Quarta Consegna Elementi di Topologia Algebrica

Cristian Sopio
Mat:559597

June 2020

ALGEBRAIC TOPOLOGY
Homework 4

1. We have seen in class that $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$. Consider the map $S^2 \to S^2$ given by permuting the factors S^1 in $S^1 \wedge S^1$. Show that the induced map $H_2(S^2) \to H_2(S^2)$ has degree -1.

2. Assume that $f : S^i \to X$ represents the zero class in $\pi_i(X, x_0)$, where x_0 is the image of a base point $* \in S^i$. Prove that f extends to a continuous map $E^{i+1} \to X$. [*Hint:* Consider the map $S^i \times I \to E^{i+1}$ given by $(x, t) \mapsto tx + (1 - t)*$.]

3. *a*) Verify that $\pi_i(X, X, x_0) = 0$ for all $i > 1$.
b) Deduce the converse statement to Exercise 2: if f extends to a continuous map $E^{i+1} \to X$, then f represents the zero class in $\pi_i(X, x_0)$.

4. Let X be an n-connected CW complex such that X has dimension $\leq n$ (i.e. $X = X^n$). Show that X is contractible.

[*Warning:* The assumption $X = X^n$ alone does NOT imply that $\pi_i(X) = 0$ for $i > n$!]

5. Recall that S^n can be given a CW structure with two i-cells for each $0 \leq i \leq n$, by attaching inductively two i-cells to S^{i-1} so that S^{i-1} becomes the equator of S^i. Performing this construction infinitely many times, we obtain a CW complex S^∞.

Show that S^∞ is contractible. [*Hint:* Compute homotopy groups first.]

Nota: Indichiamo che, dati A, B gruppi abeliani, $A \longrightarrow B$ è un isomorfismo ($A \simeq B$) con

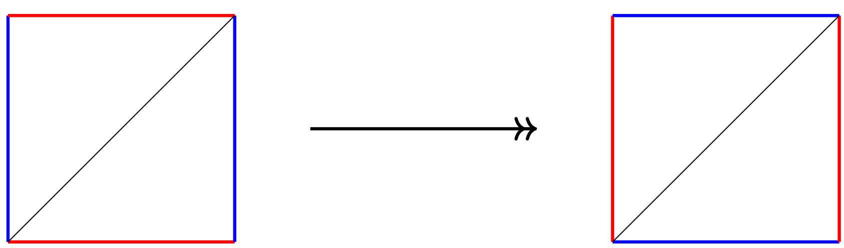
$$A \xrightarrow{\ \sim\ } B$$

Esercizio 1.

Considerando le mappe naturali

$$[0,1]^2 \longrightarrow S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \wedge S^1$$

la mappa presa in considerazione è indotta, sul toro, da quella che inverte i fattori del prodotto e quindi, sul quadrato, dalla riflessione rispetto alla diagonale.



Da ciò segue che, considerando l'identificazione $S^1 \wedge S^1 \longrightarrow S^2$, tale mappa corrisponde, sulla sfera, alla riflessione rispetto a un iperpiano. Ne segue, da quanto visto a lezione, che la mappa indotta in omologia ha grado -1.

Esercizio 2.

Sia $F : S^n \times [0,1] \longrightarrow E^{n+1}$ la mappa $(x,t) \mapsto tx + (1-t)\star$. Abbiamo che questa mappa è continua, surgettiva e chiusa perché mappa da uno spazio compatto in uno spazio T_2, per cui è un'identificazione chiusa.
Sia ora $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow X$ un'omotopia per cui $H(x,0) = x_0$ e $H(x,1) = f(x)$.
Se mostriamo che H è costante sulle fibre di F, per la proprietà universale delle identificazioni abbiamo che esiste $G : E^{n+1} \longrightarrow X$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
S^n \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[d, "F"'] & X \\
E^{n+1} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbiamo allora preso $y \in E^{n+1}$ due casi:

1. Se $y \neq \star$, $F^{-1}(y)$ ha cardinalità 1, allora H è costante su $F^{-1}(y)$.

2. $F^{-1}(\star) = S^n \times \{0\}$, ma $H\big|_{S^n \times \{0\}} \equiv x_0$.

