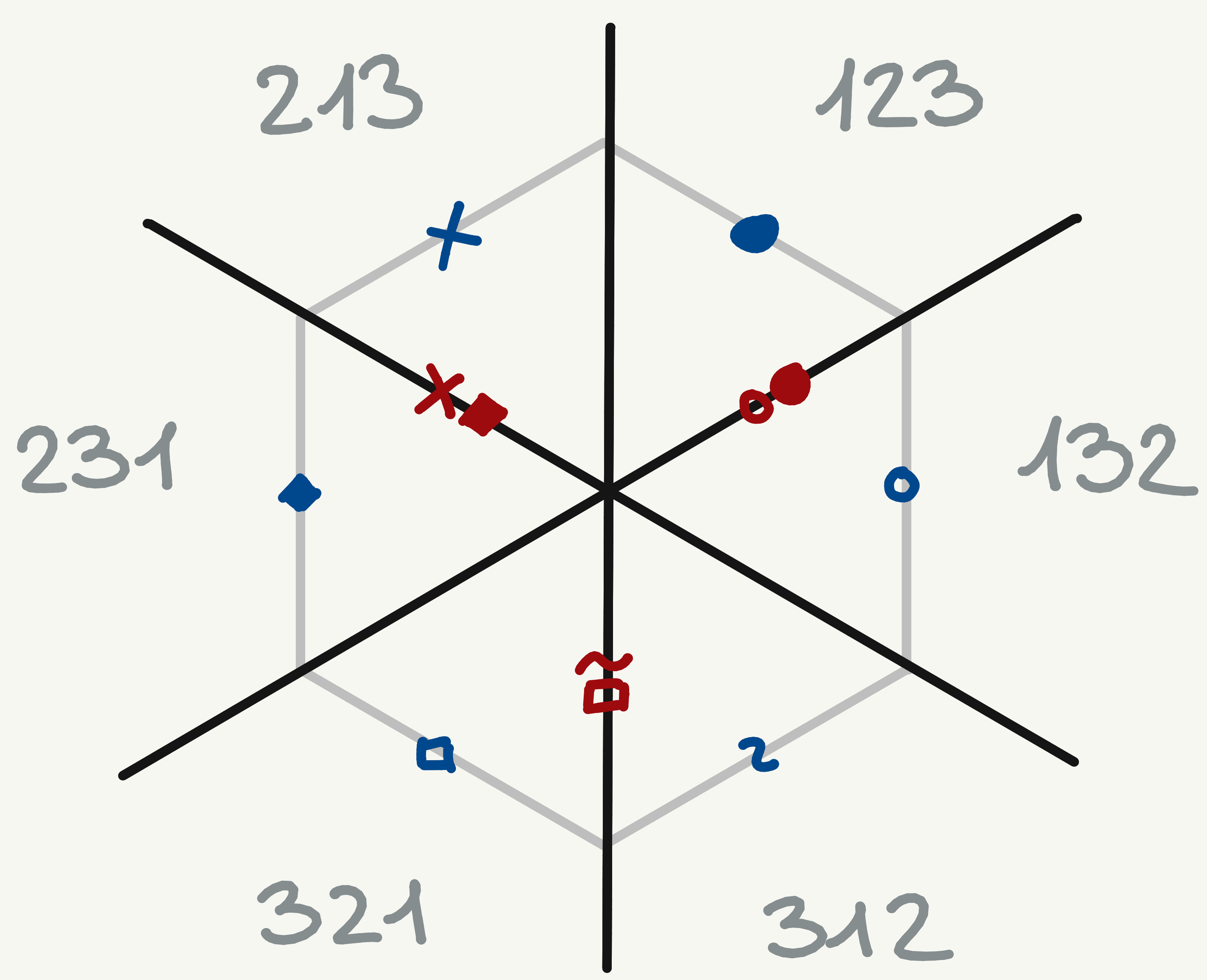
$$B' = \{(1,4),(2,4),(2,6)\}$$



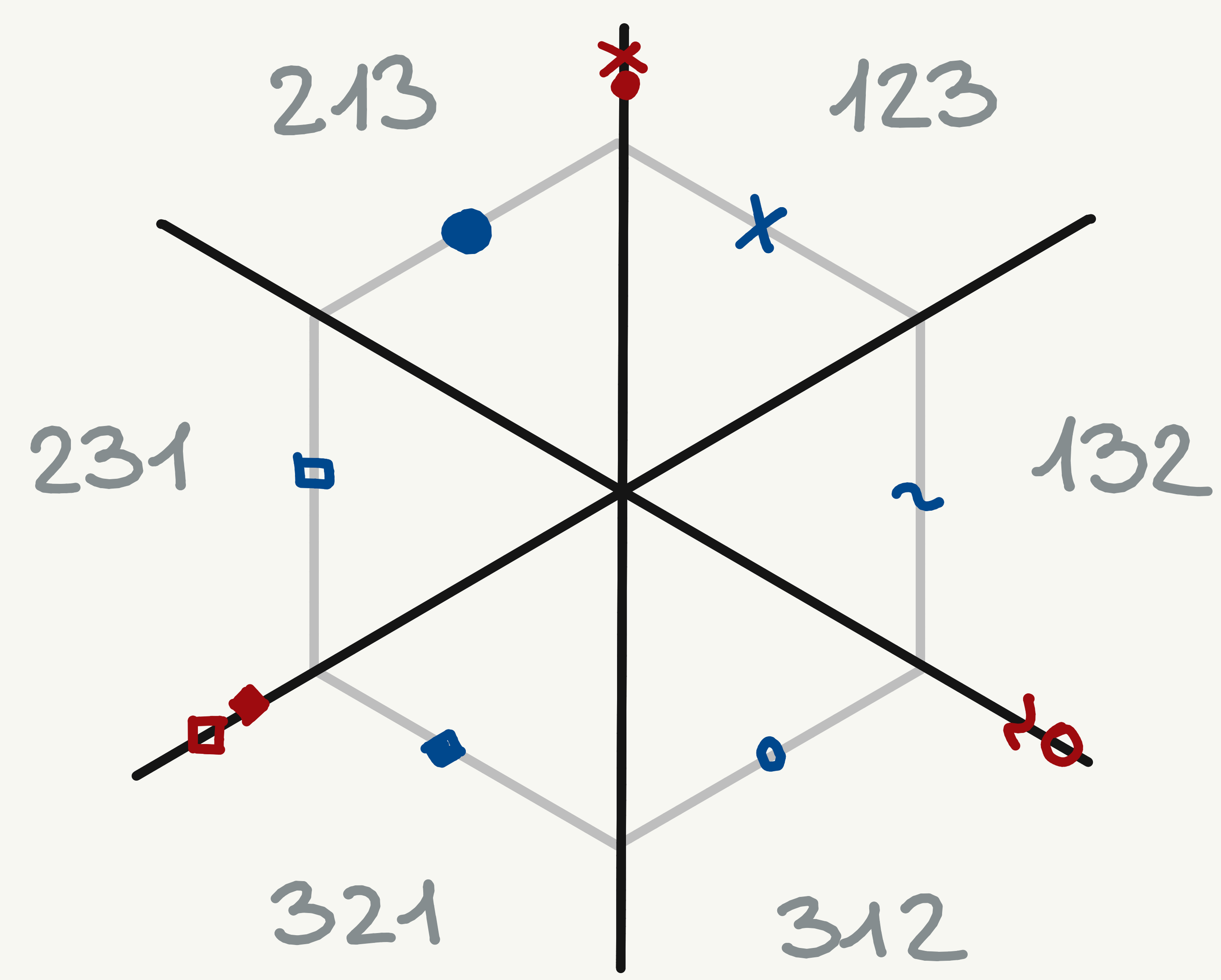
Si rappresentano in :

$$\mathrm{Sym}_n \backslash \left(\mathbb{R} \times \mathrm{cone}(\Sigma_n) \times \mathbb{R} \times \mathrm{cone}(\Sigma_n) \right)$$

2 , $\frac{5}{3}$,



, 5 , , $\frac{14}{3}$,



▸ METRICHE su $\mathcal{B}_n \cong Y$

$\boxed{\mathbb{R}^{2n}, d_\infty}$ Definiamo il quoziente $X = {}_{Sym_n}\backslash \mathbb{R}^{2n}$:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$([\underline{x},\underline{y}],[\underline{x}',\underline{y}']) \longmapsto \min_{\substack{(\tilde{x},\tilde{y}) \in [\underline{x},\underline{y}] \\ (\hat{x},\hat{y}) \in [\underline{x}',\underline{y}']}} d_\infty\big((\tilde{x},\tilde{y}),(\hat{x},\hat{y})\big)$$

$\boxed{\mathcal{B}_n, \tilde{d}_B}$ Distanza Bottleneck Modificata

$$\tilde{d}_B : \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(B, B') \longmapsto \min_{\gamma \in Sym_n} \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \|(b_i, d_i) - (b'_{\gamma(i)}, d'_{\gamma(i)})\|_\infty$$

