Primo Compitino
GTD

Cristian Sopio
Mat: 559597

22 October 2019

`Esercizio 1` L'insieme dato è il supporto della curva:

$$\begin{aligned}\sigma(t) : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (f(t), t)\end{aligned}$$

Questo perchè la curva $\alpha(t) = (t, f(t))$ ha come supporto il grafico di f, come visto a lezione, e l'insieme dato e la curva si ottengono da $\alpha(t)$ e il grafico di f tramite la trasformazione lineare

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

E abbiamo che è liscia essendo entrambe le componenti funzioni liscie.
Adesso, vediamo l'*iniettività* e la *regolarità*.
Siano t_1, t_2 per cui $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$: da $(f(t_1), t_1) = (f(t_2), t_2)$ segue in particolare $t_1 = t_2$ e questo porta all'uguaglianza richiesta se e soltanto se i due elementi sono uguali.
Adesso derivando si ha

$$\sigma'(t) = (f'(t), 1)$$

Che è diverso da zero, per qualunque t, quindi la curva è regolare.
Per calcolare la lunghezza della curva, abbiamo

$$\mathcal{L}(\sigma) = \int_0^1 \parallel \sigma'(t) \parallel dt = \int_0^1 \sqrt{f'^2(t) + 1} dt$$

Che esprime la lunghezza in funzione della derivata prima di f.

`Esercizio 2` Consideriamo la mappa

$$\begin{aligned}F(t,s) : [0, 2\pi] \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t,s) &\longmapsto \sigma_1\left(\frac{t}{2}(1+s) + (1-s)\pi\right)\end{aligned}$$

Ora per definizione di omotopia, bisogna verificare che

i. $F(t, s)$ sia continua

ii. $F(t, 0) = \sigma_0(t)$

iii. $F(t,1) = \sigma_1(t)$

iv. $F(0,s) = F(2\pi, s)$, $\forall s \in [0,1]$

Per il primo punto, possiamo osseravare che $F(t,s)$ è composizione di due funzioni continue, ovvero la curva σ_1 e il polinomio nelle variabili t e s:

$$p(t,s) = \frac{t}{2}(1+s) + (1-s)\pi$$

Per il parametro s, si ha che

$$F(t,s) = \begin{cases} \sigma_1(\frac{t}{2}(1+0) + 1\pi) = \sigma_1(\frac{t}{2} + \pi) & \text{se } s = 0 \\ \sigma_1(\frac{t}{2}(1+1) + (1-1)\pi) = \sigma_1(t) & \text{se } s = 1 \end{cases}$$

con

$$F(t,0) = \sigma_1(\frac{t}{2} + \pi) = \begin{cases} (1,0) & \text{se } \frac{t}{2} + \pi \leq \pi \\ (\cos t, \sin t) & \text{se } \frac{t}{2} + \pi \geq \pi \end{cases}$$

e $\forall t \in [0, 2\pi]$ si ha che $\frac{t}{2} + \pi \geq \pi$ e quindi $F(t,0)$ coincide con $\sigma_0(t)$.
Infine bisogna verificare che fissato un tempo s generico, si abbia $F(0,s) = F(2\pi, s)$, $\forall s \in [0,1]$. Ciò è evidente per $s \in \{0,1\}$, e vale, per $t = 0$,

$$\frac{t}{2}(1+s) + (1-s)\pi = (1-s)\pi$$

che è minore uguale di π al variare di $s \in (0,1)$ e quindi $F(0,s) = (1,0)$.
Per $t = 2\pi$, abbiamo che $\frac{2\pi}{2}(1+s) + (1-s)\pi = 2\pi$ per ogni s, quindi

$$F(2\pi, s) = \sigma_1(2\pi) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1,0) = F(0,s)$$

`Esercizio 3` Derivando σ, si ottiene

$$\sigma'(t) = (-\sin(t), -\sin(\frac{t}{3}), -\cos(t))$$

Quindi deve valere contemporaneamente:

$$\begin{cases} -\sin(t) = 0 \\ -\sin(\frac{t}{3}) = 0 \\ -\cos(t) = 0 \end{cases}$$