Per cui H è costante sulle fibre di F ed esiste G tale che

$$G \circ F = H.$$

G adesso estende f, in quanto

$$f(x) = H\big|_{S^n \times \{1\}} = (G \circ F)\big|_{S^n \times \{1\}} = G\big|_{S^n \times \{1\}} = f(x)$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché $F\big|_{S^n \times \{1\}} = id_{S^n}$.

Esercizio 3.

a) Sfruttando la sequenza dell'omotopia relativa tra X e X, per ogni $n > 1$, abbiamo

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, X, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \cdots$$

dove gli isomorfismi $\pi_i(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_i(X, x_0)$ seguono dal fatto che l'inclusione $X \longrightarrow X$ è un omeomorfismo, e per esattezza concludiamo che

$$\pi_n(X, X, x_0) \simeq 0 \qquad \text{per } n > 1.$$

b) Se una mappa $f : S^n \longrightarrow X$ viene estesa ad una mappa $\tilde{f}$ come nell'esercizio 2, abbiamo che $\tilde{f} : (E^{n+1}, S^n, \star) \longrightarrow (X, X, x_0)$ e $[\tilde{f}] = [0] \in \pi_n(X, X, x_0)$ per il punto *a)*.
Sia allora H l'omotopia tra $[\tilde{f}]$ e $[0]_{\pi_n(X,X,x_0)}$, relativamente a S^n, allora $H\big|_{S^n \times [0,1]}$ è l'omotopia tra $[f]$ e $[0]_{\pi_n(X,x_0)}$.

Esercizio 4.

Partiamo da $n = 0$, in questo caso, essendo connesso per archi la tesi è banale in quanto $X = x_0$ e quindi è contrattile.
Per il caso generale vogliamo usare il teorema di Hurewicz per dimostrare che tutti i gruppi di omotopia sono banali. Fatto ciò abbiamo che, preso $x_0 \in X$, la mappa

$$x_0 \longrightarrow X$$

è un'equivalenza omotopica debole di CW-complessi e quindi un'equivalenza omotopica per quanto visto a lezione.
Essendo X n-connesso, abbiamo che $\pi_i(X, x_0) \simeq 0$ se $0 < i \leq n$, per cui il $\pi_{n+1}(X, x_0)$ essendo abeliano è isomorfo all' $\mathcal{H}_{n+1}(X)$. Abbiamo però visto che i gruppi di omologia per un CW-complesso di dimensione n sono banali per $i > n$, ovvero

$$\pi_i(X, x_0) \simeq \mathcal{H}_i(X) \simeq \mathcal{H}_i(X^n) \simeq 0 \qquad \text{se } i > n.$$

Ripetendo il ragionamento per ogni $m > n$ otteniamo così che $\pi_m(X, x_0) \simeq 0$ e quindi la tesi segue da quanto detto.

Esercizio 5.

Per quanto visto a lezione abbiamo che se X è un CW-complesso, la coppia (X, X^{n+1}) è $(n+1)$-connessa. Preso allora $X = S^\infty$, dal fatto che l'$(n+1)$-scheletro è proprio S^{n+1} segue che $\pi_n(S^\infty, S^{n+1}, \star) \simeq 0$.
Usando la sequenza esatta dell'omotopia relativa, abbiamo per ogni $n > 0$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_n(S^{n+1}, \star) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_n(S^\infty, \star) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_n(S^\infty, S^{n+1}, \star) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \pi_n(S^\infty, \star) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

e per esattezza concludiamo che $\pi_n(S^\infty, \star) \simeq 0$. Invece per il caso $n = 0$ abbiamo che $\pi_n(S^\infty, \star) \simeq \mathbb{Z}$ essendo S^∞ connessa per archi.
A questo punto abbiamo che preso $\star \in S^\infty$ l'inclusione

$$\star \longrightarrow S^\infty$$

è un'equivalenza omotopica debole di CW-complessi, e per quanto visto a lezione è dunque un'equivalenza omotopica tra $\star$ e S^∞, da cui segue che S^∞ è contrattile.