▸ TEOREMA

La mappa $\phi : (\mathcal{B}_n, d) \longrightarrow (Y, \tilde{d}_B|_{Y \times Y})$ è isometria.

▶ METRICHE su $\mathcal{B}_n \cong Y$

$\boxed{\mathbb{R}^{2n}, d_2}$ Definiamo al quoziente $X = {}_{Sym_n}\backslash \mathbb{R}^{2n}$:

$$d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$([\underline{x},\underline{y}],[\underline{x}',\underline{y}']) \longmapsto \min_{\substack{(\tilde{\underline{x}},\tilde{\underline{y}})\in[\underline{x},\underline{y}] \\ (\hat{\underline{x}},\hat{\underline{y}})\in[\underline{x}',\underline{y}']}} d_2\left((\tilde{\underline{x}},\tilde{\underline{y}}),(\hat{\underline{x}},\hat{\underline{y}})\right)$$

$\boxed{\mathcal{B}_n, \tilde{d}_W}$ Distanza Wasserstein Modificata

$$\tilde{d}_W : \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(B, B') \longmapsto \min_{\gamma \in Sym_n} \sqrt{\sum_{i\in[n]} \|(b_i, d_i) - (b'_{\gamma(i)}, d'_{\gamma(i)})\|_2^2}$$

▶ TEOREMA

La mappa $\phi : (\mathcal{B}_n, d') \longrightarrow (Y, \tilde{d}_W|_{Y\times Y})$ e' isometria.

Grazie per l' attenzione !