Ma la prima e la terza equazione non possono essere contemporaneamente vere, quindi la curva è regolare.
Ora cerchiamo la *retta tangente* e il *piano osculatore* nel punto $\sigma(0)$. Si ha

$$\begin{aligned} &\sigma(0) = (9,3,1) \\ &\sigma'(0) = (0,0,-1) \\ &\| \sigma'(0) \| = \sqrt{\sin^2 0 + \sin^2 \frac{0}{3} + \cos^2 0} = \sqrt{1 + \sin^2 \frac{0}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Per cui $\mathbf{t}(0) = \sigma'(0)$ e

$$r(t) = \sigma(0) + k\mathbf{t}(0) = (9, 3, 1-k)$$

è la *retta tangente* nel punto $\sigma(0)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
Per il piano osculatore, invece, calcoliamo $\mathbf{n}(t)$.
Innanzitutto

$$\begin{aligned}
\sigma''(t) &= (-\cos t, -\frac{1}{3}\cos(\frac{t}{3}), \sin t) \\
\parallel \sigma''(t) \parallel &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + \frac{1}{9}\cos^2\frac{t}{3}} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}\cos^2\frac{t}{3}} > 0 \\
\mathbf{n}(0) &= \frac{(\sigma'(0) \wedge \sigma''(0)) \wedge \sigma'(0)}{\parallel (\sigma'(0) \wedge \sigma''(0)) \wedge \sigma'(0) \parallel}
\end{aligned}$$

Ora

$$\sigma'(0) \wedge \sigma''(0) = det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{3}, 1, 0)$$

$$(-\frac{1}{3}, 1, 0) \wedge \sigma'(0) = det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1, -\frac{1}{3}, 0)$$

e $\parallel \sigma'(0) \wedge \sigma''(0)) \wedge \sigma'(0) \parallel = \parallel (1, -\frac{1}{3}, 0) \parallel = \sqrt{\frac{10}{9}}$, quindi

$$\mathbf{n}(0) = \sqrt{\frac{9}{10}}(-1, -\frac{1}{3}, 0)$$

e

$$\Pi = \sigma(0) + k\mathbf{t}(0) + s\mathbf{n}(0) = (9 - \sqrt{\frac{9}{10}}s, 3 - \frac{s}{\sqrt{10}}, 1-k)$$

per $k, s \in \mathbb{R}$ è il *piano osculatore* nel punto $\sigma(0)$.

`Esercizio 4` La curva σ non è PLA infatti

$$\sigma'(t) = (2\sqrt{2} - \cos t, 2\sqrt{2}\cos t + 1, -3\sin t)$$

Facendone il modulo

$$\begin{aligned}
\parallel \sigma'(t) \parallel &= \sqrt{(2\sqrt{2}t - \cos t)^2 + (2\sqrt{2}\cos t + 1)^2 + (-3\sin t)^2} \\
&= \sqrt{8 + \cos^2 t - 4\sqrt{2}\cos t + 8\cos^2 t + 1 + 4\sqrt{2}\cos t + 9\sin^2 t} \\
&= \sqrt{9 + 8(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{18}
\end{aligned}$$

Una riparametrizzazione PLA è data da

$$\widetilde{\sigma}(s) = (\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}s - \sin\frac{s}{\sqrt{18}}, 2\sqrt{2}\sin\frac{s}{\sqrt{18}} + \frac{s}{\sqrt{18}}, 3\cos\frac{s}{\sqrt{18}}).$$

Per calcolare la curvatura scriviamo

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{18}}(2\sqrt{2} - \cos\frac{s}{\sqrt{18}}, 2\sqrt{2}\cos\frac{s}{\sqrt{18}} + 1, -3\sin\frac{s}{\sqrt{18}})$$

Derivando ancora:

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{18}(\sin\frac{s}{\sqrt{18}}, -2\sqrt{2}\sin\frac{s}{\sqrt{18}}, -3\cos\frac{s}{\sqrt{18}})$$

E si ha:

$$k(s) = \parallel \dot{\mathbf{t}}(s) \parallel = \frac{1}{18}\sqrt{\sin^2\frac{s}{\sqrt{18}} + 8\sin^2\frac{s}{\sqrt{18}} + 9\cos^2\frac{s}{\sqrt{18}}} = \frac{1}{18}\sqrt{9} = \frac{1}{6}$$

Calcoliamo adesso la *torsione*,

$$\mathbf{n}(s) = 6\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{3}(\sin\frac{s}{\sqrt{18}}, -2\sqrt{2}\sin\frac{s}{\sqrt{18}}, -3\cos\frac{s}{\sqrt{18}})$$

Mentre il *versore binormale*

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \\
&= det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}}\cos\frac{s}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{3}\cos\frac{s}{\sqrt{18}} & -\frac{3}{\sqrt{18}}\sin\frac{s}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3}\sin\frac{s}{\sqrt{18}} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\frac{s}{\sqrt{18}} & -\cos\frac{s}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e}_1\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}\cos^2\frac{s}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}}\cos\frac{s}{\sqrt{18}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}\sin^2\frac{s}{\sqrt{18}}\right) - \\
&\quad \mathbf{e}_2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}\cos\frac{s}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}}\cos^2\frac{s}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}}\sin^2\frac{s}{\sqrt{18}}\right) + \\
&\quad \mathbf{e}_3\left(-\frac{8}{3\sqrt{18}}\sin\frac{s}{\sqrt{18}} - \frac{1}{3\sqrt{18}}\sin\frac{s}{\sqrt{18}}\right) \\
&= \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}}\cos\frac{s}{\sqrt{18}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}\cos\frac{s}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{3}{\sqrt{18}}\sin\frac{s}{\sqrt{18}}\right)
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \left(\frac{1}{18}\sin\frac{s}{\sqrt{18}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}\sin\frac{s}{\sqrt{18}}, -\frac{3}{18}\cos\frac{s}{18}\right)$$

Otteniamo quindi

$$\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\frac{6}{18^2}\left(\sin^2\frac{s}{\sqrt{18}} + 8\sin^2\frac{s}{\sqrt{18}} + 9\cos^2\frac{s}{\sqrt{18}}\right) = -\frac{1}{6}.$$

A questo punto, vogliamo trovare un'elica della forma

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

e un movimento rigido $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $T(\gamma) = \sigma$. In particolare, per l'elica, con conti simili, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&v^2 = a^2 + b^2 \text{ è il quadrato della velocità} \\
&k = \frac{a}{v^2} \text{ è la curvatura} \\
&\tau = \frac{b}{v^2} \text{ è la torsione}
\end{aligned}$$

Adesso imponendo che $k = \frac{1}{6}$ e $\tau = -\frac{1}{6}$ si ha: $6a = v^2 = -6b$ e $v^2 = 2a^2$, per cui $a^2 = 3a \Longrightarrow a = 3$ e $b = -3$, escludendo i casi degeneri.
Consideriamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}t - \sin t \\ 2\sqrt{2}\sin t + t \\ 3\cos t \end{pmatrix}$$

Notando che possiamo ridurci ad una matrice A della forma sopra per il teorema di classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^3$. Inoltre un movimento rigido dovrebbe essere del tipo $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$, ma il vettore $\mathbf{b}$ che traslerebbe è sicuramente nullo, perchè le componenti di entrambi $A\gamma(t)$ e $\sigma(t)$ non hanno termini costanti.
Cerco allora le costanti c, d, e, f affinchè la matrice porti l'elica nella curva.
Facendo i prodotti si ha

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}t - \sin t = 3c\sin t - 3dt \\ 2\sqrt{2}\sin t + t = 3e\sin t - 3f\sin t \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} c = -\frac{1}{3} \\ d = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ e = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ f = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Infine, ci rimane da verificare che $A^t = A^{-1}$ e che A^t sia in $SO(3)$. D'altra parte

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$det(A^t) = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = 1.$$

Quindi la matrice cercata che fornisce il movimento rigido che porta la curva data nell'elica è

$$A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

`Esercizio 5` Per prima cosa, osserviamo che la curva data è PLA. infatti

$$\dot{\sigma}(s) = \left(\cos s, -\frac{3}{5}\sin s, -\frac{4}{5}\sin s\right)$$

e

$$\| \dot{\sigma}(s) \| = \sqrt{\cos^2 s + \frac{9}{25}\sin^2 s + \frac{16}{25}\sin^2 s} = 1$$

Dunque

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\sigma}(s) = \left(\cos s, -\frac{3}{5}\sin s, -\frac{4}{5}\sin s\right)$$

Derivando ancora

$$\ddot{\sigma}(s) = \left(-\sin s, -\frac{3}{5}\cos s, -\frac{4}{5}\cos s\right)$$

e

$$\| \ddot{\sigma}(s) \| = \sqrt{\sin^2 s + \frac{9}{25}\cos^2 s + \frac{16}{25}\cos^2 s} = 1$$

Quindi

$$\mathbf{n}(s) = \ddot{\sigma}(s) = \left(-\sin s, -\frac{3}{5}\cos s, -\frac{4}{5}\cos s\right)$$

Infine ci resta da calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \\
&= det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos s & -\frac{3}{5}\sin s & -\frac{4}{5}\sin s \\ -\sin s & -\frac{3}{5}\cos s & -\frac{4}{5}\cos s \end{pmatrix} \\
&= 0\mathbf{e}_1 + - \left(\frac{4}{5}\cos^2 s + \frac{4}{5}\sin^2 s\right)\mathbf{e}_2 + \left(-\frac{3}{5}\cos^2 s - \frac{3}{5}\sin^2 s\right)\mathbf{e}_3 \\
&= \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)
\end{aligned}$$

Trovando così il *riferimento di Frénet* $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$.